NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE.

NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

TWEEDE REEKS

DEEL VII

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1907

INHOUD.

Bibliographie.

NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

TWEEDE REEKS
DEEL VII
EERSTE STUK

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1905

ERRATUM.

Op blz. 389 van Deel VI, tweede reeks, is regel 4 v. o. het woord „gauches" weggevallen. De medaille Guccia zal in de eerste plaats worden toegekend aan

un mémoire qui fera faire un progrès essentiel à la théorie des courbes gauches algébriques.

ERRATUM.

Op blz. 389 van Deel VI, tweede reeks, is regel 4 v. o. het woord „gauches" weggevallen. De medaille Guccia zal in de eerste plaats worden toegekend aan

un mémoire qui fera faire un progrès essentiel à la théorie des courbes gauches algébriques.



CORNEILLE LOUIS LANDRÉ (1838—1905).

DOOR

M. C. PARAIRA.
(Amsterdam.)

Door de Redaktie van het Nieuw Archief daartoe uitgenoodigd, verschaft het mij groote voldoening te dezer plaatse een woord van waardeering te mogen wijden aan den betrekkelijk plotseling uit zijn werkkring weggerukten geleerde. Van verschillende zijden is reeds hulde gebracht aan zijne nagedachtenis, zoowel in vakbladen voor verzekeringswetenschap als in openbare bladen. Maar zeker mag ook in de werken van het Wiskundig Genootschap eene levensbeschrijving van Landré niet achterwege blijven.

Corneille Louis Landré werd op 31 Augustus 1838 te Utrecht geboren. Zijne familie is, zooals reeds uit den naam blijkt, van franschen oorsprong en hij zelf had steeds eene zekere voorliefde voor al wat fransch was. Hij placht zich ook met groote gemakkelijkheid van de fransche taal te bedienen. Ongeveer de eerste helft van zijn leven bracht hij te Utrecht door en zeker is het aan die omstandigheid te danken, dat hij de man is geworden, die hij later was. Immers was het de door de akademiestad geboden gelegenheid tot omgang met geleerden van naam, die den voor het lager onderwijs bestemden jongeling dreef tot verdere ontwikkeling en meer uitgebreide studie.

In zijne geboortestad arbeidden destijds mannen als R. van Rees en C. H. D. Buys Ballot en stond de studie der wis- en natuurkunde nog onder den invloed van den philosophischen J. F. L. Schröder. De ruime opvattingen der natuurphilosophen van die dagen moesten groote aantrekkingskracht uitoefenen op den geest

van den ook op het gebied van letteren en kunst reeds zeer ontwikkelden man; en wie hem in zijn later leven van nabij heeft gekend, kon ook duidelijk de sporen daarvan erkennen, o. a. in de veelzijdige kennis van vakliteratuur die hem eigen was. Immers slechts hoogst zelden kon men eenig leerboek uit ouderen of nieuweren tijd bespreken, waarmede hij niet had kennis gemaakt.

Ook later met M. Hoek en C. H. C. Grinwis heeft Landré zeer veel omgang gehad. Zelf had hij de akte K V, M. O. behaald en trad op als privaat onderwijzer in wiskunde en aanverwante vakken, iets dat een wezenlijken werkkring opleverde in die dagen, toen de zoogenaamde Groot en Klein Mathesis examens, het Literarisch Mathematisch examen en de meer dan thans eenvoudige Admissie-examens voor de lessen aan de Hoogeschool bestonden. Toen de wijzigingen in de regeling van het hooger onderwijs aan deze examens en daarmede voor een groot deel aan de behoefte aan privaat onderwijs in wiskunde een einde maakten, ontstond voor Landré, evenals voor zoovele anderen, de noodzakelijkheid tot het zoeken van een anderen werkkring, en zoo trad hij op 1 Januari 1876, op aanbeveling van Prof. Grinwis, als wiskundige op bij de omstreeks twee jaren te voren opgerichte Levensverzekering Maatschappij Dordrecht, waarmede tevens zijne verhuizing naar de stad van dien naam gepaard ging. In 1881 benoemd tot leeraar in de wiskunde bij de Rijksnormaallessen aldaar, bleef hij beide betrekkingen waarnemen, tot hij na den dood van M. G. Snoer geroepen werd als actuaris op te treden bij de Algemeene Maatschappij van Levensverzekering en Lijfrente te Amsterdam, welk ambt hij van 1 April 1896 tot aan zijn overlijden op 10 Februari dezes jaars, dus gedurende bijna negen jaren bekleedde. Sedert October 1903 trad hij met Dr. J. P. Janse ook opnieuw als leeraar op aan den cursus voor Levensverzekeringswetenschap, gegeven namens de Vereeniging van Wiskundige Adviseurs.

Met zijn verblijf in de hoofdstad des rijks was hij zeer ingenomen. Trouwens, hij vond daar terug, wat hij bij het verlaten van Utrecht voor het grootste gedeelte had verloren, n.l. het dagelijksch verkeer met wetenschappelijke mannen, waartoe de aanwezigheid eener Universiteit en het hier gevestigd zijn van het Wiskundig Genootschap, van de Vereeniging van Wiskundige Adviseurs, enz. gelegenheid geven. Herhaaldelijk placht hij zijne tevredenheid daarover uit te spreken en dat hij daarvan ook

werkelijk gebruik maakte, bleek o. a. daaruit, dat bijna alle bijeenkomsten van de beide genoemde genootschappen door hem werden bijgewoond. Zelfs in December 1904, toen hij reeds ernstig ziek was, bezocht hij nog, tegen den raad zijner vrienden in, de vergadering der Vereeniging van Wiskundige Adviseurs en nam daar deel aan de besprekingen.

Landré was gehuwd met de kunstschilderes Hendrika Wilhelmina van der Kellen, die hem in 1903 ontviel.

Omstreeks October 1904 werd hij ziek; hoewel aanvankelijk eenige beterschap scheen in te treden, bleek weldra, dat de ziekte zeer ernstig was. Toch kwam nog het bericht van zijn overlijden op 10 Februari d. a. v. betrekkelijk onverwacht, daar een zoo spoedig einde niet was voorzien. Bij de ter aarde bestelling werd het woord gevoerd o. a. door Prof. Dr. J. C. Kluyver, die met mij het bestuur van het Wiskundig Genootschap vertegenwoordigde.

Eene volledige opgave te doen van al hetgeen Landré heeft geschreven, zou bij de buitengewoon groote verspreiding daarvan, nauwelijks uitvoerbaar zijn. Ik zal mij daarom, op enkele uitzonderingen na, bepalen tot de vermelding van zijn werken op zuiver wiskundig gebied.

In 1875 verscheen het werk getiteld „Stereometrische Hoofdstukken ter uitbreiding van de elementaire leerboeken" waarvan op dit oogenblik eene tweede uitgave wordt voorbereid, die nog geheel door Landré zelven tijdens zijne laatste ziekte is bewerkt. Het doel van dit boek is aanvulling van het behandelde in de meest gebruikelijke leerboeken der Stereometrie, waarom het dan ook meerendeels minder algemeen bekende onderwerpen behandelt.

Hierop volgde in 1877 het werkje: „Het invoeren van nieuwe veranderlijken in differentiaal-vormen en integralen" en in 1891 de „Algebraïsche Hoofdstukken ter uitbreiding van de leerboeken over de elementaire analyse", een werk van gelijke strekking als het eerstgenoemde. In het laatst van zijn leven is Landré nog aangezocht eene duitsche vertaling van dit werk te doen verschijnen.

Intusschen had hij ook verschillende drukken bewerkt van F. van den Berg's Uitgelezen vraagstukken over de Algebra.

In 1875 werd Landré lid van het Wiskundig Genootschap en reeds dadelijk trad hij op als medewerker aan het Nieuw Archief voor Wiskunde, destijds onder redactie van Prof. D. Bierens

de Haan staande. Daarin verschenen van zijne hand de volgende stukken:

In deel III: Over de afzonderlijke integralen der differentiaalvergelijkingen van de eerste orde met twee veranderlijken;

In deel IV: Over veelvlakkige lichamen;

In deel V: Een woord over de omhullende van een stelsel kromme lijnen;

In deel VI: Over de perspectief van den bol,
Eene stelling omtrent determinanten,
Bij de sommatie formule van Euler,
Beginselen der Stereometrie door Dr. C. J. Matthes (Bibliographie);

In deel VII: Over de functie φ van de methode der kleinste kwadraten;

In deel X: De middelbare fout bij waarnemingen ter bepaling van meer dan een onbekende,
Formulen ter bepaling van het verband tusschen de nauwkeurigheid van sterftetafels en van cijfers voor levensverzekering,
Eene bijzonderheid in acht te nemen bij het verzamelen van gegevens voor het berekenen van sterftewaarschijnlijkheden;

In deel XII: Waarde eener lijfrente en koopsom eener levensverzekering,
Over het risico der uitkeering bij levensverzekering;

In deel XV: Lijfrente in termijnen en doorloopend,
Over den invloed der levenskansen en van den rentevoet op tarief en reserve bij levensverzekering.

De inhoud dezer verhandelingen houdt op merkwaardige wijze gelijken tred met de verandering in werkkring van den schrijver en diens overgang naar het gebied der toegepaste wiskunde. Zelfs houdt zijne medewerking geheel op bij de oprichting van het Archief voor de Levensverzekeringswetenschap, waarvan hij zelf met Dr. G. J. D. Mounier redakteur was. In die latere jaren bepaalde zich zijne werkzaamheid, die echter eer toe- dan afnam, nagenoeg geheel tot het gebied der levensverzekering en vond hare voornaamste uiting in de in 1893 verschenen „Wiskundige Hoofdstukken over Levensverzekering", waarvan in 1895 eene duitsche vertaling verscheen, die in 1901 eene tweede en thans reeds eene derde uitgave beleefde. Dit werk, door den schrijver zelf weder als „Hoofdstukken" aangekondigd, d. w. z.

als een niet op volledigheid aanspraak makend leerboek, is allengs aangegroeid tot eene vraagbaak op het gebied van theorie en praktijk van de levensverzekering, die men slechts zelden te vergeefs zal raadplegen. Vooral de samenvoeging van de wiskundige beginselen met de uitkomsten der ondervinding op het gebied der praktijk is eene eigenschap van dit werk, die men zooal ergens dan toch zeker zeer zeldzaam aantreft. De derde uitgave, die eerlang zal verschijnen, is nog geheel door hem zelven gedurende zijne laatste ziekte herzien en aangevuld.

Naast deze geschriften van grooteren omvang, heeft Landré nog in tal van periodieken, zoowel Nederlandsche als vreemde, een zeer groot aantal bijdragen geschreven en met hart en ziel deelgenomen aan het verhoogde leven op verzekeringsgebied. Wij vinden hem onder de oprichters der vereeniging van Wiskundige Adviseurs en later in haar bestuur, in het bestuur en gedurende twee jaren als Voorzitter van het Wiskundig Genootschap, in den Conseil de Direction van het Comité Permanent des Congrès Internationaux d'Actuaires, onder de correspondenten van verschillende buitenlandsche vereenigingen van actuarissen. Ook woonde hij alle vier congressen van actuarissen bij en leverde voor dat te Londen in 1898 eene bijdrage getiteld „Aperçu succinct des théories du plein de l'assurance", voor dat te Parijs in 1900 in samenwerking met Dr. J. P. Janse een rapport over „l'Assurance contre le risque d'invalidité d'origine morbide, senile ou accidentelle" en voor dat te New-York in 1903 gezamenlijk met mij een rapport „On the improvement in longevity during the 19th century in the Netherlands."

Ten slotte zij nog vermeld eene bijdrage in het 5e Bulletin du Comité Permanent van 1904 getiteld „L'intégrale définie $\int_0^1 \varphi(x)dx$, où $\varphi(x)$ est une fonction algébrique entière, exprimée en fonction de valeurs particulières de l'élément d'intégration", waarmede hij nog eens toonde op het gebied der zuivere wiskunde geen vreemdeling te zijn geworden.

Landré was voor het grootste deel wat men noemt een „self made man", en bezat al de eigenschappen daarvan. Vriendelijk en welwillend voor ieder die zijne hulp kwam inroepen, hetgeen in den laatsten tijd zeer vaak gebeurde, aangenaam en oprecht in den omgang met collega's, in de hoogste mate be-

scheiden, bewoog hij zich overal met gemak en was hij welkom zoowel aan den feestdisch als bij wetenschappelijke bijeenkomsten.

Niet enkel in zijn huisgezin, maar ook in alle kringen waarin hij verkeerde, zal zijn heengaan nog lang eene groote leegte achterlaten en zijne nagedachtenis in hooge eere worden gehouden.

Amsterdam, 6 April 1905. M. C. PARAIRA.

K 18 f

OVER HET VOLUME, DAT DOOR DRIE BOLOPPERVLAKKEN IS BEGRENSD, DIE ELKAAR IN TWEE PUNTEN SNIJDEN,

DOOR

J. C. KLUYVER.
(Leiden.)

Een onderzoek naar het volume, dat door drie boloppervlakken begrensd wordt, is geschied naar aanleiding van de grootheid b uit de vergelijking van VAN DER WAALS [1]). Daar betreft het steeds het gemeenschappelijk deel van drie gelijke bollen, en men kan vragen, of er van eene inhoudsformule sprake zou kunnen zijn, indien de stralen der bollen ongelijk worden aangenomen. Het antwoord kan bevestigend luiden. Elementaire beschouwingen geven eene formule, die echter, hoewel zij eenige regelmaat vertoont, ten slotte vrij ingewikkeld is.

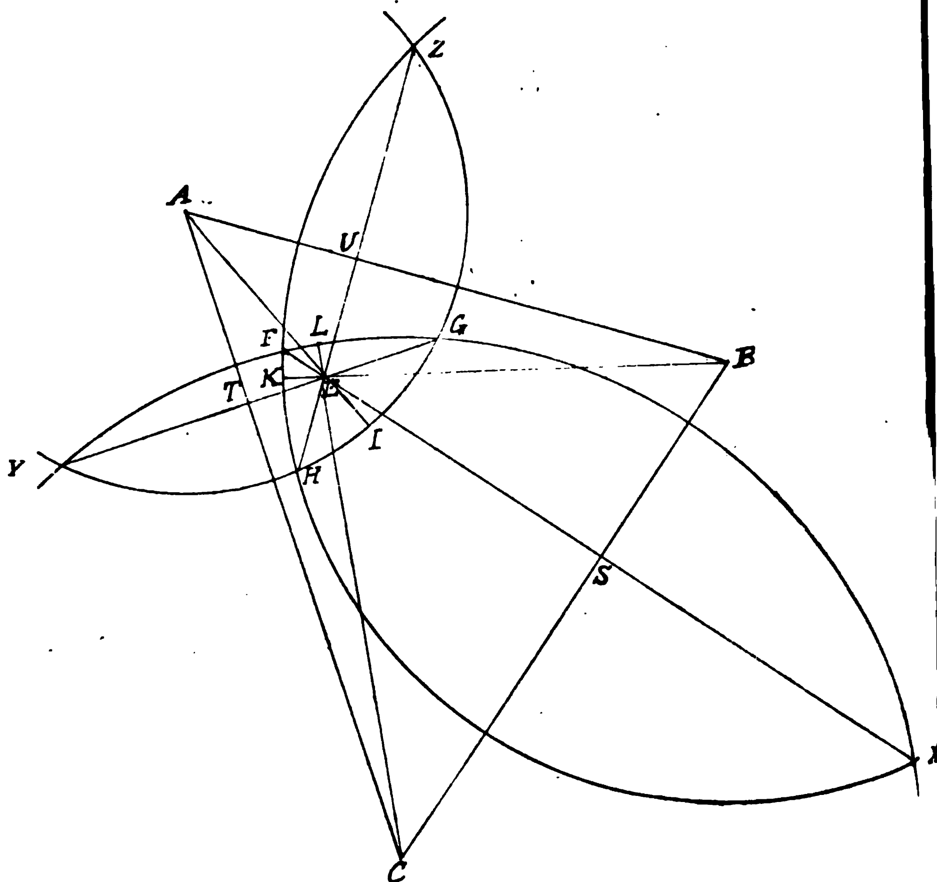
Als gegevens nemen wij de stralen a, b, c der drie gegeven bollen A, B, C en de afstanden a_1, b_1, c_1 der middelpunten. Wij onderstellen, dat deze bollen gelegen zijn, zooals in de figuur is aangeduid. Het vlak der middelpunten A, B, C is het vlak van teekening. Loodrecht op dit vlak staat de machtlijn PQ, die in E het vlak van teekening snijdt. De helft van het te berekenen volume $\frac{1}{2}$V heeft ongeveer de gedaante van een viervlak. Het grondvlak is de cirkeldriehoek FGH, de top in het punt P, en de zijvlakken PHG, PFH en PFG zijn boloppervlakken.

De figuur wordt door de machtvlakken in drie soortgelijke stukken verdeeld, die wij kunnen aanduiden door P(EHG)

---

1) Men vergelijke b.v.: J. J. VAN LAAR. Évaluation de la deuxième correction etc. Archives Teyler, Série II, T. VI.

P(EFH) en P(EGF). Het stuk P(EGH) is als eene algebraïsche som van meer eenvoudige lichamen te beschouwen.



Deze stukken zijn:

1°. Het bolsegment PGHYQ van de bol A, voor zoover het gelegen is in den tweevlakshoek PACB van het viervlak PABC.

2°. Het bolsegment PHGZQ van den bol A, voor zoover het gelegen is in den tweevlakshoek PABC van het viervlak PABC.

3°. Een driehoekige sector van den bol A, waarvan de ribben zijn AB, AC, AP, en die dus geheel gelegen is in den drievlakshoek A(BCP).

4°. De beide viervlakken P(AET) en P(AEU).

Uit de figuur valt te zien, dat het volume P(EHG) gevonden wordt, door de beide gedeeltelijke bolsegmenten te vermeerderen met de beide viervlakken, en van de som af te nemen den bolsector. Eene gelijke rekening kan men volgen voor de stukken P(EFH) en P(EFG). Alles te zamen nemende vindt men voor het gezochte volume $\frac{1}{2}V$:

1°. Drie paar viervlakken zooals P(AET) en P(AEU). Met elkander geven zij τ, het volume van het viervlak PABC.

2°. Drie paar gedeeltelijke bolsegmenten, zooals PGHYQ en PHGZQ. Met elkander vormen zij gedeeltelijke biconvexe lenzen. Zoo vormen bijv. de bollen A en B met elkander de lens PHZQ. Noemen wij het volume van deze lens λ_{12}, dan is van het lichaam in rekening te brengen het deel, dat gelegen is in den tweevlakshoek γ op de ribbe AB van het viervlak PABC, derhalve een volume gelijk aan $\frac{\gamma}{2\pi}\lambda_{12}$.

3°. Is in mindering te brengen van elken bol een driehoekige sector, in volgorde door de drievlakshoeken A, B, C van het viervlak PABC bepaald. Wij noemen deze bolsectoren μ_1, μ_2, μ_3.

De verkregen formule luidt thans

$$\tfrac{1}{2}V = \tau + \frac{\alpha}{2\pi}\lambda_{23} + \frac{\beta}{2\pi}\lambda_{31} + \frac{\gamma}{2\pi}\lambda_{12} - \mu_1 - \mu_2 - \mu_3,$$

en er blijft na te gaan, in hoeverre de grootheden, die in deze formule voorkomen, uitgedrukt kunnen worden in de gegevens, dat zijn de stralen der bollen en de afstanden hunner middelpunten. Men zal opmerken, dat de mogelijkheid daartoe bestaat, maar dat de uitkomst, hoewel symmetrisch, niet eenvoudig is.

Vooreerst is volgens eene bekende formule

$$\tau^2 = \frac{1}{288}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c_1^2 & b_1^2 & a^2 \\ 1 & c_1^2 & 0 & a_1^2 & b^2 \\ 1 & b_1^2 & a_1^2 & 0 & c^3 \\ 1 & a^2 & b^2 & c^2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Vervolgens zijn de standhoeken α, β, γ te berekenen. Men vindt uitdrukkingen als de onderstaande

$$\alpha = \text{bgsin} \frac{3ar}{2 \, . \, \text{ABC} \times \text{PBC}},$$

in welke formule het oppervlak der driehoeken ABC en PBC weder in de gegeven ribben van het viervlak PABC kan worden uitgedrukt.

Eindelijk zijn de volumens der lensvormige lichamen te berekenen.

Men verkrijgt bijv.:

$$\lambda_{23} = \frac{1}{6} \pi (b + c - a_1)^3 + \frac{\pi}{4} (b + c - a_1)(b^2 + c^2 - a_1^2).$$

Maar ingewikkeld wordt weder de uitkomst voor de bolsectoren μ_1, μ_2 en μ_3. Men heeft, als men den standhoek op de ribbe PA van het viervlak PABC noemt α_1,

$$\mu_1 = (\alpha_1 + \beta + \gamma - \pi) a^2,$$

en de standhoek α_1 moet weder op dezelfde wijze als α, β en γ in de gegevens worden uitgedrukt.

Voor het op eenvoudige wijze bepaalde lichaam bestaat geene eenvoudige inhoudsformule.

BEREKENING VAN DEN INHOUD VAN HET LICHAAM, DAT AAN DRIE NIET GEHEEL BUITEN ELKAAR LIGGENDE BOLLEN GEMEEN IS,

DOOR

F. DE BOER.
(Groningen.)

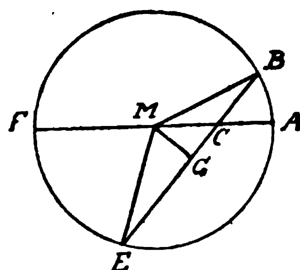


Fig. 1.

1. Laat in een cirkel MA (fig. 1) een middellijn AF en een koorde BE getrokken worden, die elkaar in een punt C onder een hoek BCA $= \phi$ snijden. Laat MG loodrecht op BE getrokken zijn, en zij gegeven MC $= c$, MA $=$ R.

Om de som der figuren BCA en FEC te vinden, merke men op, dat $\angle$FME $+ \angle$BMA $= 2\phi$, en dat Δ MCG het halve verschil is van de driehoeken MEC en MBC. Men heeft dus

$$\text{fig. FEC} + \text{fig. BCA} = \text{sector FME} + \text{sector BMA} + \Delta\,\text{EMC} - \Delta\,\text{MBC},$$

en dus

$$\text{fig. FEC} + \text{fig. BCA} = R^2\phi + c^2 \sin\phi \cos\phi \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Verder ziet men licht, dat

$$\text{fig. FEC} - \text{fig. BCA} = \text{halve cirkel} - \text{segment BAE},$$

dus

$$\text{fig. FEC} - \text{fig. BCA} = \tfrac{1}{2}\pi R^2 - R^2 \text{boog} \cos \frac{MG}{ME} + MG \times GE,$$

of

$$\text{fig. FEC} - \text{fig. BCA} = R^2 \text{boog} \sin \frac{c \sin\phi}{R} + c \sin\phi \sqrt{R^2 - c^2 \sin^2\phi}. \quad 2)$$

De vergelijking 2) van 1) aftrekkende vindt men

$$2\text{fig.BCA} = R^2\phi + c^2\sin\phi\cos\phi - R^2 \text{boogsin}\frac{c\sin\phi}{R} - c\sin\phi\sqrt{R^2 - c^2\sin\phi^2}. \quad 3)$$

Door optelling vindt men 2 fig. FEC, die natuurlijk alleen in het teeken van c van 2 fig. BCA verschilt.

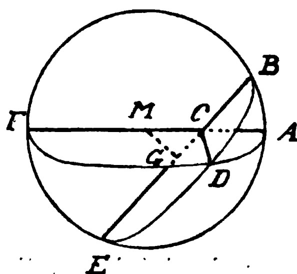


Fig. 2.

2. Een bol MA (fig. 2) wordt door twee vlakken FDA en BDE, waarvan het eerste door het middelpunt gaat, in vier deelen verdeeld. Zij het vlak van teekening FEAB genomen loodrecht op hun doorsnede CD, en zij gegeven $MA = R$, $MC = c$, $\angle BCA = \phi$.

Brengt men doorsneden aan, loodrecht op CD, en deze lijn in punten tusschen C en D gelegen snijdende, en noemt men de afstand van C tot zulk een vlak y, dan is de doorsnede van dit vlak met het lichaam DABC volgens 3) gelijk aan

$$\tfrac{1}{2}\Big\{(R^2 - y^2)\phi + c^2\sin\phi\cos\phi - c\sin\phi\sqrt{(R^2 - y^2 - c^2\sin^2\phi)} -$$
$$- (R^2 - y^2)\,\text{boog sin}\frac{c\sin\phi}{\sqrt{(R^2 - y^2)}}\Big\}.$$

Om nu het deel van den bol te berekenen, dat binnen den tweevlakkigen hoek BCDA ligt (het deel dus waarvan de tweevlakkige hoek scherp is, en op welks oppervlak het middelpunt niet ligt) hebben wij deze functie van y met dy te vermenigvuldigen, te integreeren tusschen de grenzen 0 en $\sqrt{(R^2 - c^2)} = CD$, en de uitkomst met 2 te vermenigvuldigen.

De inhoud van het schuitvormig lichaam, waarvan DABC de helft is, is dus

$$\int_0^{\sqrt{(R^2-c^2)}} \Big\{(R^2 - y^2)\phi + c^2\sin\phi\cos\phi - (R^2 - y^2)\,\text{boog sin}\frac{\sqrt{(R^2 - y^2)}}{c\cos y} -$$
$$- c\sin\phi\sqrt{(R^2 - c^2\sin^2\phi - y^2)}\Big\}\,dy.$$

De eerste twee termen geven

$$\{(\tfrac{2}{3}R^2 + \tfrac{1}{3}c^2)\phi + c^2\sin\phi\cos\phi\}\sqrt{(R^2 - c^2)} \quad . \; . \; . \quad a)$$

In de overschietende integraal

$$-\int_0^{\sqrt{(R^2-c^2)}} \left\{ (R^2-y^2)\,\text{boog}\sin\frac{c\sin\phi}{\sqrt{(R^2-y^2)}}\,c+\sin\phi\sqrt{R^2-c^2\sin^2\phi-y^2} \right\} dy,$$

substitueeren wij $y=\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi-z^2)}$, waardoor zij overgaat in

$$+\int_{\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi)}}^{c\cos\phi} \frac{(z^2+c^2\sin^2\phi)\,\text{boog}\cot\frac{z}{c\sin\phi}+zc\sin\phi}{\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi-z^2)}}\,zdz.$$

Men heeft

$$\int\frac{(z^2+c^2\sin^2\phi)\,zdz}{\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi-z^2)}}=-\tfrac{1}{3}(c^2\sin^2\phi+2R^2+z^2)\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi-z^2)},$$

zoodat de bovenstaande integraal door partieel integreeren van den eersten term overgaat in

$$-\tfrac{1}{3}(c^2\sin^2\phi+2R^2-z^2)\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi-z^2)}\,\text{boog}\cot\frac{z}{c\sin\phi}\Bigg|_{\sqrt{R^2-c^2\sin^2\phi}}^{c\cos\phi}$$

$$+\int_{\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi)}}^{c\cos\phi}\left\{\frac{-\tfrac{1}{3}c(c^2\sin^2\phi+2R^2+z^2)\sin\phi\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi-z^2)}}{z^2+c^2\sin^2\phi}+\frac{z^2c\sin\phi}{\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi-z^2)}}\right\}dz.$$

De geintegreerde term is

$$-\tfrac{1}{3}(2R^2+c^2)\phi\sqrt{(R^2-c^2)}\quad .\ .\ .\ .\ .\quad b)$$

De overgebleven integraal laat zich splitsen in twee deelen, namelijk

$$c\sin\phi\int_{\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi)}}^{c\cos\phi}\frac{\tfrac{4}{3}z^2-\tfrac{1}{3}(R^2-c^2\sin^2\phi)}{\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi-z^2)}}\,dz,$$

en

$$-\tfrac{2}{3}R^2c\sin\phi\int_{\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi)}}^{c\cos\phi}\frac{\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi-z^2)}}{z^2+c^2\sin^2\phi}\,dz.$$

Van het eerste deel is de onbepaalde integraal

$$c\sin\phi\left\{-\tfrac{1}{2}z\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi-z^2)}+\tfrac{1}{2}(R^2-c^2\sin^2\phi)\,\text{boog sin}\frac{z}{\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi)}}\right\},$$

wat, tusschen de aangewezen grenzen genomen, oplevert

$$-\tfrac{1}{2}c^2\sin\phi c\phi\sqrt{(R^2-c^2)}+\tfrac{1}{2}c\sin\phi(R^2-c^2\sin^2\phi)\,\text{boog tg}\,\frac{\sqrt{(R^2-c^2)}}{c\cos\phi}-$$

$$-\tfrac{1}{6}\pi c\sin\phi(R^2-c^2\sin^2\phi)\quad\ldots\ldots\quad c)$$

In het andere deel stellen wij ter bekorting $\rho=\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi)}$, en doen de substitutie

$$u=\sqrt{\frac{\rho-z}{\rho+z}},\qquad z=\rho\,\frac{1-u^2}{1+u^2},$$

waardoor de integraal, onbepaald genomen, overgaat in

$$\tfrac{2}{3}R^2c\sin\phi\int\frac{8\rho^2u^2du}{(1+u^2)\{R^2(1+u^2)^2-u\phi^2u^2\}}.$$

Men heeft

$$\frac{8\rho^2u^2}{(1+u^2)\{R^2(1+u^2)^2-4\rho^2u^2\}}=-\frac{2}{1+u^2}+\frac{R}{R(1+u^2)+2\rho u}+$$

$$+\frac{R}{R(1+u^2)-2\rho u},$$

dus is de integraal, onbepaald genomen,

$$-\tfrac{2}{3}R^2c\sin\phi\times$$

$$\left\{2\text{boogtg}u-\frac{R}{\sqrt{(R^2-\rho^2)}}\text{boogtg}\frac{Ru+\rho}{\sqrt{(R^2-\rho^2)}}-\frac{R}{\sqrt{(R^2-\rho^2)}}\text{boogtg}\frac{Ru-\rho}{\sqrt{(R^2-\rho^2)}}\right\}$$

of, als voor ρ en u de waarde weer wordt ingevoerd, en de laatste twee boogtangenten tot één vereenigd,

$$-\tfrac{4}{3}R^2c\sin\phi\,\text{boog tg}\cdot\frac{\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi-z^2)}}{\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi)}+z}+$$

$$+\tfrac{2}{3}R^3\,\text{boog tg}\,\frac{\sqrt{(R^2-c^2\sin^2\phi-z^2)}\,c\sin\phi}{zR}.$$

Voor de onderste grens wordt dit gelijk aan nul en voor de bovenste

$$- {}^4/_3\, R^2 c \sin\phi \text{ boog tg} \frac{\sqrt{(R^2 - c^2)}}{\sqrt{(R^2 - c^2\sin^2\phi)} + c\cos\phi} +$$

$$+ {}^2/_3\, R^3 \text{ boog tg} \left(\frac{\sqrt{(R^2 - c^2)}}{R} \operatorname{tg}\phi\right) \quad . \; . \; . \; . \quad d)$$

De vier uitdrukkingen a), b), c) en d) te zamen nemende vindt men ten slotte

$$ {}^1/_3\, c^3 \sin\phi\cos\phi \sqrt{(R^2 - c^2)} - {}^1/_6 \pi c \sin\phi\, (R^2 - c^2\sin^2\phi) +$$

$$ {}^1/_3\, c \sin\phi\, (R^2 - c^2\sin^2\phi) \text{ boog tg} \frac{c\cos\phi}{\sqrt{(R^2 - c^2)}}$$

$$- {}^4/_3\, R^2 c \text{ boog tg} \left(\frac{\sqrt{(R^2 - c^2)}}{\sqrt{(R^2 - c^2\sin^2\phi)} + c\cos\phi}\right) +$$

$$+ {}^2/_3\, R^3 \text{ boog tg} \left(\frac{\sqrt{(R^2 - c^2)}}{R} \operatorname{tg}\phi\right).$$

De uitkomst kan nog iets vereenvoudigd worden. Vooreerst kunnen de tweede en derde term worden samengevoegd tot

$$- {}^1/_3\, c \sin\phi\, (R^2 - c^2\sin^2\phi) \text{ boog tg} \frac{\sqrt{(R^2 - c^2)}}{c\cos\phi}.$$

Maar verder is

$$2 \text{ boog tg} \frac{\sqrt{(R^2 - c^2)}}{\sqrt{(R^2 - c^2\sin^2\phi)}} = \text{boog tg} \frac{\sqrt{(R^2 - c^2)}}{c\cos\phi},$$

zoodat ook de vierde term bij den tweede en derde kan worden opgeteld en de uitkomst wordt dan

$$ {}^1/_3 c^2 \sin\phi\cos\phi \sqrt{(R^2 - c^2)} - {}^1/_3 c\sin\phi (3R^2 - c^2\sin^2\phi) \text{ boog tg} \frac{\sqrt{(R^2 - c^2)}}{c\cos\phi} +$$

$$+ {}^2/_3 R^3 \text{ boog tg} \left(\frac{\sqrt{(R^2 - c^2)}}{R} \operatorname{tg}\phi\right) \quad . \; . \; . \; . \quad e)$$

De drie andere deelen vindt men gemakkelijk door het gevondene af te trekken van den halven bol of van het bolsegment BAE en het laatste verschil weer van den halven bol.

Vergelijkt men de aldus verkregen uitdrukkingen met de

bovenstaande, dan blijkt, zooals te verwachten was, dat de formule voor den inhoud van het deel FCDE uit die voor ACDB wordt afgeleid door c van teeken te laten veranderen, mits men in het oog houdt dat, als het argument van een boogtg. door oneindig heen van teeken verandert, de boogtg. niet in — boogtg., maar in π — boogtg. overgaat. Vervangt men ϕ door zijn supplement, dan vindt men den inhoud van BDCE, en doet men dit, gelijktijdig c van teeken latende veranderen, dan komt de formule voor FCDB voor den dag.

Noemt men l de loodlijn uit M op het vlak BDE, dan is $c \sin \phi = l$, $c \cos \phi = \sqrt{(c^2 - l^2)}$, Stellen wij dit kortheidshalve $= m$ en $\sqrt{(R^2 - c^2)} = h$, dan laat de uitkomst zich ook aldus schrijven

$$^1/_3 lmh - {}^1/_3 l (3R^2 - l^2) \text{ boogtg.} \frac{h}{m} + {}^2/_3 R^3 \text{ boogtg.} \frac{hl}{Rm} .$$

Wat de beide boogtangenten betreft, deze laten zich op eenvoudige wijze in hoeken, in de figuur voorkomend uitdrukken. De boog tg $\frac{h}{m}$ is niets anders dan de tweevlakkige hoek DMGC, die wij α zullen noemen.

Verder is $\frac{l}{m} = \text{tg}\,\phi = \cot \text{CMG}$, $\frac{h}{R} = \sin \text{CMD}$, dus

$$\frac{l}{m} \times \frac{h}{R} = \cot \text{CMG} \sin \text{CMD} = \cot \text{CMDG}.$$

Noemen wij dus den tweevlakkigen hoek CMDG $= \mu$, dan is

$$\text{boogtg.} \frac{hl}{Rm} = {}^1/_2 \pi - \mu.$$

De uitkomst kan dus ook in dezen vorm geschreven worden:

$$^1/_3\, lmh - {}^1/_3 l (3R^2 - l^2)\, \alpha + {}^1/_3 \pi R^3 - {}^2/_3 R^3 \mu \quad . \quad . \quad f)$$

3. Het gemeenschappelijk deel van drie elkaar snijdende bollen bestaat nu uit zes zulke schuitvormige lichamen, als waarvan de uitdrukking e) of f) den inhoud voorstelt. Zij hebben twee aan twee dezelfde R, twee aan twee dezelfde m en α en alle zes dezelfde h. Alleen l en μ zijn voor alle zes verschillend. Laat namelijk fig. 3 de doorsnede van de drie bollen voorstellen met het vlak dat door de drie middelpunten gaat, A, B, C zijn de middelpunten, FE, GE en HE

de drie machtlijnen, AI, BK en CL de drie stralen door het machtpunt E getrokken, S, T en U de snijpunten van de machtlijnen met de verbindingslijnen der middelpunten. D is een der (niet geteekende) snijpunten van de drie bollen en heeft zijn projectie in E. Wij stellen verder AI = P, BK = Q,

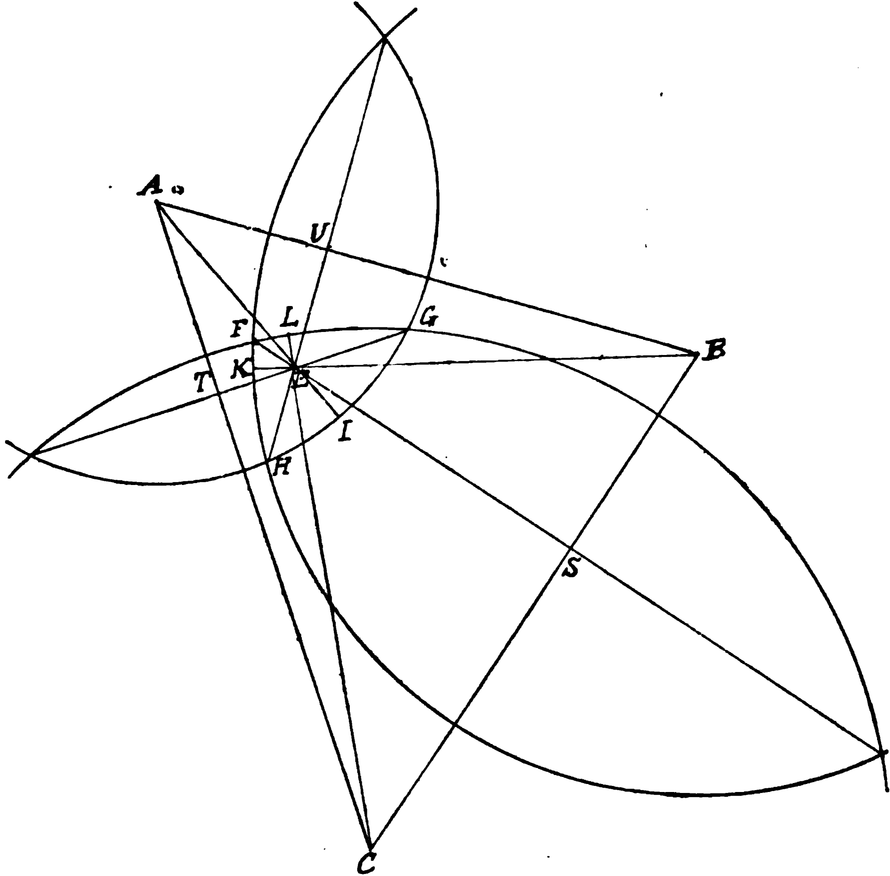


Fig. 3.

CL = R, BC = a, CA = b, AB = c, ES = m_1, ET = m_2, EU = m_3, BS = l_1, CS = l_1', CT = l_2, AT = l_2', AU = l_3, BU = l_3'. De tweevlakkige hoeken DBCE, DACE en DABE stellen wij achtereenvolgens door α, β, γ voor. De tweevlakkige hoeken CADB, ABDC,

BCDA mogen in deze volgorde μ, ν, ρ heeten. De deelen waarin μ door het loodrechte vlak AED verdeeld wordt noemen wij CADE $= \mu_1$, BADE $= \mu_2$, en even zoo ABDE $= \nu_1$, CBDE $= \nu_2$, BCDE $= \rho_1$, ACDE $= \rho_2$.

De zes deelen, waarin het gemeenschappelijk deel der drie bollen verdeeld wordt, teekenen zich op het vlak van teekening af als EIG, EIH, EKH, EKF, ELF, ELG en hebben volgens f) in deze volgorde tot inhoud:

$$\begin{aligned}
&{}^1/_3 m_2 l_2' h - {}^1/_3 l_2' (3P^2 - l_2'^2)\,\beta + {}^1/_3 \pi P^3 - {}^2/_3 P^3 \mu_2\,,\\
&{}^1/_3 m_3 l_3 h - {}^1/_3 l_3 (3P^2 - l_3^2)\,\gamma + {}^1/_3 \pi P^3 - {}^2/_3 P^3 \mu_1\,,\\
&{}^1/_3 m_3 l_3' h - {}^1/_3 l_3' (3Q^2 - l_3'^2)\,\gamma + {}^1/_3 \pi Q^3 - {}^2/_3 Q^3 \nu_1\,,\\
&{}^1/_3 m_1 l_1 h - {}^1/_3 l_1 (3Q^2 - l_1^2)\,\alpha + {}^1/_3 \pi Q^3 - {}^2/_3 Q^3 \nu_2\,,\\
&{}^1/_3 m_1 l_1' h - {}^1/_3 l_1' (3R^2 - l_1'^2)\,\alpha + {}^1/_3 \pi R^3 - {}^2/_3 R^3 \rho_1\,,\\
&{}^1/_3 m_2 l_2 h - {}^1/_3 l_2 (3R^2 - l_2)\,\beta + {}^1/_3 \pi R^3 - {}^2/_3 R^3 \rho_2.
\end{aligned}$$

Bij de optelling van deze zes grootheden laten zich nog verschillende termen samenvoegen. De zes eerste termen leveren te zamen den dubbelen inhoud van het viervlak ABCD. De zes laatste termen kunnen twee aan twee worden samengevoegd, en leveren dan op

$$- {}^2/_3 (P^3\mu + Q^3\nu + R^3\rho).$$

De zes derde termen geven ${}^2/_3 \pi(P^3 + Q^3 + R^3)$. In de zes tweede termen eindelijk kunnen de verschillende l vrij eenvoudig in de zes ribben van het viervlak ABCD worden uitgedrukt. Men vindt dan bijv. voor de coefficient van β

$$-\frac{3(P^2 - R^2)^2 + 6b^2(P^2 + R^2) - b^4}{12b}.$$

Noemt men dus V den gezochten inhoud, I die van het viervlak ABCD, dan is

$$\left.\begin{aligned}
V = 2I + {}^2/_3 \pi(P^3 + Q^3 + R^3) - {}^2/_3 (P^3\mu + Q^3\nu + R^2\rho) -\\
-\frac{3(Q^2-R^2)^2+6a^2(Q^2+R^2)-a^4}{12a}\,\alpha - \frac{3(R^2-P^2)^2+6b^2(R^2+P^2)-b^4}{12b}\,\beta -\\
-\frac{3(P^2-Q^2)^2+6c^2(P^2+Q^2)-c^4}{12c}\,\gamma
\end{aligned}\right\} \quad 4)$$

waardoor V is uitgedrukt in den inhoud, de zes ribben, en de zes tweevlakkige hoeken van het viervlak ABCD.

Als E buiten den driehoek ABC ligt, kan het gebeuren, dat sommige van de zes deelen, waaruit het gemeenschappelijk deel bestaat, niet analoog zijn aan het deel BADC van den bol MA (fig. 2) maar aan een der andere deelen van den bol, dus een der deelen waarvan de tweevlakkige hoek stomp is, of op welks oppervlak het middelpunt gelegen is. Van de hoeken α, β en γ kunnen er dan een of twee stomp zijn, van de hoeken μ_1, μ_2, ν_1, ν_2, ρ_1 en ρ_2 kunnen er enkele negatief worden, ook de eerste term van f) kan voor enkele deelen het negatieve teeken krijgen, maar de einduitkomst 4) blijft in alle gevallen dezelfde.

Ligt het machtpunt van de drie groote cirkels buiten de bollen, dan is het gemeenschappelijk deel van geheel anderen aard. Men kan dan de volgende gevallen hebben.

1°. Twee bollen snijden elkaar volgens een cirkel, die geheel buiten den derden bol ligt. Het gemeenschappelijk deel is dan die derde bol zelf, hetzij in zijn geheel, hetzij verminderd met een of twee concaaf convex-lensvormige lichamen.

2°. Twee bollen liggen geheel binnen den derden en snijden elkaar volgens een cirkel. Het gemeenschappelijk deel is dan het biconvex-lensvormige stuk, dat aan beide gemeen is.

3°. De kleinste bol ligt geheel binnen den naastgrooteren, en deze binnen den grootsten. Het gemeenschappelijk deel is dan natuurlijk de kleinste bol.

D 1 b γ

SUR LA SOMMATION D'UNE SÉRIE INFINIE,

PAR

W. KAPTEYN.
(Utrecht).

Je me propose de déterminer la somme de la série

$$\sum_{2.4}^{\infty} nI_n(\alpha)\, I_n(x),$$

où I_n représente la fonction cylindrique de première espèce.

En introduisant la valeur connue, n étant un nombre pair,

$$I_n(x) = \underset{0}{\mathcal{E}} \frac{e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t} t^n ,$$

on a

$$\sum_{2.4}^{\infty} I_n(x) \sin n\phi = \underset{0}{\mathcal{E}} \frac{e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t} (t^2 \sin 2\phi + t^4 \sin 4\phi + ..)$$

Or,

$$t^2 \sin 2\phi + t^4 \sin 4\phi + .. = \frac{t^2 \sin 2\phi}{1 - 2t^2 \cos 2\phi + t^4} (t < 1);$$

par suite

$$\sum_{2.4}^{\infty} I_n(x) \sin n\phi = \underset{0}{\mathcal{E}} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} tQ ,$$

où

$$Q = \frac{\sin 2\phi}{1 - 2t^2 \cos 2\phi + t^4}.$$

En différentiant l'équation précédente on aura

$$\sum_{2.4}^{\infty} nI_n(x) \cos n\phi = \underset{0}{\mathcal{E}} e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} t \frac{\partial Q}{\partial \phi}.$$

Si maintenant on multiplie cette équation par $\frac{1}{\pi}\cos(\alpha \sin\phi)\partial\phi$ et si l'on intégre ensuite entre les limites 0 et α, on obtient

$$\sum_{2,4}^{\infty} n I_n(x) I_n(n) = \frac{1}{\pi} \mathop{\mathcal{E}}_0 e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} t \int_0^{\pi} \frac{\partial Q}{\partial\phi} \cos(\alpha \sin\phi)\, \alpha\phi$$

$$= \frac{\alpha}{\pi} \mathop{\mathcal{E}}_0 e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} t \int_0^{\pi} Q \sin(\alpha \sin\phi) \cos\phi d\phi.$$

Posons, pour réduire la dernière intégrale

$$u = \int_0^{\pi} \frac{\sin 2\phi \cos\phi \sin(\alpha \sin\phi)}{1 - 2t^2 \cos 2\phi + t^4} d\phi;$$

alors on déterminera aisément une équation différentielle à laquelle satisfait cette intégrale. En effet, on aura

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_0^{\pi} \frac{\sin 2\phi \cos\phi \cos(\alpha \sin\phi)}{1 - 2t^2 \cos 2\phi + t^4} \sin\phi d\phi,$$

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} = -\int_0^{\pi} \frac{\sin 2\phi \cos\phi \sin(\alpha \sin\phi)}{1 - 2t^2 \cos^2\phi + t^4} \sin^2\phi d\phi$$

et parce que

$$\sin^2\phi = \frac{1 - 2t^2 \cos^2\phi + t^4}{4t^2} - \frac{(1-t^2)^2}{4t^2},$$

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} - m^2 u = -\frac{1}{4t^2} \int_0^{\pi} \sin 2\phi \cos\phi \sin(\alpha \sin\phi)\, d\phi,$$

où

$$m = \frac{1-t^2}{2t}.$$

En remarquant que

$$\sin 2\phi \cos\phi = \tfrac{1}{2}(\sin 3\phi + \sin\phi),$$

le second membre de l'équation différentielle prendra la forme

$$-\frac{\pi}{8t^2}[I_3(\alpha) + I_1(\alpha)] = -\frac{\pi I_2(\alpha)}{2t^2\alpha},$$

par suite

$$\frac{d^2u}{d\alpha^2} - m^2u = -\frac{\pi I_2(\alpha)}{2t^2\alpha}.$$

L'intégrale particulière de cette équation que nous cherchons remplit les conditions suivantes: pour $\alpha = 0$, $u = 0$ et pour la même valeur de α

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_0^\pi \frac{\sin 2\phi \cos\phi \sin\phi}{1 - 2t^2\cos 2\phi + t^4} d\phi$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \frac{(1 - \cos 2x)\, dx}{1 - 2t^2 \cos x + t^4}$$

$$= \frac{\pi}{4}.$$

D'après Cauchy, l'intégrale générale s'ecrit

$$u = Ae^{m\alpha} + Be^{-m\alpha} - \frac{\pi}{4mt^2}\int_0^\alpha [e^{m(\alpha-\beta)} - e^{-m(\alpha-\beta)}]\frac{I_2(\beta)}{\beta} d\beta,$$

A et B désignant des constantes arbitraires. En introduisant les conditions précédentes, l'intégrale cherchée prend la forme

$$u = \frac{\pi}{8m}(e^{m\alpha} - e^{-m\alpha}) - \frac{\pi}{4mt^2}\int^\alpha [e^{m(\alpha-\beta)} - e^{-m(\alpha-\beta)}]\frac{I_2(\beta)}{\beta} d\beta.$$

Avec cette valeur, le second membre de l'équation

$$\sum_{2.4}^{\infty} nI_n(\alpha)\, I_n(x) = \frac{\alpha}{\pi} \mathcal{E}_0\, e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} tu$$

se réduit à

$$\frac{\alpha}{\pi}\mathcal{E}_0 \frac{t^2}{1-t^2}[e^{\frac{x-\alpha}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} - e^{\frac{x+\alpha}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}]$$

$$-\frac{\alpha}{2}\mathcal{E}_0 \frac{1}{1-t^2}\int_0^\alpha \frac{I_2(\beta)}{\beta} d\beta\, [e^{\frac{x-\alpha+\beta}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} - e^{\frac{x+\alpha-\beta}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}]$$

$$= \frac{\alpha}{\pi}[I_3(x+\alpha) - I_3(x-\alpha) + I_5(x+\alpha) - I_5(x-\alpha) + \ldots]$$

$$-\frac{\alpha}{\pi}\int_0^\alpha \frac{I_2(\beta)}{\beta} d\beta [I_1(x+\alpha-\beta) - I_1(x-\alpha+\beta) + I_3(x+\alpha-\beta) - I_3(x-\alpha+\beta) \ldots].$$

Pour simplifier ce résultat nous remarquerons que la différentiation conduit à

$$\sum_{2.4}^{\infty} n\mathrm{I}_n(\alpha)\frac{d\mathrm{I}_n(x)}{dx} = \frac{\alpha}{8}\left[\mathrm{I}_2(x+\alpha) - \mathrm{I}_2(x-\alpha)\right]$$

$$-\frac{\alpha}{4}\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{I}_2(\beta)}{\beta}\left[\mathrm{I}_0(x+\alpha-\beta) - \mathrm{I}_0(x-\alpha+\beta)\right]d\beta.$$

Or, d'après une formule connue

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{I}_2(x+\alpha) = \int_0^{x+\alpha}\mathrm{I}_0(x+\alpha-\beta)\frac{\mathrm{I}_2(\beta)}{\beta}d\beta,$$

$$\tfrac{1}{2}\mathrm{I}_2(x-\alpha) = \int_0^{x-\alpha}\mathrm{I}_0(x-\alpha-\beta)\frac{\mathrm{I}_2(\beta)}{\beta}d\beta$$

$$= \int_0^{\alpha-x}\mathrm{I}_0(x-\alpha+\beta)\frac{\mathrm{I}_2(\beta)}{\beta}d\beta,$$

par suite

$$\sum_{2.4}^{\infty} n\mathrm{I}_n(\alpha)\frac{d\mathrm{I}_n(x)}{dx} = \frac{\alpha}{4}\left[\int_{\alpha}^{\alpha+x}\mathrm{I}_0(x+\alpha-\beta)\frac{\mathrm{I}_2(\beta)}{\beta}d\beta + \int_{\alpha-x}^{\alpha}\mathrm{I}_0(x-\alpha+\beta)\frac{\mathrm{I}_2(\beta)}{\beta}d\beta\right]$$

$$= \frac{\alpha}{4}\int_0^{x}\mathrm{I}_0(x-\gamma)\left[\frac{\mathrm{I}_2(\alpha+\gamma)}{\alpha+\gamma} + \frac{\mathrm{I}_2(\alpha-\gamma)}{\alpha-\gamma}\right]d\gamma,$$

d'où enfin, en intégrant entre les limites 0 et x,

$$\sum_{2.4}^{\infty} n\mathrm{I}_n(\alpha)\mathrm{I}_n(x) = \frac{\alpha}{4}\int_0^{x}dx\int_0^{x}\mathrm{I}_0(x-\gamma)\left[\frac{\mathrm{I}_2(\alpha+\gamma)}{\alpha+\gamma} + \frac{\mathrm{I}_2(\alpha-\gamma)}{\alpha-\gamma}\right]d\gamma.$$

En comparant les valeurs de u

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin 2\phi\cos\phi\sin(\alpha\sin\phi)\,d\phi}{1-2t^2\cos 2\phi+t^4} = \frac{\pi}{8m}\left(e^{ma}-e^{-ma}\right) -$$

$$-\frac{\pi}{4mt^2}\int_0^{\pi}\left[e^{m(a-\beta)}-e^{-m(a-\beta)}\right]\frac{\mathrm{I}_2(\beta)}{\beta}d\beta,$$

on obtient encore une formule intéressante. En effet, en substituant $t=1$, on a $m=0$

$$\left(\frac{e^{m\alpha}-e^{-m\alpha}}{m}\right)_{m=0}=2\alpha\,,$$

$$\left(\frac{e^{m(\alpha-\beta)}-e^{-m(\alpha-\beta)}}{m}\right)_{m=0}=2\,(\alpha-\beta),$$

par suite

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos^2\phi\sin(\alpha\sin\phi)\,d\phi}{\sin\phi}=\frac{\alpha}{2}-\int_0^{\alpha}(\alpha-\beta)\frac{I_2(\beta)}{\beta}\,d\beta.$$

Or, en introduisant

$$\alpha-\beta=2\,[I_1(\alpha-\beta)+3I_3(\alpha-\beta)+5I_5(\alpha-\beta)+\ldots]$$

et remarquant que

$$\int_0^{\alpha}I_n(\alpha-\beta)\frac{I_2(\beta)}{\beta}\,d\beta=\frac{I_{n+2}(\alpha)}{2}\,,$$

le second membre prend la forme

$$\frac{\alpha}{2}-(I_3+3I_5+5I_7+\ldots),$$

ou, parce que

$$\frac{\alpha}{2}=I_1+3I_3+5I_5+\ldots,$$

la forme

$$I_1+2I_3+2I_5\ldots$$

De cette manière on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int^{\pi}\frac{\cos^2\phi\sin(\alpha\sin\phi)\,d\phi}{\sin\phi}=I_1+2I_3+2I_5+\ldots$$

En transformant le premier membre de cette équation de la manière suivante

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(1-\sin^2\phi)\sin(\alpha\sin\phi)\,d\phi}{\sin\phi}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(\alpha\sin\phi)\,d\phi}{\sin\phi}-I_1,$$

il vient

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(\alpha\sin\phi)\,d\phi}{\sin\phi}=2\,[I_1+I_3+I_5+\ldots],$$

ce qui s'accorde avec la formule de Lommel

$$2\,(I_1+I_3+I_5+\ldots)=\int_0^{\alpha}I_0(z)\,dz.$$

M[1] 8 g

IETS OVER AUTOPOLAIRE KROMMEN EN OPPERVLAKKEN,

DOOR

P. ZEEMAN.

(Leiden.)

1. Autopolaire krommen zijn krommen, welke door eene polaire transformatie, ten opzichte eener kegelsnede k_2, in zich zelf getransformeerd worden. De poollijn (ten opzichte van k_2) van een willekeurig punt A op zulk eene kromme zal dus raaklijn zijn dier kromme in een punt B, terwijl omgekeerd de poollijn van B moet samenvallen met de raaklijn der kromme in A.

Evenzoo zijn autopolaire oppervlakken, die oppervlakken, welke door eene polaire transformatie, ten opzichte van een kwadratisch oppervlak O_2 in zich zelf getransformeerd worden. Het poolvlak (ten opzichte van O_2) van een willekeurig punt A op zulk een oppervlak zal dus dit oppervlak in een zeker punt B moeten raken, terwijl omgekeerd het poolvlak van B moet samenvallen met het raakvlak aan 't oppervlak in A.

Omtrent dergelijke autopolaire krommen en oppervlakken kan men zich o. a. de volgende vragen stellen:

1e. Gegeven is eene kegelsnede (een kwadratisch oppervlak). Te bepalen alle krommen (oppervlakken), die ten opzichte van deze kegelsnede (dit kwadratische oppervlak) autopolair zijn.

2e. Gegeven is eene kromme (een oppervlak). Te bepalen alle kwadratische krommen (oppervlakken), ten opzichte van welke deze kromme (dit oppervlak) autopolair is.

In het volgende worden enkele opmerkingen over beide vragen, doch voornamelijk over de tweede gemaakt.

2. Opdat eene kromme k_n (wij beperken ons tot algebraische krommen) autopolair kan zijn ten opzichte eener kegelsnede k_2,

moet zij aan zekere voorwaarden voldoen. Is toch die kromme van den graad n, de klasse m en heeft zij d dubbel- en k keerpunten, dan zal de reciproke poolkromme van k_n van den graad m, de klasse n zijn, terwijl zij d dubbel- en k buigraaklijnen heeft. Zal dus k_n samenvallen met die reciproke poolkromme, dan moeten graad en klasse even groot zijn, terwijl het aantal der dubbelpunten met dat der dubbelraaklijnen, het aantal der keerpunten met dat der buigraaklijnen moet overeenstemmen. Volgens de bekende formules van PLÜCKER:

$$m = n(n-1) - 2d - 3k, \quad i = 3n(n-2) - 6d - 8k \text{ enz.}$$

heeft men nu als $m = n$ is:

$$2d + 3k = n(n-2), \quad i = k, \quad \tau = d.$$

Zijn dus graad en klasse der kromme k_n even groot, dan zal het aantal der dubbelpunten gelijk zijn aan dat der dubbelraaklijnen, enz. Als voorwaarde, waaraan k_n moet voldoen opdat zij autopolair kan zijn ten opzichte eener kegelsnede, hebben wij dus, dat graad en klasse dier kromme even groot moeten zijn. Is echter aan die voorwaarde voldaan, dan moet nog worden onderzocht of werkelijk kegelsneden kunnen gevonden worden, ten opzichte van welke k_n autopolair is.

Zij nu ten eerste de kromme zelve eene kegelsnede, bijv. de cirkel $x^2 + y^2 - R^2 = 0$. Eene kegelsnede k_2, ten opzichte van welke de cirkel autopolair is, moet met dien cirkel een dubbele aanraking hebben. Is toch A een punt, gemeen aan de beide krommen, dan zal de poollijn van A, d. i. de raaklijn in A aan k_2 den cirkel ergens moeten raken. Die aanraking nu moet in A plaats vinden, wijl anders die raaklijn drie punten met den cirkel gemeen zou hebben. De vergelijking van k_2 is derhalve van den vorm:

$$x^2 + y^2 - R^2 + \lambda(ax + by + c)^2 = 0$$

waarin a, b en c willekeurige constanten zijn. Nu moet de poollijn van een punt (x_1y_1) op den cirkel samenvallen met de raaklijn in een punt (x_2y_2) dier kromme; de beide vergelijkingen:

$$X\{x_1 + a\lambda(ax_1 + by_1 + c)\} + Y\{y_1 + b\lambda(ax_1 + by_1 + c)\} +$$
$$+ \{-R^2 + c\lambda(ax_1 + by_1 + c)\} = 0$$

$$Xx_2 + Yy_2 - R^2 = 0$$

moeten dus identiek zijn, waaruit volgt:

$$\frac{x_2}{x_1+a\lambda(ax_1+by_1+c)}=\frac{y_2}{y_1+b\lambda(ax_1+by_1+c)}=\frac{-R^2}{-R^2+c\lambda(ax_1+by_1+c)} \quad (2)$$

wijl: $x_2^2+y_2^2-R^2=0$ is, moet dan ook

$$R^2\{x_1+a\lambda(ax_1+by_1+c)\}^2+R^2\{y_1+b\lambda(ax_1+by_1+c)\}^2- \\ -\{-R^2+c\lambda(ax_1+by_1+c)\}^2=0$$

zijn, waaruit volgt:

$$2R^2+\{R^2(a^2+b^2)-c^2\}\lambda=0$$

of:

$$\lambda=-\frac{2R^2}{R^2(a^2+b^2)-c^2}.$$

De cirkel: $x^2+y^2-R^2=0$ is derhalve autopolair ten opzichte van alle kegelsneden, bepaald door de vergelijking:

$$2R^2(ax+by+c)^2-\{(a^2+b^2)R^2-c^2\}\{x^2+y^2-R^2\}=0 \quad (3).$$

Wijl door eene projectieve transformatie de cirkel in elke andere kegelsnede k_2 kan worden omgezet en daarbij dan tevens de kegelsneden, bepaald door de vergelijking (3) getransformeerd worden in kegelsneden, ten opzichte van welke k_2 autopolair is, heeft men dus in 't algemeen, wijl in die vergelijking (3) twee willekeurige parameters $\frac{a}{c}$ en $\frac{b}{c}$ optreden:

Eene kegelsnede k_2 is autopolair ten opzichte van ∞^2 kegelsneden, die elk met k_2 eene dubbele aanraking hebben.

Hieruit is door Appell een middel afgeleid, om alle krommen te verkrijgen, die ten opzichte van de kegelsnede k_2 autopolair zijn. Neemt men tusschen de parameters $\frac{a}{c}$ en $\frac{b}{c}$, welke in (3) optreden, eene willekeurige betrekking aan, m. a. w. neemt men uit het stelsel der ∞^2 kegelsneden een stelsel van ∞^1 dier kegelsneden, dan zal de omhullende dezer krommen eene nieuwe kromme zijn, die autopolair is ten opzichte van k_2 en op deze wijze kunnen alle dergelijke krommen worden verkregen. [1])

Nemen wij ten tweede eene kromme van den derden graad.

[1]) Appell, Nouvelles Annales de Mathématiques, 3e Série. T. XIII. 1894.

Zal deze autopolair kunnen zijn ten opzichte eener kegelsnede, dan moet zij van de derde klasse zijn en dus een keerpunt hebben; zij heeft dan tevens één buigpunt. Zij nu de vergelijking dier kromme in homogeene coördinaten:

$$x_1^3 - x_2^2 x_3 = 0$$

waar $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ het keerpunt, $x_2 = 0$ de raaklijn in het keerpunt, $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ het buigpunt en $x_3 = 0$ de buigraaklijn zal zijn. Wijl door de polaire transformatie ten opzichte van k_2 het buigpunt in de raaklijn in 't keerpunt en dit laatste in de buigraaklijn moet worden getransformeerd, zal de driehoek, welks zijden zijn $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ een pooldriehoek van k_2 moeten zijn en dus de vergelijking dezer kromme van den vorm:

$$AX_1^2 + BX_2^2 + CX_3^2 = 0.$$

De poollijn van het punt x_1, x_2, x_3 der gegeven kromme valle nu samen met de raaklijn in y_1, y_2, y_3, dan moeten

$$AX_1 x_1 + BX_2 x_2 + CX_3 x_3 = 0$$

en:

$$3X_1 y_1^2 - 2X_2 y_2 y_3 - X_3 y_2^2 = 0$$

identiek zijn en dus:

$$\frac{Ax_1}{3y_1^2} = \frac{Bx_2}{-2y_2 y_3} = \frac{Cx_3}{-y_2^2}.$$

Elimineert men hieruit en uit $x_1^3 - x_2^2 x_3 = 0$, x_1, x_2 en x_3 dan verkrijgt men, wijl ook $y_1^3 - y_2^2 y_3 = 0$ is:

$$-\frac{4}{B^2C} = \frac{27}{A_3}$$

als betrekking, welke tusschen de coëfficiënten A, B en C moet bestaan. Stelt men $\frac{B}{A} = \lambda$, en dus $\frac{C}{A} = -\frac{4}{27}\lambda^2$, dan verkrijgt men dat de gegeven kubische kromme autopolair is ten opzichte van alle kegelsneden, bepaald door de vergelijking:

$$X_1^2 + \lambda X_2^2 - \frac{4}{27\lambda^2} X_3^2 = 0,$$

derhalve:

Elke kubische kromme van de derde klasse is autopolair ten

opzichte van ∞^1 kegelsneden. Voor elk dezer kegelsneden is de driehoek, gevormd door de raaklijnen in het keerpunt en het buigpunt, benevens de verbindingslijn dezer punten een pooldriehoek. Door een willekeurig punt van 't vlak gaan drie dezer kegelsneden.

Het laatste volgt daaruit, dat in de vergelijking dier krommen, de parameter λ tot de derde macht optreedt.

Overgaande tot krommen van den vierden graad, hebben wij reeds boven gevonden, dat zal zulk eene kromme autopolair kunnen zijn ten opzichte eener kegelsnede, $2d + 3k = 8$ moet zijn. De kromme moet dus vier dubbelpunten, of één dubbelpunt en twee keerpunten hebben. Laten wij het eerste geval, in 't welk de bikwadratische kromme in twee kegelsneden ontaardt, buiten beschouwing en onderzoeken wij alleen het laatste. Daartoe gaan wij uit van de kromme, welker vergelijking ten opzichte van rechthoekige coördinaten is:

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2).$$

Deze kromme, de limaçon van Pascal, heeft twee keerpunten in de imaginaire cirkelpunten in 't oneindige; de raaklijnen in die keerpunten zijn de lijnen $y = \pm\, i(x - a)$. Verder heeft zij een dubbelpunt in den oorsprong, met de beide lijnen $(4a^2 - b^2)x^2 - - b^2y^2 = 0$ tot raaklijnen in dat dubbelpunt, terwijl zij in de punten $x = \frac{(8a^2 + b^2)(4a^2 - b^2)}{9ab^2}$, $y = \pm \frac{4a^2 - b^2}{9ab^2} \sqrt{(16a^2 - b^2)(4a^2 - b^2)}$ buigpunten heeft. Eindelijk heeft zij een dubbelraaklijn $x = -\frac{b^2}{8a}$; de raakpunten op deze lijn worden bepaald door $y = \pm \frac{b}{8a} \sqrt{16a^2 - b^2}$.

Zal nu deze kromme autopolair zijn ten opzichte eener kegelsnede k_2, dan moet, wijl de kromme symmetrisch is ten opzichte van OX, ook de kegelsnede symmetrisch t/o van deze lijn zijn: haar vergelijking is dus van den vorm:

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + F = 0.$$

In de polaire transformatie ten opzichte dezer kegelsnede moeten nu de buigpunten getransformeerd worden in de raaklijnen in de keerpunten, het dubbelpunt en de beide raaklijnen in dat punt in de dubbelraaklijn en de beide raakpunten dier lijn. Drukt men dit uit, door aan te geven dat de poollijnen

der buigpunten samenvallen met de raaklijnen in de keerpunten, enz., dan vindt men:

$$\frac{F}{D} = \frac{b^2}{8a}, \quad \frac{A}{D} = -\frac{32a^2 + b^2}{8a(4a^2 - b^2)} : \quad \frac{C}{D} = \pm \frac{(16a^2 - b^2)^{3/2}}{8a(4a^2 - b^2)^{3/2}}.$$

Daaruit volgt, dat er slechts twee kegelsneden zijn, ten opzichte van welke de limaçon van Pascal autopolair is. Ten opzichte van elk dier kegelsneden toch wordt keze kromme, door de polaire transformatie omgezet in eene bikwadratische kromme, die met haar de buigpunten, de keerpunten, het dubbelpunt, benevens de raaklijnen in die punten, verder de dubbelraaklijn en de raakpunten op die lijn gemeen heeft. De reciproke poolkromme heeft dus meer dan zestien punten met de limaçon van Pascal gemeen; zij zal daarmede geheel samenvallen. Wijl de onderzochte bikwadratische kromme door eene projectieve transformatie in elke andere bikwadratische kromme met twee keerpunten en één dubbelpunt kan worden omgezet en de kegelsneden, ten opzichte van welke de eerste autopolair is, daarbij getransformeerd worden in kegelsneden, ten opzichte van welke de getransformeerde kromme dezelfde eigenschap bezit, heeft men:

Elke bikwadratische kromme, die twee keerpunten en één dubbelpunt heeft, is autopolair ten opzichte van twee kegelsneden.

Gaan wij nu ten slotte over tot krommen van hoogeren dan den vierden graad, dan blijkt spoedig dat, wanneer wij als singulariteiten, die bij deze krommen optreden, alleen de meest eenvoudige, de dubbel- en keerpunten beschouwen, voor zulke krommen geene kegelsneden zijn aan te geven, ten opzichte van welke zij autopolair zijn. Zoo is eene kromme van den vijfden graad, die drie dubbel en drie keerpunten heeft, en dus van de vijfde klasse is, in 't algemeen niet autopolair ten opzichte van eenige kegelsnede. Laat men echter ook hoogere singulariteiten dan dubbel- en keerpunten toe, dan kunnen krommen van hoogeren graad wel autopolair zijn. Neemt men bijv. de kromme:

$$x^m y^n = a^{m+n}$$

waarin m en n positief ondersteld worden, dan hebben deze krommen van den $m+n^{en}$ graad en klasse de punten in 't oneindige der assen OX en OY achtereenvolgens tot n-voudig en m-voudig punt, terwijl de raaklijnen in die veelvoudige punten

alle met OX of OY samenvallen. Een eenvoudig onderzoek, geheel overeenkomende met dat, bij de kubische krommen ingesteld, leert hier dat de kromme $x^m y^n = a^{m+n}$ autopolair is ten opzichte van alle kegelsneden, bepaald door de vergelijkingen:

$$Ax^2 + Cy^2 - D = 0$$

mits tusschen de constanten A, C en D de betrekking:

$$a^{2(m+n)} \left(\frac{A}{D}\right)^m \left(\frac{C}{D}\right)^n = \frac{m^m \cdot n^n}{(m+n)^{m+n}}$$

bestaat. Elke dergelijke kromme is dus autopolair ten opzichte van ∞^1 kegelsneden. Behalve de boven gevonden bikwadratische krommen, die autopolair waren ten opzichte van slechts twee kegelsneden, zijn er dus nog andere bijv. $x^3 y = a^4$, die ten opzichte van ∞^1 kegelsneden autopolair zijn.

3. Voor oppervlakken kunnen wij een dergelijk onderzoek instellen. Nemen wij allereerst een kwadratisch oppervlak, bijv. de paraboloïde

$$xy = pz.$$

Zal deze autopolair zijn ten opzichte van het kwadratische oppervlak:

$$F(x, y, z) \equiv a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

dan moet, opdat het poolvlak van een punt x, y, z der paraboloïde ten opzichte van (4) samenvalt met het raakvlak in 't punt x_1, y_1, z_1 der paraboloïde:

$$\frac{y_1}{a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}} = \frac{x_1}{a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}} =$$

$$= \frac{-p}{a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34}} = \frac{-pz_1}{a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44}}$$

zijn. Daaruit volgt, wijl $x_1 y_1 = pz_1$ is:

$$p(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})(a_{12}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}) = \\ = (a_{13}x + a_{23}y + a_{33}z + a_{34})(a_{14}x + a_{24}y + a_{34}z + a_{44}).$$

De eenige betrekking, aan welke x, y en z enz. voldoen is $xy = pz$; hiermede moet dus de laatste vergelijking identiek

zijn. Dit geeft de volgende betrekkingen tusschen de, in (4) optredende coëfficienten :

$$\left.\begin{array}{l} pa_{11}a_{12} = a_{13}a_{14} \\ pa_{12}a_{22} = a_{23}a_{24} \\ pa_{13}a_{23} = a_{33}a_{34} \\ pa_{14}a_{24} = a_{34}a_{44} \end{array}\right\} (5), \quad \left.\begin{array}{l} p(a_{12}a_{23} + a_{13}a_{22}) = a_{23}a_{34} + a_{33}a_{24} \\ p(a_{11}a_{23} + a_{12}a_{13}) = a_{13}a_{34} + a_{14}a_{33} \\ p(a_{11}a_{24} + a_{13}a_{14}) = a_{13}a_{44} + a_{14}a_{34} \\ p(a_{12}a_{24} + a_{22}a_{14}) = a_{23}a_{44} + a_{24}a_{34} \end{array}\right\} (6)$$

en :

$$p^2(a_{11}a_{22} + a_{12}^2) = a_{33}a_{44} + a_{24}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7).$$

Lost men a_{14}, a_{24}, a_{34} en a_{44} uit (5) op, dan verkrijgt men:

$$a_{14} = p\,\frac{a_{11}a_{12}}{a_{13}}, \qquad a_{24} = p\,\frac{a_{12}a_{22}}{a_{23}}, \qquad a_{34} = p\,\frac{a_{13}a_{23}}{a_{33}},$$

$$a_{44} = p\,\frac{a_{14}a_{24}}{a_{34}} = p^2a_{11}a_{22}a_{33}\,\frac{a_{12}^2}{a_{13}^2a_{23}^2}.$$

Substitueert men dit in (6) en (7), dan gaan daardoor deze betrekkingen over in :

$$\left.\begin{array}{r} (a_{23}^2 - a_{22}a_{33})(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}) = 0 \\ (a_{13}^2 - a_{11}a_{33})(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}) = 0 \\ (a_{23}^2 - a_{22}a_{33})(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}) = 0 \\ (a_{13}^2 - a_{11}a_{33})(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}) = 0 \\ (a_{13}^2a_{23}^2 - a_{11}a_{22}a_{33}^2)(a_{12}^2a_{33}^2 - a_{13}^2a_{23}^2) = 0 \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Aan deze vergelijkingen wordt ten eerste voldaan door

$$a_{13}^2 = a_{11}a_{33}, \quad a_{23}^2 = a_{22}a_{33}.$$

Dan wordt:

$$a_{14} = pa_{12}\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{33}}}, \quad a_{24} = pa_{12}\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{33}}}, \quad a_{34} = p\sqrt{a_{11}a_{22}}, \quad a_{44} = p^2\,\frac{a_{12}^2}{a_{33}}$$

en dus de vergelijking van een kwadratisch oppervlak, ten opzichte waarvan de gegeven paraboloïde $xy = pz$ autopolair is,

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2\sqrt{a_{22}a_{33}}\,yz + 2\sqrt{a_{11}a_{33}}\,zx + 2a_{12}xy +$$
$$+ 2pa_{12}\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{33}}}\,x + 2pa_{12}\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{33}}}\,y + 2p\sqrt{a_{11}a_{22}}\,z + p^2\,\frac{a_{12}^2}{a_{33}} = 0,$$

d. i.

$$\left(\sqrt{a_{11}}\,x + \sqrt{a_{22}}\,y + \sqrt{a_{33}}\,z + \frac{pa_{12}}{\sqrt{a_{33}}}\right)^2 + 2(a_{12} - \sqrt{a_{11}a_{22}})(xy - pz) = 0 \quad (9).$$

Op deze wijze verkrijgt men derhalve ∞^3 *kwadratische oppervlakken, ten opzichte van welke de paraboloïde autopolair is; elk dezer raakt dit oppervlak volgens eene kegelsnede aan.*

Aan de betrekkingen (8) wordt ook nog voldaan door:

$$a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23} = 0.$$

Voeren wij dit en de boven voor a_{14} enz. gevonden waarden in de vergelijking (4) in, dan gaat deze over in:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}} z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{12}xy +$$
$$+ 2p\frac{a_{11}a_{12}}{a_{13}} x + 2p\frac{a_{12}a_{22}}{a_{23}} y + 2pa_{12}z + p^2 a_{11}a_{22}\frac{a_{12}}{a_{13}a_{23}} = 0 \quad (10).$$

Elk dezer kwadratische oppervlakken heeft met de paraboloïde een scheeven vierhoek gemeen. Immers, de vergelijking van een kwadratisch oppervlak, dat met de paraboloïde de vier lijnen

$$x = \frac{p}{\lambda_1},\ y = \lambda_1 z;\ x = \frac{p}{\lambda_2},\ y = \lambda_2 z;\ x = \mu_1 z,\ y = \frac{p}{\mu_1} \text{ en } x = \mu_2 z,\ y = \frac{p}{\mu_2}$$

gemeen heeft is:

$$(\lambda_1 x + \mu_1 y - \lambda_1\mu_1 z - p)(\lambda_2 x + \mu_2 z - \lambda_2\mu_2 z - p) +$$
$$+ A(\lambda_2 x + \mu_1 y - \lambda_2\mu_1 z - p)(\lambda_1 x + \mu_2 y - \lambda_1\mu_2 z - p) = 0$$

en dit is identiek met (10), wanneer slechts

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}a_{22}},\ \lambda_1 + \lambda_2 = -2\frac{a_{23}}{a_{22}},\ \mu_1\mu_2 = \frac{a_{13}a_{23}}{a_{11}a_{12}},\ \mu_1 + \mu_2 = -2\frac{a_{13}}{a_{11}}$$

en $A = 1$ genomen wordt.

Er zijn dus nog ∞^4 *kwadratische oppervlakken, ten opzichte van welke de paraboloïde autopolair is; elk dezer heeft met dit oppervlak een scheeven vierhoek gemeen.* [1])

Wijl door eene projectieve transformatie de paraboloïde in elk ander kwadratisch oppervlak O_2 kan worden omgezet en daarbij de kwadratische oppervlakken, ten opzichte van welke zij autopolair is overgaan in oppervlakken ten opzichte van welke

---

[1]) Zie hierover: R. STURM „Ueber Collineationen und Correlationen," Math. Annalen, Bd. XXVI, 1886. Hier worden langs meetkundigen weg o. a alle algemeene reciproke transformaties bepaald, die een kwadratisch oppervlak in zich zelf transformeeren.

O_2 dezelfde eigenschap bezit, geldt het boven gevonden resultaat niet alleen voor die paraboloïde, doch voor elk willekeurig kwadratisch oppervlak.

4. Gaan wij verder uit van een kubisch oppervlak O_3. Zal dit autopolair zijn, dan moet het van de derde klasse zijn en dus òf een regelvlak òf een oppervlak zijn, dat drie biplanaire punten heeft. Behandelen wij eerst het laatste geval, dan kunnen wij ons die biplanaire punten denken in de punten in 't oneindige der coördinaatassen; de vergelijking van het oppervlak zal dan zijn van den vorm:

$$xyz = a^3.$$

Bij dit oppervlak treden ook drie bizondere raakvlakken op, nl. de coördinatenvlakken. Terwijl toch door eene willekeurige lijn der ruimte drie raakvlakken van 't oppervlak gaan, waarvan geene twee samenvallen, zullen van de raakvlakken, gaande door eene lijn in een der coördinatenvlakken gelegen, twee met dat coördinatenvlak samenvallen. Daaruit volgt, dat, zal het gegeven oppervlak autopolair zijn ten opzichte van een kwadratisch oppervlak O_2, door de polaire transformatie ten opzichte van O_2 de punten in 't oneindige der coördinaatassen moeten getransformeerd worden in de coördinatenvlakken en wel moet, zal O_2 niet ontaarden, het punt in 't oneindige eener as worden getransformeerd in 't coördinatenvlak, dat dit punt niet bevat. De vergelijking van O_2 moet dan zijn van den vorm:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - D = 0.$$

Wijl het poolvlak van een punt x, y, z op het kubische oppervlak moet samenvallen met het raakvlak in een ander punt x_1, y_1, z_1 van dat zelfde oppervlak, moeten tusschen die coördinaten de betrekkingen:

$$\frac{y_1 z_1}{Ax} = \frac{z_1 x_1}{By} = \frac{x_1 y_1}{Cz} = \frac{3a^3}{D},$$

bestaan. Daar verder zoowel x, y, z als x_1, y_1, z_1 aan de vergelijking van 't oppervlak voldoen, verkrijgt men, door eliminatie van die coördinaten, hieruit de betrekking tusschen de coëfficienten A . . . . D:

$$1 = 27 \frac{ABC}{D^3} a^6.$$

Stelt men $\frac{A}{D} = \lambda$, $\frac{B}{D} = \mu$ dan is $\frac{C}{D} = \frac{1}{27\lambda\mu}$ en dus de vergelijking van het oppervlak O_2

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + \frac{z^2}{27a^6\lambda\mu} = 1.$$

Elk kubisch oppervlak met drie biplanaire punten is dus autopolair ten opzichte van ∞^2 kwadratische oppervlakken. Voor elk dezer laatste oppervlakken is het viervlak, gevormd door het vlak der drie biplanaire punten en de raakvlakken, die door de verbindingslijnen dezer punten twee aan twee gaan, een poolviervlak.

Is het kubische oppervlak een regelvlak, dan kan, uitgezonderd voor het geval, dat men met een oppervlak van Cayley te doen heeft, de vergelijking van dit regelvlak steeds worden gebracht in den vorm:

$$x^2z - ay^2 = 0.$$

Op dezelfde wijze als boven vindt men dan, dat dit regelvlak autopolair is ten opzichte der ∞^2 kwadratische oppervlakken, bepaald door de vergelijking:

$$\lambda x^2 + \mu y^2 + z^2 - a^2\frac{\lambda^2}{\mu^2} = 0.$$

Daarbij wordt dan het punt x, y, z en het raakvlak in dit punt aan het kubische oppervlak door de polaire transformatie omgezet in het raakvlak in het punt x_1, y_1, z_1 en dat punt, waarbij:

$$xx_1 = \frac{2a\lambda}{\mu^2}, \quad yy_1 = -2a\frac{\lambda^2}{\mu^3}, \quad zz_1 = a\frac{\lambda^2}{\mu^2}.$$

Eindelijk wordt ook voor het regeloppervlak van Cayley, waarvan de vergelijking steeds herleid kan worden tot den vorm:

$$y^3 + x(xz + ay) = 0$$

gevonden, dat dit oppervlak autopolair is ten opzichte van ∞^2 kwadratische oppervlakken.

Van de oppervlakken van hoogeren dan den derden graad, noemen we alleen nog ten eerste de oppervlakken van Kummer. Dit zijn bikwadratische oppervlakken, met zestien conische punten en zestien bizondere raakvlakken, die elk het oppervlak volgens eene kegelsnede aanraken; deze oppervlakken zijn dus

ook van de vierde klasse. Zal zulk een oppervlak autopolair zijn ten opzichte van een kwadratisch oppervlak O_2, dan moeten door de polaire transformatie de conische punten in de singulaire raakvlakken en omgekeerd worden getransformeerd. Het aantal der oppervlakken O_2 zal dus zeker eindig zijn. Werkelijk vindt men bij het golfoppervlak van FRESNEL, dat als een bizonder geval van een oppervlak van KUMMER kan worden beschouwd, waarvan de vergelijking is:

$$(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)(x^2 + y^2 + z^2) -$$
$$- \{a^2(b^2 + c^2)x^2 + b^2(c^2 + a^2)y^2 + c^2(a^2 + b^2)z^2\} + a^2b^2c^2 = 0,$$

dat dit oppervlak autopolair is ten opzichte van de acht kwadratische oppervlakken:

$$\pm \frac{x^2}{bc} \pm \frac{y^2}{ca} \pm \frac{z^2}{ab} = 1.$$

Of iets dergelijks zich voordoet bij het algemeene oppervlak van KUMMER, wordt hier in 't midden gelaten.

Ten slotte noemen wij nog de oppervlakken, wier vergelijking van den vorm:

$$x^m y^n z^p = a^{m+n+p}$$

is, die alle autopolair zijn ten opzichte van ∞^2 kwadratische oppervlakken.

B 1 c

SUR UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS,

PAR

W. KAPTEYN.

(Utrecht.)

Dans cette note je me propose de démontrer qu'un déterminant d'ordre impair de la forme

$$\Delta = \begin{vmatrix} -r & a\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f\mu & -q & b\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e\mu & -p & c\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\mu & 0 & d\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c\mu & p & e\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b\mu & q & f\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a\mu & r \end{vmatrix}$$

se réduit à zéro. On remarquera que les éléments de la diagonale principale équidistants du centre sont égaux mais de signe contraire et qu'en outre tous les éléments excepté ceux des deux diagonales de part et d'autre de la diagonale principale sont absents. D'ailleurs les éléments des deux diagonales adjacentes de la diagonale principale, situés symétriquement par rapport au centre du déterminant sont dans un rapport constant.

Pour éviter des difficultés de notation je me contenterai de démontrer ce théorème pour le déterminant Δ du septième ordre.

Proposons nous de développer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_4 & 0 & e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_5 & e_5 & f_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_6 & f_6 & g_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f_7 & g_7 \end{vmatrix}$$

suivant les éléments des quatre premières colonnes. En combinant quatre à quatre et sans répétition les éléments de ces colonnes, on obtient les quatre déterminants du quatrième ordre

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & c_4 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_5 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_5 \end{vmatrix}.$$

Les mineurs correspondants du troisième ordre étant

$$\begin{vmatrix} e_5 & f_5 & 0 \\ e_6 & f_6 & g_6 \\ 0 & f_7 & g_7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} e_4 & 0 & 0 \\ e_6 & f_6 & g_6 \\ 0 & f_7 & g_7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e_6 & f_6 & g_6 \\ 0 & f_7 & g_7 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e_6 & f_6 & g_6 \\ 0 & f_7 & g_7 \end{vmatrix},$$

dont les deux derniers se reduisent à zéro, on aura

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & c_4 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_5 & f_5 & 0 \\ e_6 & f_6 & g_6 \\ 0 & f_7 & g_7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & d_5 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_4 & 0 & 0 \\ e_6 & f_6 & g_6 \\ 0 & f_7 & g_7 \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & b_2 & c_3 & d_3 \\ 0 & c_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_5 & f_5 & 0 \\ e_6 & f_6 & g_6 \\ 0 & f_7 & g_7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & e_4 & 0 & 0 \\ d_5 & e_5 & f_5 & 0 \\ 0 & e_6 & f_6 & g_6 \\ 0 & 0 & f_7 & g_7 \end{vmatrix}.$$

En introduisant dans les derniers facteurs des deux produits du second membre de cette équation

$$e_4 = c_4 \frac{\lambda}{\mu}, \qquad e_5 = -c_3, \qquad e_6 = c_2 \frac{\mu}{\lambda},$$

$$f_5 = b_3 \frac{\lambda}{\gamma}, \qquad f_6 = -b_2, \qquad f_7 = b_1 \frac{\mu}{\lambda},$$

$$g_6 = a_2 \frac{\lambda}{\mu}, \qquad g_7 = -a_1; \qquad d_5 = d_3 \frac{\mu}{\lambda},$$

on obtiendra

$$\begin{vmatrix} e_5 & f_5 & 0 \\ e_6 & f_6 & g_6 \\ 0 & f_7 & g_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c_3 & b_3 \frac{\lambda}{\mu} & 0 \\ c_2 \frac{\mu}{\lambda} & -b_2 & a_2 \frac{\lambda}{\mu} \\ 0 & b_1 \frac{\mu}{\lambda} & -a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\mu^3}{\lambda^3} \begin{vmatrix} -c_3 & b_3 \frac{\lambda}{\mu} & 0 \\ c_2 & -b_2 \frac{\lambda}{\mu} & a_2 \frac{\lambda^2}{\mu^2} \\ 0 & b_1 \frac{\lambda}{\mu} & -a_1 \frac{\lambda^2}{\mu^2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -c_3 & b_3 & 0 \\ c_2 & -b_2 & a_2 \\ 0 & b_1 & -a_1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$\begin{vmatrix} 0 & e_4 & 0 & 0 \\ d_5 & e_5 & f_5 & 0 \\ 0 & e_6 & f_6 & g_6 \\ 0 & 0 & f_7 & g_7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & c_4 \dfrac{\lambda}{\mu} & 0 & 0 \\ d_3 \dfrac{\mu}{\lambda} & -c_3 & b_3 \dfrac{\lambda}{\mu} & 0 \\ 0 & c_2 \dfrac{\mu}{\lambda} & -b_2 & a_2 \dfrac{\lambda}{\mu} \\ 0 & 0 & b_1 \dfrac{\mu}{\lambda} & -a_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\mu^6}{\lambda^6} \begin{vmatrix} 0 & c_4 \dfrac{\lambda}{\mu} & 0 & 0 \\ d_3 & -c_3 \dfrac{\lambda}{\mu} & b_3 \dfrac{\lambda^2}{\mu^2} & 0 \\ 0 & c_2 \dfrac{\lambda}{\mu} & -b_2 \dfrac{\lambda^2}{\mu^2} & a_2 \dfrac{\lambda^3}{\mu^3} \\ 0 & 0 & b_1 \dfrac{\lambda^2}{\mu^2} & -a_1 \dfrac{\lambda^3}{\mu^3} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & c_4 & 0 & 0 \\ d_3 & -c_3 & b_3 & 0 \\ 0 & c_2 & -b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & b_1 & -a_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & 0 & c_4 & 0 \end{vmatrix},$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

V 7, 8, 9

A LIST OF SOME DUTCH ASTRONOMICAL WORKS IMPORTED INTO JAPAN FROM HOLLAND,

BY

T. HAYASHI.

(Tokyō, Japan.)

The following are some Dutch astronomical works used by the astronomers who served the Tokugawa clan as functionaries appointed for the composition of annual calendars. The clan held the governing power over the whole of Japan, intrusted to them by the Emperors of the unbroken dynasty from 1603 till the Restoration in 1868. The successive heads of such a clan were called the shōgoons and were said to hold the shogunate over the country. Since the arrival of the Dutch ships, "Liefde" in 1600 and "Roode Leeuw" and "Griffioen" in 1609, the Japanese were made acquainted with European arts and sciences by the Dutch. For this, we Japanese must express our cordial thanks to the Dutch. The eighth shōgoon Yoshimune Fokugawa (he held the shogunate from 1716 to 1744) was fond of astronomical observations. After that time, the following books seem to have been imported by some Dutchmen. I got the names of the authors and the titles of the books from a note-book of one of the astronomers, written in the Japanese letters called "Kana", and so I had to take pains to find out their original spelling in Dutch. In the catalogues of Dutch books, especially in Bierens de Haan's work "Bibliographie Néerlandaise, etc.", 1883, kindly sent me by Prof. D. J. Korteweg, the following were found out. But the original names of many works mentioned in the note book remain unknown; these I will search for later on. Even in the following some are doubtful and are marked with interrogation marks. I will add here that the note-book belongs to Mr. Kanō, Director of the First Higher School in Tokyō.

(1). Elte Martens Beima. — Verhandeling over den ring van Saturnus. One vol., 1843.

(2). L. B. Francoeur. — Sterrekunde. Translated by J. C. Pilaar into Dutch. One vol.

(3). Jacob de Gelder. — Beginselen der Stelkunst ontworpen naar haren tegenwoordigen staat van vordering en beschaving, 3rd ed., 1836. Or: — Allereerste Gronden der Stelkunst —, if the latter was reprinted in 1836. In the note-book, only the word „Stelkunst" is written.

(4). Jacob de Gelder. — Allereerste Gronden der Cijferkunst. 's Gravenhage. 1837.

(5). Jacob de Gelder. — Allereerste Gronden der Stelkunst. 3rd ed., 1830.

(6). Jacob de Gelder. — Cosmographische lessen? 1831.

(7). Abraham de Graaf. — De Starre-kunst. 1659.

(8). Frederik Petrus Gisus Nanning. — Handleiding tot de werkdadige Meetkunst. 1828—1829? 2 vols.

(9). Alexander von Humboldt. — Natuurkunde, enz. Translated by E. M. Beima into Dutch. 3 vols., 1846—1852.

(10). G. F. Jahn. — Katechismus der Astronomie. Translated by M. I. van Oven? into Dutch. One vol., 1852.

(11). Frederik Kaiser. — De Sterrenhemel. 2 vols., 1847—1855?

(12). Frederik Kaiser. — De Geschiedenis der ontdekkingen van planeten als een tafereel van het wezen en den toestand der sterrekunde. One vol., 1851.

(13). Frederik Kaiser. — Beschouwing van de komeeten in het algemeen en van de vier voornaamste in het bijzonder, naar I. I. Littrow. One vol., 1833.

(14). Frederik Kaiser. — Verhandeling over de Komeet van Halley. One vol., 1835.

(15). Frederik Kaiser. — De Komeet van Encke en hare naderende verschijning. One vol., 1838.

(16). Johan Lulofs. —? One vol., 1850.

(17). J. J. de Lalande. — Astronomie? 8 vols., 1773—1780.

(18). Johannes Florentius Martinet. — Katechismus der Natuur. 4 vols. 1882? (This has been translated into Japanese by Sammon Sammé, see Bierens de Haan's work, above-mentioned.)

(19). Jan Carel Pilaar. — Handleiding tot de beschouwende en werkdadige Stuurmanskunst. 2nd ed., 1837.

(20). Jacob Ploos van Amstel? — Gronden der Sterrekunde van George Adams? 1771?

(21). Pybo Steenstra. — Grondbeginsels der sterrekunde. 2 vols., 1771? — 1772.

(22). Isaak Riewert Schmidt. — Handboek? One vol., 1826.

(23). Isaak Riewert Schmidt. — Handboek? One vol., 1834.

(24). Nicolaas Struik. — Inleiding tot de Algemeene Geographie. Benevens eenige sterrekundige en andere Verhandelingen. 2 vols., 1740—1753?

(25). Jacob Swart. — Handleiding voor de praktische Zeevaartkunde. 3rd ed., 1850. One vol.

(26). Klaas de Vries. — Schatkamer ofte Konst der Stuurlieden . . . . de Tafelen van Sinus, Tangens en Secans en de Logarithmus Sinus. One vol., 1812?

AANTEEKENINGEN.

Prof. Heeres te Leiden had de goedheid mijne aandacht te vestigen op de drie onderstaande boeken, waarin uitvoerig gehandeld wordt over de vroegste betrekkingen tusschen Nederland en Japan:

Mr. L. C. D. van Dijk. Zes jaren uit het leven van Wemmer van Berchem, gevolgd door iets over onze vroegste betrekkingen met Japan, twee geschiedkundige bijdragen. Amsterdam, J. H. Scheltema, 1858.

Dr. Arthur Wichmann. Dirck Gerritsz. Ein Beitrag zur Entdeckungsgeschichte des 16ten und 17ten Jahrhunderts. Groningen J. B. Wolters, 1899.

Oskar Nachod. Die Beziehungen der Niederländischen Ostindischen Kompagnie zu Japan im siebzehnten Jahrhundert. Leipzig, Rob. Friese Sep, 1897.

In 1598 zeilden vijf schepen, uitgerust door het „treflijk gezelschap" de Compagnie van Verhagen, het Goereesche gat uit om door den Magelhäesstraat Japan te bereiken. Na allerlei tegenspoeden en wederwaardigheden heeft een der schepen het doel bereikt. Er bestaat verschil van meening, of dit het schip „de Liefde" of het schip „de

Hoop" is geweest. Misschien is de mededeeling van den heer Hayashi, zoo hij hierbij niet is afgegaan op Nachod, beslissend. Bijna als schipbreukelingen kwamen de Hollanders aan land op Kiusiu. Jacob Jansz. Quackernaeck was kapitein, Melchior van Sandvoort koopman; als stuurman was aan boord een Engelschman William Adams. Deze laatste wordt door van Dijk voor een Hollander gehouden. Quaeckernaeck en Adams, hoewel niet onwelwillend behandeld, behielden slechts gedeeltelijk hunne vrijheid. Portugeesche Jezuïeten, die in Japan gevestigd waren, bemoeilijkten de Hollanders en maakten hen bij de Japanners als zeeroovers verdacht. Adams bleef voor goed in Japan en volgens Nachod trad hij in Japanschen dienst; „er verwerthete seine Kenntnisse in Geschützkunst, *Mathematik* und Schiffsbau." De anderen geraakten na eenigen tijd weder in de gelegenheid de Indische koloniën te bereiken. Reeds in 1601 was het lot der Hollanders in Japan bekend in het vaderland. Men besloot een brief van prins Maurits met een „klein presentje" aan den Japanschen keizer te zenden, en te trachten handelsvrijheid te verwerven. Van een uit 13 schepen bestaande vloot, die naar Indië was gezeild, werden ten slotte twee schepen „de Roode Leeuw met Pijlen", of de „Vereenigde Leeuw met Pijlen", en „de Griffioen" naar Japan gezonden. Zij kwamen aldaar in 1609. De opperkoopman Jacques Specx vond een goed onthaal, kon den brief van den prins overhandigen en verkreeg een vrijpas, van welken bij van Dijk eene vertaling voorkomt.

De door den heer Hayashi genoemde boeken zijn grootendeels aanwezig op de Leidsche Universiteitsbibliotheek. Van degene, welke aldaar ontbraken ((2), (8), (10), (12) en (13)) zijn de titels door den heer H. I. Mehler, adjunct-bibliothecaris te Amsterdam, opgespoord. Hieronder volgen nog eens alle titels, iets uitvoeriger dan de heer Hayashi deze kon geven.

(1). Elte Martens Beima. Verhandeling over den Ring van Saturnus, van zijne eerste ontdekking af tot op den tegenwoordigen tijd. M. 4 pl. Leiden, 1843. 8°.

(2). L. B. Francoeur. Werkdadige sterrekunde, vertaald door J. C. Pilaar. Medemblik, 1834. 8°.

(3). Jacob de Gelder. Beginselen der stelkunst, ontworpen naar haren tegenwoordigen staat van vordering en beschaving. 3e druk. 's Gravenhage en Amsterdam, 1836. 8°.

(4). Jacob de Gelder. Allereerste gronden der cijferkunst. 2e vermeerderde en verbeterde druk. 's Gravenhage en Amsterdam, 1817. 2 dln. 8°, 3e druk 1824—1825, 4e druk 1830—1833. Antwoorden op idem, uitgewerkt door G. Ramakers Jr.

(5). Jacob de Gelder. Allereerste gronden der stelkunst. 5e druk. 's Gravenhage en Amsterdam, 1830. 8°.

(6). Jacob de Gelder. Cosmographische lessen. Een leesboek voor de Nederlandsche jongelingschap. Amsterdam en den Haag, 1831. 8°.

(7). Abraham de Graaf. De Starre-kunst, leerende de hoedanigheden der bewegingen van alle zichtbare Hemelsche Lighamen, en 't berekenen haarder zichtbare plaatsen. Mitsgaders de hoedanigheden der verduistering van Zon en Maan, en de berekeningen van dien. Amsteldam, 1659. 4°.

(8). F. P. Gisius Nanning. Handleiding tot de werkdadige meetkunst, bevattende de onderscheidene wijzen van het opmeten van landen, het vervaardigen van topographische kaarten . . ; voorafgegaan door eene beschrijving der voornaamste landmeterswerktuigen. 2 dln. met pl., Delft, 1828, 1829, 8°.

(9). Alexander von Humboldt. Kosmos. Ontwerp eener natuurkundige Wereldbeschrijving. Naar het Hoogd. door E. M. Beima. Leiden, 1846—1858. 4 dln. 8°.

(10). G. A. Jahn's Katechismus der Astronomie, of onderrigtingen aangaande den sterrenhemel, de aarde en den kalender. Met eene sterrekaart en 43 afbeeldingen. Uit het Hoogd. door M. J. van Oven. Utrecht, 1852. 8°.

(11). F. Kaiser. De sterrenhemel. 2e druk. Amsterdam, 1847—1853. Met pl., 2 dln. 8°.

(12). F. Kaiser. De Geschiedenis der ontdekkingen van planeten, als een tafereel van het wezen en den toestand der sterrekunde, in de taal van het dagelijksche leven voorgedragen. Amsterdam, 1851. 8°.

(13). J. J. Littrow. Beschouwing van de kometen in het algemeen en van de vier voornaamste in het bijzonder, gevolgd naar het Hoogd., verrijkt door ophelderende aanteekeningen van den vertaler. Amsterdam, 1833. 8°. (In de door Bierens de Haan gegeven lijst van de werken van Kaiser is dit boek opopgenomen met de bijvoeging: de vertaler noemt zich K.).

(14). F. Kaiser. Verhandeling over de Komeet van Halley, hare vroegere verschijningen en de toekomstige in het jaar 1835, enz. M. Kaart. 's Gravenhage en Amsterdam, 1835. 8°.

(15). F. Kaiser. De Komeet van Encke en hare naderende verschijning. Leiden, 1838. 8°.

(16). Joh. Lulofs. Inleiding tot eene natuur- en wiskundige beschouwinge des aardkloots. Met pl. en portret. Leiden en Zutphen, 1750. 4°.

(17). J. J. Le François de la Lande. Astronomia of Sterrekunde. Naar den 2den druk uit het Fransch vertaald door A. B. Strabbe

en in het licht gebracht onder het opzicht van C. Douwes. Amsterdam, 1773—1780, 4 dln. 8 stkn. 8°.

(18). J. F. Martinet. Katechismus der natuur. M. pl. Amsterdam, 1777—1779, 4 dln. 8°. (Er bestaan verkorte bewerkingen door J. A. Uilkens van de jaren 1809 en 1820).

(19). J. C. Pilaar. Handleiding tot de beschouwende en werkdadige stuurmanskunst. 2e druk. Leiden, 1847. 2 dln. 8°.

(20). G. Adams. Gronden der starrenkunde, gelegd in het zonnestelsel, bevattelijk gemaakt; in eene beschouwing van 't maaksel en gebruik der nieuwe hemel- en aard-globen. In 't Nederlandsch vertaald en met aanmerkingen verrijkt door Jac. Ploos van Amstel. Amsterdam, 1771. 8°.

(21). Pibo Steenstra. Grondbeginsels der sterrekunde. Voorzien met de zons- en maans-tafelen enz. Amsterdam, 1771—1772, 2 dln. 8°.

(22). I. R. Schmidt. Beginselen der hoogere meetkunst. 2e druk. 's Gravenhage en Amsterdam, 1826. 8°.

(23). (Van het jaar 1834 en onder den titel „Handboek" is geen boek van I. R. Schmidt gevonden).

(24). N. Struyk. Inleiding tot de algemeen geographie, benevens eenige sterrekundige en andere verhandelingen. Amsterdam, 1740, 4°.

N. Struyck. Vervolg van de beschrijving der Staartsterren (in de Inleiding tot de algemeene geographie) en nadere ontdekkingen omtrent den staat van 't menschelijk geslagt, benevens eenige sterrekundige, aardrijkskundige en andere aanmerkingen. Met pl. Amsterdam, 1753. 4°.

(25). Jacob Swart. Handleiding voor de praktische Zeevaartkunde. Amsterdam, 1845. 8°.

(26). Klaas de Vries. Schat-kamer ofte kunst der stuurlieden, inhoudende de arithmetica of rekenkunde, benevens een duidelijke onderwijsinge in de Navigatie, aangaande het geene de stuurlieden noodwendig behooren te weten. Hierbij zijn gevoegd verscheidene Tafelen, als van de Sinus en Logarithmus Sinus, Tangens en Secans, van minuut tot minuut; de vergrootende breedte, de Streek-Tafelen, na het plat en na het rond, en de Breedte en Lengte van de meest bekende Zeeplaatsen, Zeehavens, enz. des Aardrijks. 4de druk. Amsterdam, 1749. 8°. Met eene inleiding vermeerderd, en verbeterd door Evert Florijn. Amsterdam, 1786. 8o.

J. C. Kluyver.

R 8 e δ

ON THE SMALL OSCILLATIONS OF A SYSTEM OF TWO HEMISPHERES OF WHICH ONE IS RESTING WITH ITS SPHERICAL SURFACE ON THE PLANE FACE OF THE OTHER, BOTH ROTATING WITH FINITE VELOCITY ABOUT THEIR VERTICAL AXES.

Answer to prize-question No. 18 for the year 1904

BY

A. G. KERKHOVEN—WYTHOFF.
(Apeldoorn).

A heavy homogeneous hemisphere is resting in equilibrium on a perfectly rough horizontal plane with its spherical surface downwards. A second heavy homogeneous hemisphere of other dimensions is resting in the same way on the perfectly rough plane face of the first, the point of contact being in the centre of that circle. The equilibrium being slightly disturbed it is required to find the small oscillations of the system.

This question has been solved for the case that the two hemispheres have no or only a small angular velocity about the normal in the point of contact. (*Nieuw Archief*, 2nd series, vol. IV p. 205). This restriction has now been removed.

§ 1 *Deduction of the equations of motion.* The position of the two hemispheres is given for every instant by 10 independent coordinates. We take as such for each hemisphere two coordinates to determine the projection of its centre of gravity on the horizontal plane and three to determine the position, referred to a system of axes fixed in space, of a set of rectangular axes through the centre of gravity and moving with the hemisphere. The set of fixed axes, $R.LMN$, is taken through the point of contact of the lower hemisphere with the horizontal plane in the position of equilibrium, the axis RN being vertical. The sets of axes which move with the hemispheres are $Z_1.\Xi HZ$ for the lower and $Z_2.XYZ$ for the upper body. At the beginning of the motion the angles

between the corresponding axes of the three sets are small quantities. These same sets of axes have been used in the solution of the question as it was put in 1898.

We have now for each hemisphere five coordinates, namely p and q, the coordinates of the projection of the centre of gravity on the horizontal LRM, and the three Eulerian coordinates ϑ, φ and ψ, as they are given in ROUTH, *Elementary Rigid Dynamics*, § 256; ϑ is a small quantity, so are p and q; n is for the centre of gravity of both hemispheres equal to the sum of a constant quantity and of small quantities of the second and higher order, so that the square of its fluxion may be omitted when small quantities of the first and second order only are required.

Let R be the moment of inertia of one of the hemispheres about its axis of figure and P that moment about one of the other axes; we have for each body, omitting small quantities of the third and higher order,

$$2T = M(\dot{p}^2 + \dot{q}^2) + P(\dot{\vartheta}^2 + \vartheta^2\dot{\psi}^2) + R(\dot{\varphi} + \dot{\psi} - \tfrac{1}{2}\vartheta^2\dot{\psi})^2,$$

where T is the kinetic energy. (ROUTH, *Elementary Rigid Dynamics*, § 365).

In these coordinates the expression for the kinetic energy takes a simple form, but that for the potential energy does not; neither do the conditions of rolling. To calculate these we write down the relations between our present coordinates and those used in our answer to the question as it was put in 1898. They are for the lower hemisphere

$a = p_1$, in second approximation

$$a_1 = -\sin\psi_1\sin\varphi_1 + \cos\psi_1\cos\varphi_1\cos\vartheta_1 = \cos(\varphi_1+\psi_1) - \tfrac{1}{2}\cos\psi_1\cos\varphi_1\vartheta_1^2,$$
$$a_2 = -\sin\psi_1\cos\varphi_1 - \cos\psi_1\sin\varphi_1\cos\vartheta_1 = -\sin(\varphi_1+\psi_1) + \tfrac{1}{2}\cos\psi_1\sin\varphi_1\vartheta_1^2,$$
$$a_3 = \sin\vartheta_1\cos\psi_1 = \vartheta_1\cos\psi_1,$$

$$b = q_1,$$
$$b_1 = \cos\psi_1\sin\varphi_1 + \sin\psi_1\cos\varphi_1\cos\vartheta_1 = \sin(\varphi_1+\psi_1) - \tfrac{1}{2}\sin\psi_1\cos\varphi_1\vartheta_1^2,$$
$$b_2 = \cos\psi_1\cos\varphi_1 - \sin\psi_1\sin\varphi_1\cos\vartheta_1 = \cos(\varphi_1+\psi_1) + \tfrac{1}{2}\sin\psi_1\sin\varphi_1\vartheta_1^2,$$
$$b_3 = \sin\vartheta_1\sin\psi_1 = \vartheta_1\sin\psi,$$

$$c = r_1 - l_1\cos\vartheta = r_1 - l_1 + \tfrac{1}{2}l_1\vartheta_1^2,$$
$$c_1 = -\sin\vartheta_1\cos\varphi_1 = -\vartheta_1\cos\varphi_1.$$
$$c_2 = \sin\vartheta_1\sin\varphi_1 = \vartheta_1\sin\varphi_1,$$
$$c_3 = \cos\vartheta_1 = 1 - \tfrac{1}{2}\vartheta_1^2,$$

r_1 being the radius of the lower hemisphere and l_1 the distance of the centre of gravity from its plane face.

The angular velocity about the normal in the point of contact is $\dot{\varphi}_1 \cos\vartheta_1 + \dot{\psi}_1$.

The expressions for the quantities $\alpha, \alpha_1 \ldots . \gamma_3$ may be found by introducing the auxiliar coordinates φ_3, ψ_3 and ϑ_3. In so doing we bring the axes, which move with the upper hemisphere, in their present position, defined by φ_2, ψ_2 and ϑ_2, by two rotations, the first defined by ψ_1, φ_1 and ϑ_1 and the second by ψ_3, φ_3 and ϑ_3

The expressions for $\alpha_1 \ldots . \gamma_3$ are:

second approximation.

$$\alpha_1 = \cos(\varphi_3 + \psi_3) - \tfrac{1}{2}\cos\psi_3 \cos\varphi_3 \vartheta_3^2,$$
$$\alpha_2 = -\sin(\varphi_3 + \psi_3) + \tfrac{1}{2}\cos\psi_3 \sin\varphi_3\vartheta_3^2,$$
$$\alpha_3 = \vartheta_3 \cos\psi_3,$$

$$\beta_1 = \sin(\varphi_3 + \psi_3) - \tfrac{1}{2}\sin\psi_3 \cos\varphi_3\vartheta_3^2,$$
$$\beta_2 = \cos(\varphi_3 + \psi_3) + \tfrac{1}{2}\sin\varphi_3 \sin\varphi_3\vartheta_3^2,$$
$$\beta_3 = \vartheta_3 \sin\psi_3,$$

$$\gamma_1 = -\vartheta_3 \cos\varphi_3,$$
$$\gamma_2 = \vartheta_3 \sin\varphi_3,$$
$$\gamma_3 = 1 - \tfrac{1}{2}\vartheta_3^2.$$

We have also:

$$\gamma = r_2 + l_1 - l_2(1 - \tfrac{1}{2}\vartheta_3^2).$$

α and β are defined by the equations:

$$p_2 = p_1 + \alpha\cos(\varphi_1 + \psi_1) - \beta\sin(\varphi_1 + \psi_1) + \vartheta_1 \cos\psi_1 (r_2 + l_1 - l_2),$$
$$q_2 = q_1 + \alpha\sin(\varphi_1 + \psi_1) + \beta\cos(\varphi_1 + \psi_1) + \vartheta_1 \sin\psi_1 (r_2 + l_1 - l_2),$$

giving:

$$\alpha = (p_2 - p_1)\cos(\varphi_1 + \psi_1) + (q_2 - q_1)\sin(\varphi_1 + \psi_1) - \vartheta_1(r_2 + l_1 - l_2)\cos\varphi_1,$$
$$\beta = -(p_2 - p_1)\sin(\varphi_1 + \psi_1) + (q_2 - q_1)\cos(\varphi_1 + \varphi_1) + \vartheta_1(r_2 + l_1 - l_2)\sin\varphi_1,$$

(second approximation).

In the conditions of rolling a first approximation is sufficient for the coordinates α, α_1, $\ldots . \gamma_3$. In the expression for the potential energy, U, a second approximation of γ is required, so that we have to calculate a second approximation of ϑ_3^2.

The relations between the auxiliary and the definite coor-

dinates are found by considering the spherical triangle, the sides of which are the three rotations ϑ_1, ϑ_2 and ϑ_3. The angle, formed by ϑ_1 and ϑ_2 is $\psi_2 - \psi_1$, that formed by ϑ_1 and ϑ_3 is $180° - (\varphi_1 + \psi_3)$ and the third angle is $\varphi_2 - \varphi_3$.

We have as a second approximation:

$$\vartheta_3^2 = \vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 - 2\vartheta_1\vartheta_2 \cos(\psi_2 - \psi_1).$$

For first approximations the triangle may be considered to be plane (which gives the same expression for ϑ_3^2).

We have then:

$$\psi_2 - \psi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 = \varphi_1 + \psi_3,$$

or

$$\varphi_2 + \psi_3 = \varphi_2 + \psi_2 - \varphi_1 - \psi_1.$$

We have:

$$\vartheta_3 \sin(\varphi_1 + \psi_3) = \vartheta_2 \sin(\psi_2 - \psi_1),$$
$$\vartheta_3 \cos(\varphi_1 + \psi_3) = \vartheta_2 \cos(\psi_2 - \psi_1) - \vartheta_1.$$

Giving:

$$\vartheta_3 \cos\psi_3 = \vartheta_2 \cos(\psi_2 - \psi_1 - \varphi_1) - \vartheta_1 \cos\varphi_1,$$
$$\vartheta_3 \sin\psi_3 = \vartheta_2 \sin(\psi_2 - \psi_1 - \varphi_1) + \vartheta_1 \sin\varphi_1,$$

and

$$\vartheta_3 \sin(\varphi_2 - \varphi_3) = \vartheta_1 \sin(\psi_2 - \psi_1),$$
$$\vartheta_3 \cos(\varphi_2 - \varphi_3) = \vartheta_2 - \vartheta_1 \cos(\psi_2 - \varphi_1),$$

giving:

$$\vartheta_3 \cos\varphi_3 = -\vartheta_1 \cos(\psi_2 - \psi_1 + \varphi_2) + \vartheta_2 \cos\varphi_2,$$
$$\vartheta_3 \sin\varphi_3 = -\vartheta_1 \sin(\psi_2 - \psi_1 + \varphi_2) + \vartheta_2 \sin\varphi_2.$$

Substituting, we have as a first approximation:

$$\alpha_1 = \cos(\psi_2 + \varphi_2 - \psi_1 - \varphi_1),$$
$$\alpha_2 = -\sin(\psi_2 + \varphi_2 - \psi_1 - \varphi_1),$$
$$\alpha_3 = \vartheta_2 \cos(\psi_2 - \psi_1 - \varphi_1) - \vartheta_1 \cos\varphi_1,$$

$$\beta_1 = \sin(\psi_2 + \varphi_2 - \psi_1 - \varphi_1),$$
$$\beta_2 = \cos(\psi_2 + \varphi_2 - \psi_1 - \varphi_1),$$
$$\beta_3 = \vartheta_2 \sin(\psi_2 - \psi_1 - \varphi_1) + \vartheta_1 \sin\varphi_1,$$

$$\gamma_1 = \vartheta_1 \cos(\varphi_2 - \psi_1 + \varphi_2) - \vartheta_2 \cos\varphi_2,$$
$$\gamma_2 = -\vartheta_1 \sin(\psi_2 - \psi_1 + \varphi_2) + \vartheta_2 \sin\varphi_2,$$

and as a second approximation:

$$\gamma_3 = 1 - \tfrac{1}{2}\{\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 - 2\vartheta_1\vartheta_2 \cos(\psi_2 - \psi_1)\}$$

The conditions of rolling were in the old coordinates (R_1 and R_2 signifying the radii of the hemispheres):

$$\dot{a} - \dot{a}_1 R_1 c_1 - \dot{a}_2 R_1 c_2 + \dot{a}_3 (l_1 - R_1 c_3) = 0,$$
$$\dot{b} - \dot{b}_1 R_1 c_1 - \dot{b}_2 R_1 c_2 + \dot{b}_3 (l_1 - R_1 c_3) = 0,$$
$$\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_1 R_2 \gamma_1 - \dot{\alpha}_2 R_2 \gamma_2 + \dot{\alpha}_3 (l_2 - R_2 \gamma_3) = 0,$$
$$\dot{\beta} - \dot{\beta}_1 R_2 \gamma_1 - \dot{\beta}_2 R_2 \beta_3 + \dot{\beta}_3 (l_2 - R_2 \gamma_3) = 0.$$

They are now:

$$\dot{p}_1 - r_1\vartheta_1 \sin\psi_1\dot{\varphi}_1 - l_1\vartheta_1 \sin\psi_1\dot{\psi}_1 + (l_1 - r_1)\dot{\vartheta}_1 \cos\psi_1 = 0, \quad (1)$$

$$\dot{q}_1 + r_1\vartheta_1 \cos\psi_1\dot{\varphi}_1 + l_1\vartheta_1 \cos\psi_1\dot{\psi}_1 + (l_1 - r_1)\dot{\vartheta}_1 \sin\psi_1 = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\dot{p}_2 &+ (q_2 - q_1)(\dot{\varphi} + \dot{\psi}_1) - r_1\dot{\vartheta}_1 \cos\psi_1 + (l_2 - r_2)\dot{\vartheta}_2 \cos\psi_2 + \\ &+ \vartheta_1 \sin\psi_1 \{-r_1\dot{\varphi}_1 - l_1(\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi}_1) + r_2(\dot{\psi}_2 + \dot{\varphi}_2 - \dot{\psi}_1 - \dot{\varphi}_1)\} - \\ &- \vartheta_2 \sin\varphi_2 \{l_2(\dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_1 - \dot{\varphi}_1) + r_2\dot{\varphi}_2\} = 0, \quad (3)\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\dot{q}_2 &- (p_2 - p_1)(\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi}_1) - r_1\dot{\vartheta}_1 \sin\psi_1 + (l_2 - r_2)\dot{\vartheta}_2 \sin\psi_2 + \\ &+ \vartheta_1 \cos\psi_1 \{r_1\dot{\varphi}_1 + l_1(\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi}_1) - r_2(\dot{\psi}_2 + \dot{\varphi}_2 - \dot{\psi}_1 - \dot{\varphi}_1)\} + \\ &+ \vartheta_2 \cos\psi_2 \{l_2(\dot{\psi}_2 - \dot{\psi}_1 - \dot{\varphi}_1) + r_2\dot{\varphi}_2\} = 0 \quad (4)\end{aligned}$$

We had in the old coordinates:

$$U = M_1 g c + M_2 g (c + c_1 a + c_2 \beta + c_3 \gamma);$$

this becomes as a second approximation:

$$\begin{aligned}U = \tfrac{1}{2} M_1 g l_1 \vartheta_1^2 &+ M_2 g \{-\vartheta_1 [(p_2 - p_1)\cos\psi_1 + (q_2 - q_1)\sin\psi_1)]\} + \\ &+ \tfrac{1}{2}\vartheta_1^2 (r_2 + 2l_1 - l_2) + \tfrac{1}{2} l_2 [\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 - 2\vartheta_1\vartheta_2 \cos(\psi_1 - \psi_2)]\}\end{aligned}$$

We further have:

$$\begin{aligned}2T = M_1(\dot{p}_1^2 + \dot{q}_1^2 + P_1(\dot{\vartheta}_1^2 + \vartheta_1^2\dot{\psi}_1^2) + R_1(\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi}_1 - \tfrac{1}{2}\vartheta_1^2\dot{\psi}_1)^2 + \\ + M_2(\dot{p}_2^2 + \dot{q}_2^2) + P_2(\dot{\vartheta}_2^2 + \vartheta_2^2\dot{\psi}_2^2) + R_2(\dot{\varphi}_2 + \dot{\psi}_2 - \tfrac{1}{2}\vartheta_2^2\dot{\psi}_2)^2.\end{aligned}$$

The equations of the motion, which we consider, cannot be derived by the method of Lagrange, as the conditions of rolling cannot be integrated. If the angular velocities about the normal in the point of contact are zero, we have: $\dot{\varphi}_1 \cos\vartheta_1 + \dot{\psi}_1 = 0$ and $\dot{\varphi}_3 \cos\vartheta_3 + \dot{\psi}_2 = 0$, or, as a first approximation: $\dot{\varphi}_1 + \dot{\psi}_1 = 0$

and $\dot{\varphi}_3 + \dot{\psi}_3 = 0$, and therefore also $\dot{\varphi}_2 + \dot{\psi}_2 = 0$. Substituting this, the equations (1) . . . (4) can be integrated, as has been done in the former answer. Those integrals have than been used to eliminate an equal number of variables from the expressions for U and T, the remaining being independent. This cannot be done here and we shall make up the equations of motion by the method given by Prof. KORTEWEG in his memoir: *Ueber eine ziemlich verbreitete unrichtige Behandlungsweise eines Problemes der rollenden Bewegung, über die Theorie dieser Bewegung, und ins Besondere über kleine rollende Schwingungen um eine Gleichgewichtslage.* (*Nieuw Archief*, 2nd series, vol. IV, p. 130).

In calculating T and U we have not made use of the conditions of rolling.

Before deducing the equations we change our coordinates for greater simplicity of the results. We put:

$$\varphi_1 + \psi_1 = u_1, \quad \varphi_2 + \psi_2 = u_2,$$
$$\vartheta_1 \cos\psi_1 = x_1, \quad \vartheta_1 \sin\psi_1 = y_1, \quad \vartheta_2 \cos\psi_2 = x_2, \quad \vartheta_2 \sin\psi_2 = y_2.$$

The p's and q's are kept unchanged.

u_1 and u_2 are as a first approximation equal to the angular velocity of the lower hemisphere about the normal in the point of contact and to the sum of that angular velocity and the same for the upper hemisphere, x_1, y_1, x_2 and y_2 are approximately equal to the direction-cosines of the axes of figure of the two hemispheres with the fixed axes in the horizontal plane.

With these coordinates we have:

$$2T = M_1(\dot{p}_1 + \dot{q}_1^2) + P_1(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + R_1(\dot{u}_1 + \tfrac{1}{2}\dot{x}_1 y_1 - \tfrac{1}{2}x_1\dot{y}_1)^2 +$$
$$+ M_2(\dot{p}_2 + \dot{q}_2^2) + P_2(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + R_2(\dot{u}_2 + \tfrac{1}{2}\dot{x}_2 y_2 - \tfrac{1}{2}x_2\dot{y}_2)^2,$$
$$U = \tfrac{1}{2}M_1 g l_1(x_1^2 + y_1^2) + M_2 g\,[-(p_2 - p_1)x_1 - (q_2 - q_1)y_1 +$$
$$+ \tfrac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2)(r_2 + 2l_1 - l_2) + \tfrac{1}{2}l_2\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\}].$$

The conditions of rolling are:

$$\dot{p}_1 - r_1\dot{u}_1 y + (l_1 - r_1)\dot{x}_1 = 0, \quad . \; . \; . \; . \quad (5)$$
$$\dot{q}_1 + r_1\dot{u}_1 x_1 + (l_1 - r_1)\dot{y}_1 = 0, \quad . \; . \; . \; . \quad (6)$$
$$\dot{p}_2 + \dot{u}_1\{q_2 - q_1 - y_1(r_1 + r_2 + l_1) + l_2 y_2\} + \dot{u}_2 r_2(y_1 - y_2) - r_1\dot{x}_1 +$$
$$+ (l_2 - r_2)\dot{x}_2 = 0, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

$$\dot{q}_2 + \dot{u}_1 \{- p_2 + p_1 + x_1(r_1 + r_2 + l_1) - l_2 x_2\} + \dot{u}_2 r_2 (- x_1 + x_2) -$$
$$- r_1 \dot{y}_1 + (l_2 - r_2)\dot{y}_2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Let φ_{p_1}, φ_{q_1}, $\varphi_{u_1} \ldots\ldots \varphi_{y_2}$ be the generalized components of the reactions at the points of contact; we have:

$$\varphi_{p_1}\dot{p}_1 + \varphi_{q_1}\dot{q}_1 + \varphi_{u_1}\dot{u}_1 + \varphi_{x_1}\dot{x}_1 + \varphi_{y_1}\dot{y}_1 + \varphi_{p_2}\dot{p}_2 + \varphi_{q_2}\dot{q}_2 + \varphi_{u_2}\dot{u}_2 +$$
$$+ \varphi_{x_2}\dot{x}_2 + \varphi_{y_2}\dot{y}_2 = 0.$$

This equation and the equations (5) ... (8) are not independent. If therefore we eliminate $\dot{p}_1$, $\dot{q}_1$, $\dot{p}_2$ and $\dot{q}_2$ the resulting equation is an identity and the coefficients of the other fluxions are equal to zero. Substitution for $\dot{p}_1$, $\dot{q}_1$, $\dot{p}_2$ and $\dot{q}_2$ gives:

$$\varphi_{p_1}\{r_1\dot{u}_1 y_1 + (r_1 - l_1)\dot{x}_1\} + \varphi_{q_1}\{- r_1 \dot{u}_1 x_1 + (r_1 - l_1)\dot{y}_1\} + \varphi_{u_1}\dot{u}_1 + \varphi_{x_1}\dot{x} +$$
$$+ \varphi_{y_1}\dot{y}_1 + \varphi_{p_2}[\dot{u}_1 \{- q_2 + q_1 + y_1(r_1 + r_2 + l_1) - l_2 y_2\} - \dot{u}_2 r_2 (y_1 - y_2) +$$
$$+ r_1 \dot{x}_1 + (r_2 - l_2)\dot{x}_2] + \varphi_{q_2}[\dot{u}_1 \{p_2 - p_1 - x_1(r_1 + r_2 + l_1) + l_2 x_2\} +$$
$$+ \dot{u}_2 r_2 (x_1 - x_2) + r_1 \dot{y}_1 + (r_2 - l_2)\dot{y}_2] + \varphi_{u_2}\dot{u}_2 + \varphi_{x_2}\dot{x}_2 + \varphi_{y_2}\dot{y}_2 = 0.$$

Equalling to zero the coefficients of $\dot{u}_1$, $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{u}_2$, $\dot{x}_2$ and $\dot{y}_2$ we have:

$$\varphi_{u_1} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$(r_1 - l_1)\varphi_{p_1} + \varphi_{x_1} + r_1\varphi_{p_2} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (10)$$

$$(r_1 - l_1)\varphi_{q_1} + \varphi_{y_1} + r_1\varphi_{q_2} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

$$\varphi_{u_2} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

$$(r_2 - l_2)\varphi_{p_2} + \varphi_{x_2} = 0, \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

$$(r_2 - l_2)\varphi_{q_2} + \varphi_{y_2} + 0. \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

In these equations $\varphi_{u_1} = \dfrac{d\dfrac{\partial T}{\partial \dot{u}_1}}{dt} - \dfrac{\partial T}{\partial u_1} + \dfrac{\partial U}{\partial u_1} = R_1 \ddot{u}_1$ (first approximation).

$$\varphi_{p_1} = M_1\ddot{p}_1 + M_2 g x_1,$$

$$\varphi_{q_1} = M_1\ddot{q}_1 + M_2 g y_1,$$

$$\varphi_{x_1} = P_1\ddot{x}_1 + \tfrac{1}{2}R_1 y_1 \ddot{u}_1 + R_1 \dot{u}_1 \dot{y}_1 + M_1 g l_1 x_1 +$$
$$+ M_2 g \{p_1 - p_2 + x_1(r_1 + 2l_1 - l_2) + l_2(x_1 - x_2)\},$$

$$\varphi_{y_1} = P_1\ddot{y}_1 - \tfrac{1}{2}R_1\ddot{u}_1 x_1 - R_1\dot{u}_1\dot{x}_1 + M_1 g l_1 y_1 +$$
$$+ M_2 g\{q_1 - q_2 + y_1(r_1 + 2l_1 - l_2) + l_2(y_1 - y_2)\},$$
$$\varphi_{u_2} = R_2\ddot{u}_2,$$
$$\varphi_{p_2} = M_2\ddot{p}_2 - M_2 g x_1,$$
$$\varphi_{q_2} = M_2\ddot{q}_2 - M_2 g y_1,$$
$$\varphi_{x_2} = P_2\ddot{x}_2 + \tfrac{1}{2}R_2\ddot{u}_2 y_2 + R_2\dot{u}_2\dot{y}_2 - M_2 g l_2(x_1 - x_2),$$
$$\varphi_{y_2} = P_2\ddot{y}_2 - \tfrac{1}{2}R_2\ddot{u}_2 x_2 - R_2\dot{u}_2\dot{x}_2 - M_2 g l_2(y_1 - y_2),$$

The equations of motion are (5) . . . (8) and (9) . . . (14).

§ 2. *Integrals of the equations of motion.*

The equations (9) and (12) give $\ddot{u}_1 = 0$ and $\ddot{u}_2 = 0$, or: the angular velocity of the lower hemisphere about the normal in the point of contact and the sum of that angular velocity and the same for the upper hemisphere and therefore that of the upper hemisphere, are constant during the motion *as a first approximation.* In the long run these angular velocities may diminish and part of the energy of rotation may be transformed into energy of the rocking motion. No account has been taken of this and the results arrived at, as to the stability of the motion, are no longer valid when that motion has been continuing for some time, as we are then no longer sure that $\dot{u}_1$ and $\dot{u}_2$ have their initial value.

Calling these initial values ω_1 and ω_2, we have as first integrals of the equations of motion $\dot{u}_1 = \omega_1$ and $\dot{u}_2 = \omega_2$.

Substituting these values in the other equations of motion, we find:

$$\dot{p}_1 + (l_1 - r_1)\dot{x}_1 - r_1\omega_1 y_1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

$$\dot{q}_1 + r_1\omega_1 x_1 + (l_1 - r_1)\dot{y}_1 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

$$-\omega_1 q_1 - r_1\dot{x}_1 + y_1\{-\omega_1(r_1 + r_2 + l_1) + r_2\omega_2\} + \dot{p}_2 + \omega_1 q_2 +$$
$$+ (l_2 - r_2)\dot{x}_2 + y_2(l_2\omega_1 - r_2\omega_2) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$\omega_1 p_1 + \{\omega_1(r_1 + r_2 + l_1) - \omega_2 r_2\}x_1 - r_1\dot{y}_1 - \omega_1 p_2 + \dot{q}_2 + (-l_2\omega_1 +$$
$$+ \omega_2 r_2)x_2 + (l_2 - r_2)\dot{y}_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

$$(r_1 - l_1)M_1\ddot{p}_1 + M_2 g p_1 + P_1\ddot{x}_1 + g\{M_1 l_1 + M_2(r_2 + l_1)\}x_1 + R_1\omega_1 y +$$
$$+ M_2 r_1\ddot{p}_2 - M_2 g p_2 - M_2 g l_2 x_2 = 0, \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

$$(r_1 - l_1) M_1 \ddot{q}_1 + M_2 g q_1 - R_1 \omega_1 \dot{x}_1 + P_1 \ddot{y}_1 + g\{M_1 l_1 + M_2(r_2 + l_1)\} y_1 + \\ + M_2 r_1 \ddot{q}_2 - M_2 g q_2 - M_2 g l_2 y_2 = 0, \quad . \quad . \quad (20)$$

$$- M_2 g r_2 x_1 + (r_2 - l_2) M_2 \ddot{p}_2 + P_2 \ddot{x}_2 + M_2 g l_2 x_2 + R_2 \omega_2 \dot{y}_2 = 0, \quad (21)$$

$$- M_2 g r_2 y_1 + M_2 (r_2 - l_2) \ddot{q}_2 - R_2 \omega_2 \dot{x}_2 + P_2 \ddot{y}_2 + M_2 g l_2 y_2 = 0, \quad (22)$$

We remark that the result of the elimination of x_1, x_2 and $p_1 - p_2$ between the equations (16), (18), (19) and (21) can be integrated. It is the determinantal equation:

$$\begin{vmatrix} r_1\omega_1 & 0 & 0 & \dot{q}_1 + (l_1 - r_1)\dot{y}_1 \\ \omega_1(r_1 + r_2 + l_1) - \omega_2 r_2 & \omega_1 & -l_2\omega_1 + r_2\omega_2 & -r_1\dot{y}_1 + \dot{q}_2 + (l_2 - r_2)\dot{y}_2 \\ g\{M_1 l_1 + M_2(r_2 + l_1)\} & M_2 g & -M_2 g l_2 & \begin{matrix}(r_1 - l_1)M_1\ddot{p}_1 + P_1\ddot{x}_1 + \\ + R_1\omega_1\dot{y}_1 + M_2 r_1 \ddot{p}_2\end{matrix} \\ -M_2 g r_2 & 0 & M_2 g l_2 & \begin{matrix}(r_2 - l_2)M_2\ddot{p} + P_2\ddot{x}_2 + \\ + R_2\omega_2\dot{y}_2\end{matrix} \end{vmatrix} = 0.$$

Dividing by $M_2 g$ and integrating we find:

$$g\{q_1 + (l_1 - r_1) y_1\}[- l_1 l_2 \omega_1 M_1 + M_2\{\omega_1 r_1 l_2 + \omega_2 r_2 (r_2 - l_2)\}] + \\ + \omega_1 r_1 [\{r_1 y_1 - q_2 + (r_2 - l_2) y_2\} M_2 g l_2 + \{(r_1 - l_1) M_1 \dot{p}_1 + P_1 \dot{x}_1 + \\ + R_1 \omega_1 y_1 + M_2 r_1 \dot{p}_2\{\omega_1 l_2 + \{(r_2 - l_2) M_2 \dot{p}_2 + P_2 \dot{x}_2 + R_2 \omega_2 y_2\} r_2 \omega_2] \\ = \text{a constant quantity.}$$

By eliminating y_1, y_2 and $q_1 - q_2$ between the remaining equations we find an equation, the integral of which can be derived from the one written out by interchanging p and q, x and y and by changing the signs of ω_1 and ω_2.

§ 3. *Conditions for the stability of the motion.*

To solve the differential equations (15) . . . (22) we write $p_1 = Ae^{pt}$, $q_1 = Be^{pt}$ etc. and obtain a determinantal equation to find m. Substituting $l = \frac{3}{8} r$, $P = \frac{83}{320} r^2 M$, $R = \frac{2}{5} r^2 M$, the determinant is the following:

p	0	$-\frac{5}{8}r_1 p$	$-r_1\omega_1$	0	0	0	0
0	p	$r_1\omega_1$	$-\frac{5}{8}r_1 p$	0	0	0	0
0	$-\omega_1$	$r_1 p$	$-(\frac{11}{8}r_1 + r_2)\omega_1 + r_2\omega_2$	p	ω_1	$-\frac{5}{8}r_1 p$	$\frac{3}{8}r_2\omega_1 - r_2\omega_2$
ω_1	0	$(\frac{11}{8}r_1 + r_2)\omega_1 - r_2\omega_2$	$-r_1 p$	$-\omega_1$	p	$-\frac{3}{8}r_2\omega_1 + r_2\omega_2$	$-\frac{5}{8}r_2 p$
$\frac{5}{8}M_1 r_1 p^2 + M_2 g$	0	$\frac{83}{320}M_1 r_1^2 p^2 +$ $+g\{\frac{3}{8}M_1 r_1 + M_2(\frac{3}{8}r_1 + r_2)\}$	$\frac{2}{5}r_1^2 M_1\omega_1 p$	$M_2 r_1 p^2 - M_2 g$	0	$-\frac{3}{8}M_2 r_2 g$	0
0	$\frac{5}{8}M_1 r_1 p^2 + M_2 g$	$-\frac{2}{5}M_1 r_1^2\omega_1 p$	$\frac{83}{320}M_1 r_1^2 p^2 +$ $+g\{\frac{3}{8}M_1 r_1 + M_2(\frac{3}{8}r_1 + r_2)\}$	0	$M_2 r_1 p^2 - M_2 g$	0	$-\frac{3}{8}r_2 M_2 g$
0	0	$-M_2 r_2 g$	0	$\frac{5}{8}M_2 r_2 p^2$	0	$\frac{83}{320}M_2 r_2^2 p^2 +$ $+\frac{3}{8}M_2 r_2 g$	$\frac{2}{5}M_2 r_2^2\omega_2 p$
0	0	0	$-M_2 r_2 g$	0	$\frac{5}{8}M_2 r_2 p^2$	$-\frac{2}{5}M_2 r_2^2\omega_2 p$	$\frac{83}{320}M_2 r_2^2 p^2 + \frac{3}{8}M_2 r_2 g$

It may be transformed to the following:

$(\frac{13}{20}M_1+M_2)r_1p^2+$ $+\frac{5}{8}M_2r_1r_2p^2+$ $+\frac{3}{8}M_1r_1g$	$(\frac{41}{40}M_1+M_2)r_1\omega_1p$	$M_2r_1r_2(-\frac{3}{8}\omega_1+\omega_2)p^2+$ $+M_2r_2\omega_2g$	$-M_2r_2(\frac{5}{8}r_1p^2-g)p$
$-(\frac{41}{40}M_1+M_2)r^2\omega_1p$	$(\frac{13}{20}M_1+M_2)r_1^2p^2+$ $+\frac{5}{8}M_2r_1r_2p^2+$ $+\frac{3}{8}M_1r_1g$	$M_2r_2(\frac{5}{8}r_1p^2-g)p$	$M_2r_1r_2(-\frac{3}{8}\omega_1+\omega_2)p^2$ $+M_2r_2\omega_2g$
$(\frac{5}{8}r_1+\frac{13}{20}r_2)p^2-\frac{5}{8}g$	$p(\frac{3}{8}r_1\omega_1+\frac{2}{5}r_2\omega_2)$	$r_2(\frac{11}{10}\omega_1+\frac{41}{40}\omega_2)p^2+$ $+\frac{3}{8}\omega_1g$	$-p\left\{\frac{13}{20}r_2p^2-\right.$ $\left.-\frac{2}{5}\omega_1\omega_2r_2+\frac{3}{8}g\right\}$
$-p(\frac{5}{8}r_1\omega_1+\frac{2}{5}r_2\omega_2)$	$(\frac{3}{8}r_1+\frac{13}{20}r_2)p^2-\frac{5}{8}g$	$p\left\{\frac{13}{20}r_2p^2-\frac{2}{5}\omega_1\omega_2r_2\right.$ $\left.+\frac{3}{8}g\right\}$	$r_2(\frac{11}{10}\omega_1+\frac{41}{40}\omega_2)p^2$ $+\frac{3}{8}\omega_1g$

We have divided by $M_2^2r_2^2p^2$. The determinantal equation has a root $p^2=0$. This might have been predicted from the presence of ∞^2 positions of equilibrium in the neighborhood of that which we have taken, namely of those defined by the coordinates $p_1=p_2=C_1$, $q_1=q_2=C_2$, $x_1=y_1=x_2=y_2=0$. It is to be remarked however, that we should not have found the root $p^2=0$ if we had taken the two first integrals, mentioned at the end of § 2, instead of two of the differential equations (15) . . . (22). We can easily demonstrate the following theorem of which also the converse holds: if the determinantal equation has a root equal to zero, the set of differential equations has a linear integral. We have namely a differential equation which can be integrated, because only fluxions enter into it, in taking the sum of the equations each multiplied by a constant quantity, so chosen that the sum of the corresponding rows in the determinant each multiplied by the same quantity gives a new row which has p as a factor.

The determinantal equation may be written in this way:

$$\begin{vmatrix} A & B & C & D \\ -B & A & -D & C \\ E & F & G & H \\ -F & E & -H & G \end{vmatrix} = 0$$

or:

$$(AG - BH - CE + DF)^2 + (AH + BG - CF - DE)^2 = 0.$$

Only even powers of p enter into the equation, which is of the fifth degree in p^2. The conditions for the stability of the motion are that the roots of this equations be all real and negative.

As B, D, F and H have each a factor p, the last square is of the form p^2P^2 and it is obvious that the equation cannot have a real positive root p^2. The conditions for the stability are thus reduced to these that the roots should be all real.

We write the equation thus:

$$(Ap^4 + Bp^2 + C)^2 + p^2 (Dp^4 + Ep^2 + F)^2 = 0,$$

where the letters A ... F represent other values than they did in the last form of the equation.

Writing $-q^2$ for p^2 the equation becomes:

$$(Aq^4 - Bq^2 + C)^2 = q^2 (Dq^4 - Eq^2 + F)^2$$

and the conditions are that q^2 should be real and positive.

These conditions are satisfied if the equations

$$(Aq^4 - Bq^2 + C) = \pm q (Dq^4 - Eq^2 + F)$$

have all the roots q real. The upper or the lower sign may be taken arbitrarily as the roots of one equation turn into those of the other by change of sign.

The equation of the fifth degree in q is the following:

$$r_1^2 r_2 \left\{ \left(\frac{13}{20}\right)^2 M_1 + \frac{83}{320} M_2 \right\} q^5 +$$

$$+ r_1 r_2 \left\{ \frac{13}{20} \cdot \frac{1}{40} M_1 r_1 (42\omega_1 + 41\omega_2) + M_2 r_1 \left(\frac{83}{160}\omega_1 - \frac{2}{5}\omega\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{83}{320} (\omega_1 - \omega_2) M_2 r_2 \right\} q^4 + \left[- g \left\{ \frac{3}{8} \cdot \frac{13}{20} M_1 r_1 (r_1 + r_2) + \right. \right.$$

$$+ \left(\frac{3}{8} r_1^2 + \frac{5}{4} r_1 r_2 + \frac{13}{20} r_2^2\right) M_2 \Big\} + r_1^2 r_2 M_1 \omega_1 \Big\{ \frac{1}{40} \cdot \frac{41}{40} \omega_1 +$$

$$+ \left(\frac{41^2}{40^2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{13}{20}\right) \omega_2 \Big\} + r_1 r_2 M_2 \Big\{ r_1 \omega_1 \left(\frac{83}{320} \omega_1 + \frac{4}{5} \omega_2\right) +$$

$$r_2 \omega_2 \frac{2}{5} (\omega_1 - \omega_2) \Big\} \Big] q^3 + \Big[- g \Big\{ \frac{3}{8} \cdot \frac{67}{40} \omega_1 M_1 r_1^2 +$$

$$+ \frac{3}{8} \left(\frac{1}{40} \omega_1 + \frac{41}{40} \omega_2\right) M_1 r_1 r_2 + \frac{3}{4} \omega_1 M_2 r_1^2 + \frac{5}{8} (\omega_1 + 2\omega_2) M_2 r_1 r_2 +$$

$$+ \frac{21}{20} M_2 r_2^2 \omega_2 \Big\} + \frac{2}{5} r_1^2 r_2 \omega_1^2 \omega_2 \left(\frac{41}{40} M_1 + M_2\right) \Big] q^2 +$$

$$+ \Big[g^2 \left(\frac{9}{64} M_1 r_1 - \frac{5}{8} M_2 r_2\right) - g \Big\{ \frac{3}{8} r_1^2 \omega_1^2 \left(\frac{41}{40} M_1 + M_2\right) +$$

$$+ \omega_1 \omega_2 r_1 r_2 \left(\frac{3}{20} M_1 + \frac{5}{8} M_2\right) + \frac{2}{5} r_2^2 \omega_2^2 M_2 \Big\} \Big] q +$$

$$+ g^2 \left(\frac{9}{64} M_1 r_1 \omega_1 - \frac{5}{8} M_2 r_2 \omega_2\right) = 0 \quad \ldots . \quad (23).$$

The conditions for the reality of the roots of an equation of the 5th degree are to be found in SALMON, *Modern Higher Algebra*, § 235. As the coefficients of our equations are not simple the conditions for the reality of the roots are not simple either in this case.

§ 4. *On the influence of small finite rotations on the stability.* In the report on this essay my attention was drawn to the fact that what I had found about the influence of small rotations by geometrical considerations might be better deduced algebraically. I therefore here insert the algebraical deduction given in the report, while the following paragraph on the influence of great angular velocities is wholly taken therefrom.

Let $D_0 q^4 - E_0 q^2 + F_0 = 0$ (where D_0, E_0 and F_0 are the values of D, E and F of page 59) be the equation in q^2 on which the stability depends when there is no rotation ($\omega_1 = \omega_2 = 0$). It is the equation considered in the solution of the former problem; what has been called q now was then p. Let ω be the greatest root and ϕ the smallest; the equilibrium is stable for $\phi > 0$. We further have $E_0 = D_0(\omega + \phi)$, $F_0 = D_0 \omega \phi$. If the equilibrium is but little stable or somewhat unstable, ϕ is small while ω, E_0 and D_0 have a moderate value. If we

add small rotations of the order η, we remark, by considering the equation of the fifth degree, that A is changed into $a\eta$, B into $b\eta$, C into $c\eta$, while D remains D_0. E becomes $E_0 + e\eta^2 = D_0(\omega + \phi) + e\eta^2$, F becomes $F_0 + f\eta^2 = D_0\omega\phi + f\eta^2$.

We have for the equation of the fifth degree:

$$(aq^4 - bq^2 + c)\,\eta = q\,\{D_0 q^4 - [D_0(\omega + \varphi) + e\eta^2]\,q^2 + D_0\,\omega\varphi + f\eta^2\}$$

The roots $\sqrt{\omega}$ and $\sqrt{\cdot\ \omega}$ of the original equation have only been somewhat modified. Everything depends on the small roots, which are approximately equal to the roots of the equation of the third degree:

$$c\eta = q\,(-\,D_0\,\omega q^2 + D_0\,\omega\varphi),$$

or

$$D_0\,\omega q^3 - D_0\,\omega q + c\eta = 0$$

The roots of this equation are all real for:

$$27\,c^2\,\eta^2 - 4\,D_0^2\,\omega^2\,\varphi^3 <\, 0\,,$$

or

$$\varphi^3 > \frac{27\,C^2}{4\,D_0^2\,\omega^2}.$$

This condition is more severe than $\varphi > 0$, so that small rotations about the axes of figure can disturb the stability if it is small but cannot make the motion stable if it was unstable before.

§ 5. *On the influence of great angular velocities about the axes of figure.*

Let the values of ω_1 and ω_2 be very great and of the same order and let ω signify a rotation of that same order; we may then write for the equation of the fifth degree:

$$Aq^5 + B\omega q^4 + (C + D\omega^2)\,q^3 + (E\omega + F\omega^3)\,q^2 + (G + H\omega^2)\,q + \\ + I\omega = 0.$$

For $\omega = \infty$ it becomes:

$$Fq^2 = 0.$$

This indicates that for great values of ω three of the five roots become very large and two very small.

The equations of the third degree and that of the second, in which the equation of the fifth degree breaks up, may be deduced in our case in the following way.

For the large roots we substitute $q = k\omega$, giving

$$Ak^3 + Bk^2 + Dk + F = 0.$$

For the small roots we substitute $q = k\omega^{-1}$, which leads to

$$Fk^2 + Hk + I = 0.$$

The conditions for the stability of the motion are that both equations should have only real roots.

Substituting $\omega_2 = \lambda\omega_1$, we have:

$$A = r_1^2 r_2 \left\{ \left(\frac{13}{20}\right)^2 M_1 + \frac{83}{320} M_2 \right\},$$

$$B = r_1 r_2 \left\{ \frac{13}{20} \cdot \frac{1}{40} M_1 r_1 (42 + 41\lambda) + M_2 r_1 \left(\frac{83}{160} - \frac{2}{5}\lambda\right) + \right.$$
$$\left. + M_2 r_2 \frac{82}{320} (1 - \lambda) \right\},$$

$$D = r_1^2 r_2 M_1 \left\{ \frac{1}{40} \cdot \frac{41}{40} + \left(\frac{41^2}{40^2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{13}{20}\right) \lambda \right\} +$$
$$+ r_1 r_2 M_2 \left\{ r_1 \left(\frac{83}{320} + \frac{4}{5}\lambda\right) + \frac{2}{5} r_2 \lambda (1 - \lambda) \right\}.$$

$$F = \frac{2}{5} r_1^2 r_2 \lambda \left(\frac{41}{40} M_1 + M_2\right),$$

$$H = -g \left\{ \frac{3}{8} r_1^2 \left(\frac{41}{40} M_1 + M_2\right) + r_1 r_2 \lambda \left(\frac{3}{20} M_1 + \frac{5}{8} M_2\right) + \frac{2}{5} r_2^2 M_2 \lambda^2 \right\},$$

$$I = g^2 \left(\frac{9}{64} M_1 r_1 - \frac{5}{8} M_2 r_2 \lambda\right).$$

I have calculated the coefficients for the case in which without rotation stability would begin: $M_1 r_1 = \frac{40}{9} M_2 r_2$, supposing moreover the hemispheres to be of like substance: $r_1^4 = \frac{40}{9} r_2^4$.

We find then that the roots of the quadratic are real for every value of λ but not so those of the cubic equation. The discriminant of that equation is a function of the sixth degree in λ. The roots are all real for $\lambda = 0$ and for $\lambda = -1$. Two of them are imaginary for $\lambda = 1$. We

have therefore: The motion is stable for rapid rotations when the upper hemisphere does not rotate or rotates in opposite direction as the lower one with the same angular velocity. The motion is unstable if both hemispheres have the same angular velocity in the same direction.

If we make ω_1 very great and not ω_2, the equation of the fifth degree can be written in the form:

$$Aq^5 + B\omega_1 q^4 + (C + D\omega_1^2)q^3 + (E\omega_1 + F\omega_1^2)q^2 + (G + H\omega_1^2)q + I\omega_1 = 0,$$

giving, for $\omega_1 = \infty$,
for the determination of the moderately large roots:

$$Dq^2 + Fq + H = 0,$$

for that of the very large roots ($q = k\omega_1$)

$$Ak^2 + Bk + D = 0,$$

for that of the very small roots ($q = k\omega_1^{-1}$)

$$Hk + I = 0.$$

The equation of the first degree has of course one real root. Only the other two equations have to be examined. D and H have always opposite signs if ω_1 is much greater than ω_2. The conditions for the stability are thus reduced to one namely

$$4AD > B^2.$$

In the case that M_1 is much greater than M_2 we may write:

$$A = \left(\frac{13}{20}\right)^2 r_1^2 r_2 M_1 ; \; B = \frac{13}{20} \cdot \frac{42}{40} r_1^2 r_2 M_1 ; \; D = \frac{41}{1600} r_1^2 r_2 M$$

and there is stability. We thus see that stability is possible when there exists rapid angular velocity.

DESCARTES EN DE BREKINGSWET.

DOOR

C. DE WAARD.
(Middelburg.)

Prof. KORTEWEG heeft in het *Nieuw Archief*, *Tweede Reeks*, *deel III*, pag. 57—71 aan de hand van verschillende op het Trippenhuis berustende brieven aangetoond, dat het zeer waarschijnlijk geacht moet worden, dat DESCARTES geheel onafhankelijk van de vondst van SNELLIUS tot zijne kennis omtrent de brekingswet is gekomen. Mij bezighoudende met een ander onderzoek werd mijne aandacht gevestigd op een handschrift, waaruit mij bleek, dat ook iets kan medegedeeld worden omtrent het bovenstaande onderwerp en dat behoort bij de door prof. KORTEWEG gegevene brieven.

Het bedoelde manuscript is het journaal van ISAAC BEECKMAN, geboren te Middelburg in 1588 [1]) en vooral bekend geworden in zijne functie van rector aan de Latijnsche school te Dordrecht, waar hij de leermeester in de wiskunde was van HORTENSIUS en JAN DE WIT; hij was bij zijne tijdgenooten beroemd om zijne groote mathematische kennis, schijnt aanvankelijk ook deel uitgemaakt te hebben van de in 1636 benoemde commissie ter beoordeeling van de door GALLILEI aan de Staten-Generaal voorgestelde oplossing van het vraagstuk van het bepalen der lengten op zee, stond verder in vriendschappelijke betrekking met de meest bekende geleerden dier dagen o.a. met MERSENNE en GASSENDI. Bekend is de aardige wijze waarop BEECKMAN reeds in 1618 met DESCARTES, toen nog jong soldaat in het leger van MAURITS, te Breda kennis maakte en een warme vriendschap sloot, die, met een kleine onderbreking, slechts door BEECKMAN's overlijden in 1637 eindigde. [2])

---

[1]) Niet „omstreeks 1570" zooals steeds wordt opgegeven.

[2]) Van het bedoelde handschrift van BEECKMAN is niet alleen meermalen sprake in de briefwisseling tusschen DESCARTES, BEECKMAN en MERSENNE (zie

Wanneer Descartes, na een veeljarig verblijf in het buitenland wederom ons land bezoekt om spoedig daarin dan geruimen tijd te verblijven, dan geldt, geheel vreemdeling als hij in Holland is geworden, natuurlijkerwijze zijn eerste bezoek zijn ouden trouwen vriend Beeckman en hij verhaalt dezen geestdriftig de in den langen tijd van scheiding gedane ontdekkingen. Geregeld vindt men die derde komst van Descartes in Holland gesteld in 1629 [1]; daar het in de questie natuurlijk zeer aankomt op de data, zij hier de aanhef van de aanteekening van Beeckmans journaal gegeven, waaruit blijkt, dat Descartes reeds in 1628, zij het ook slechts kort, hier te lande heeft vertoefd; wellicht is hij ook om andere redenen eigenaardig:[2])

Historia Descartes ejusque mecum necessitudo.

D. Renatus Descartes du Peron, qui anno 1618 in meam gratiam Bredae Brabantinorum Musicae Compendium conscripsit, quo suam sententiam de musica mihi aperuit, quodque huic operi insertum est, is, inquam, die 8° mensis Octobris 1628 ad me visendum venit Dortrechtum, cum prius frustra ex Hollandia Middelburgum venisset ut me ibi quaereret. Is dicebat mihi se in arithmeticis et geometricis nihil amplius optare, id est, se tantum in iis his novem annis profecisse quantum humanum ingenium capere possit, cujus rei non obscura mihi specimina reddidit, paulo post Parisiis suam Algebram quam perfectam dicit quaque ad perfectam geometriae scientiam pervenit, imo qua ad omnem cognitionem humanam pervenire potest, propediem ad me missurus, aut ipsemet huc ad eam edendam et limandam venturus ut communi opera id quod restat in scientiis perficiamus; Gallia enim, Germania et Italia peragrata, dicit se non invenisse alium, cum quo secundum animi sui sententiam disserere et a quo adjumentum in studiis suis sperare possit quam per me. Tantam dicit esse ubique inopiam verae philosophiae quam vocat operam navantium.

Cousin, T. VI, p.p. 149, 152, 163; Adam et Tannery, Oeuvres de Descartes, Tome I, (1897) pp. 160, 161, 171) maar ook in het „Wisconstich Filosofisch Bedrijf" van Henric Stevin, Leiden 1667, 2e boek, pag. 3 (zie *Nieuw Archief, Tweede Reeks, deel V*, pag. 112); de daar genoemde Abraham Beeckman was Isaac's broeder en gaf na den dood van den laatste ook nog een werk op diens naam uit. Het manuscript berust op de Provinciale Bibliotheek in Zeeland.

[1]) Ook door prof. Korteweg: „Comme l'on sait, Descartes entra en ce pays pour la troisième fois au printemps de 1629" l.c. p. 68. Evenzoo bij Adam et Tannery, oeuvres complètes de Descartes, T. I, pag. 13; waaruit tevens blijkt dat de opgave aan Baillet is ontleend.

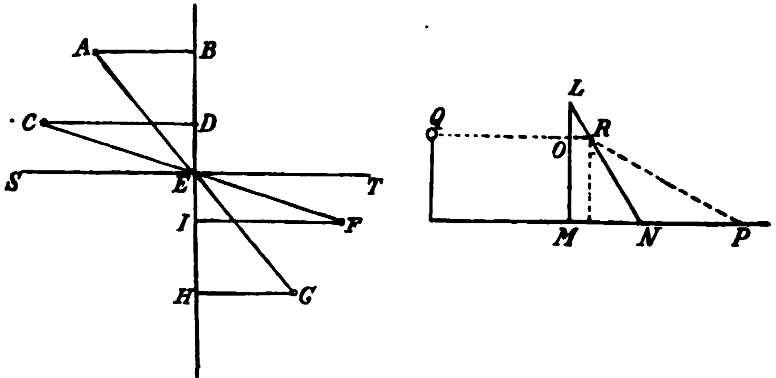
[2]) Fol. 333 recto van het H.S.

Ego vero illum omnibus quos unquam vidi aut legi arithmeticis et geometricis praefero . . . . .

Men ziet hieruit hoe hoog beide mannen elkander destijds waardeerden. Beeckman geeft daarna verschillende voorbeelden van de nieuwe „Algebra generalis" van Descartes, welke deze hem heeft medegedeeld, later nog gevolgd door grootere brokstukken, wanneer Descartes hem het manuscript heeft toegezonden, dat waarschijnlijk het volgens Millet geheel verloren gegane „Traité d'Algèbre" is geweest en waarop later wellicht nog gelegenheid is terug te komen. Aangaande ons onderwerp van het oogenblik vinden we onder dezelfde dagteekening van 8 October 1628 na de vermelding der andere ontdekkingen:[1])

Angulus refractionis a Descartes exploratus.

Idem etiam explorat quantitatem anguli refractionis per vitreum triangulum LMN, in quod radii paralleli in latus LM ad rectangulos incidunt, tegitque LM charta perforatque duntaxat ad O, ut ibi radius admittatur, atque observat angulum



refractionis radii QRP. Cognito uno angulo refractionis deducit inde reliquos secundum angulorum sinus, ut enim inquit AB ad HG ita CD ad IF. Considerat enim sub ST esse aquam, radios esse AEG, CEF, idemque videntur ipsi pati quod brachia aequalia bilancis quo finibus appensa sunt pondera, quorum id quod in aqua est levius est et brachium attollit. Tandem quaerit multa puncta qualia est R ac circa illa hyperbolam ducit per quam omnes radii paralleli incidentes concurrunt in unum punctum. Quod vitrum optimum foret ad faciendos tubos oculares, nam inquit hyperbola minor ejusdem generis serviet

[1]) Fol. 333 verso.

ad vitrum concavum faciendum. Dicit se jussisse fieri convexum tale sed ita ut mechanicus torno aequaliter super eodem centro id raderet, quod ego aliquando imperavi fabro statuens toties mutare lineam chalibeam secundum quam vitrum formaret donec mechanice viderem omnes radios perfecte convenire. Ipse dicit sibi perfecte successisse. —

De laatste zinsneden hebben betrekking op de proefnemingen van DESCARTES tot het vervaardigen van hyperbolisch geslepen lenzen met LE FERRIER te Parijs, die later te Amsterdam weer ter hand werden genomen[1]) en welk probleem bij DESCARTES nauw met het vinden van de brekingswet verbonden was; het vraagstuk werd overigens, doch uitsluitend in theorie, reeds aangeroerd in de *Ad Vitellonem paralipomena* van KEPLER (1604) en het is ook niet onmogelijk dat het allereerste denkbeeld bij DESCARTES is opgekomen door sommige uitlatingen in de *Magia Naturalis* van PORTA (1589) daaromtrent, een destijds verbazend veel gelezen werk.[2]) Wat de brekingswet zelve aangaat, maakt het op ons, den aanhef van BEECKMAN's aanteekening lezende, den indruk, alsof DESCARTES onmiddellijk na zijn komst hier te lande zich op staanden voet naar BEECKMAN heeft begeven, iets wat bij de warme vriendschap, die hen verbond, lang niet onwaarschijnlijk is. Hij heeft blijkbaar de wet gevonden, met zijne andere nieuwe denkbeelden, waarmede hij Holland binnentreedt, gedurende zijn veeljarig verblijf in het buitenland en van eene kennismaking met SNELLIUS' manuscripten (in 1632 voor het eerst door GOLIUS ontdekt) aan zijne komst bij BEECKMAN voorafgaand, kan bij de argelooze mededeeling van DESCARTES in het geheel niet gedacht worden. Hij was zoo weinig met

[1]) D. J. KORTEWEG: Een en ander over CONSTANTIJN HUYGHENS als beminnaar der stellige wetenschappen en zijne betrekking tot DESCARTES (*Versl. en Meded. Kon. Ac.*, 3e reeks, dl. IV, pp. 263—268; vertaling *Archives néerlandaises* T. XXII, pp. 435—439.

[2]) Agrippam cum ante 20 annos legerem — schrijft BEECKMAN in Februari 1629 — memini eum dicere se posse lunae inscribere litteras quas alius in altera terrae regione possit legere, quod D. Descartes dicit Baptissam Portam referre ad vitra in infinitum comburentia, per quae etiam videtur in luna quasvis litteras exaraturus. At nugatur cum Agrippa Porta, neuter enim tenuit. Verum si quis posset facere tubum, per quem videri possent quae in luna aguntur . . . . (fol. 341 verso: Lunae an litterae inscribi possint absentibus legendae). Zooals bekend is meende DESCARTES met zijne van hyperbolisch geslepene lenzen voorziene kijkers de kleine voorwerpen op de hemellichamen even goed te zullen kunnen onderscheiden als die op aarde.

de toestanden in Holland op de hoogte gebleven dat zelfs de lang geleden verhuizing van zijn vriend BEECKMAN, dien hij zoo hoog achtte, uit Middelburg naar Utrecht, Rotterdam en Dordrecht, hem geheel onbekend was gebleven.

De brief van CONSTANTIJN HUYGHENS aan GOLIUS van Juli 1629 blijkt verder niet de eerste aanwijzing te zijn van de wet der sinussen in Holland.[1]) Zij was reeds in October 1628 door DESCARTES medegedeeld aan BEECKMAN, die zich na DESCARTES' bezoek met verdubbelde belangstelling op verschillende vraagstukken der optica en wiskunde werpt. BEECKMAN geeft ons bovendien de door DESCARTES gevondene wet in veel duidelijker termen dan de flauwe aanwijzing in den brief van HUYGHENS van van Juli 1629, en hij deelt ons voorts in zijne aanteekening den vorm mede zooals zij destijds uit den mond van DESCARTES zelve werd vernomen.

MIDDELBURG, 25 Juni 1905.

---

[1]) KORTEWEG, Descartes et les manuscrits de Snellius, l.c. pag. 68.

EENE CORRESPONDENTIE VAN DESCARTES UIT DE JAREN 1618 EN 1619,

DOOR

C. DE WAARD.
(Middelburg.)

Het is bekend, dat DESCARTES na zijn vertrek uit Parijs in 1617 of 1618 als vrijwilliger in Staatschen dienst is getreden met Breda als garnizoen, waar hij eenigen tijd als zoodanig heeft vertoefd, om daarna door zijne groote omzwervingen door Europa zijn gezichtskring nog meer te verruimen, en zich eerst weer in 1628 voor goed in de Nederlanden te vestigen, wanneer hij met de nieuwe denkbeelden te voorschijn komt, die zijne vrienden verbazen en in 1637 door de eerste publicatie de aandacht van meerderen op hem vestigen. De tusschenliggende jaren zijn echter voor een overzicht van de geleidelijke ontwikkeling van de denkbeelden van DESCARTES van groot gewicht en in het bijzonder verdienen die van zijn eerste verblijf in de Nederlanden de aandacht.

DESCARTES stelde te Breda in 1618 zijn *Compendium Musicae* samen, een werk, dat evenwel door verschillende omstandigheden eerst in 1650 te Utrecht werd gepubliceerd. In verband daarmede staat het feit, dat hij dezen arbeid uitsluitend vervaardigde terwille van een Hollandschen vriend, die DESCARTES toevalligerwijze te Breda ontmoette, kennis met dezen maakte, uit welke kennismaking weldra een warme vriendschap ontstond. Die vriend, voor welken DESCARTES al dadelijk zooveel sympathie gevoelde, was ISAAC BEECKMAN, die ook wanneer hij later verbonden is aan de Latijnsche scholen te Utrecht, Rotterdam en Dordrecht in de geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen in de Nederlanden eene niet onbelangrijke plaats inneemt. In 1618 woonde BEECKMAN echter te Middelburg. Hij was aldaar geboren 10 December 1588 N.S., dus zeven jaren vóor DESCARTES, had de Leidsche hoogeschool bezocht en was

in 1618 te Caen gepromoveerd bij den bekenden MORIN, waarna hij zich te Middelburg vestigde als doctor medicinae, zonder nochtans eenige praktijk uit te oefenen.

ISAAC BEECKMAN schijnt nu de eenige weg te zijn, waarlangs we ook iets meer omtrent de studiën van DESCARTES in dezen tijd kunnen te weten komen, en inderdaad levert een door BEECKMAN nagelaten handschrift, waarin hij vooral alles wat zijne onderzoekingen betrof, aanteekende, ons ook verschillende bijzonderheden omtrent zijn jeugdigen vriend. [1])

Reeds spoedig na zijn terugkeer uit Caen maakte BEECKMAN een uitstapje naar Breda. „Voor de ſlachtijt des jaers 1618 ben ic te Breda gecomen om Pieteroom te helpen wercken, en te vrijen oock." [2]) Weinig vermoedde hij toen, wien hij daar zou ontmoeten! De kennismaking met DESCARTES, volgens het bekende verhaal naar aanleiding van een in de landstaal aangeslagen vraagstuk, waaromtrent DESCARTES den zich eveneens onder de aanwezigen bevindende BEECKMAN om inlichtingen verzocht, leidde tot waardeering, toen de jonge soldaat hem den volgenden dag de oplossing kwam brengen zooals BEECKMAN voor de vertaling van het vraagstuk had verlangd. Waarschijnlijk geschiedde dit in het begin van November 1618: „Nitebatur heri qui erat 10 Nov. — lezen we in het handschrift [3]) — Bredae gallus picto probare nullum eſſe angulum revera hoc argumento....." Na deze eerste aanwijzing blijken beide mathematici elkaar nog menigmaal gesproken te hebben, zij verdiepen zich in verschillende vraagstukken en weldra is de vriendschap voor goed gesloten. Ook over de theorie der muziek wordt van gedachten gewisseld en DESCARTES belooft zijn vriend zijne denkbeelden daaromtrent in een samenhangend geheel neer te schrijven. „Mr. Duperon Picto — teekent BEECKMAN

---

[1]) Het H.S. heeft geen bepaalden titel doch op het schutblad staat in driehoeksvorm geschreven: LOCI COMVNES || L[oci] communes ſunt formae omnium rerum agendarum, || virtutum, vitiorum aliorumque communium, the || matum communes, quae fere in vſum va || riasque rerum humanarum ac litte || rarum cauſas incidere poſsunt. — || Qui destinauit per omne genus auctorum lectione graſsari, || primo sibi quam plurimos paret locos: eos ſumat || partim a generibus ac parte vitiorum vir || tutumque, partim ab alys quae ſunt || in rebus mortalium praecipia, di || geratque iuxta rationem af || finitatis et repugnantiae. || Nam et quae inter ſe cog || nata sunt vltra ad || monent quid con || sequatur, et con || trariorum est || eadem me || moria. || En daaronder: Anno 1604. Het H.S. berust op de Provinciale Bibliotheek in Zeeland.

[2]) Fol. 94 verso.

[3]) Fol. 97 verso.

aan [1]) — Renatus Descartes vocatur in ea Musica, quam mea caufa jam defcribit." BEECKMAN ontving het handschrift nog vóór zijn vertrek uit Breda, dat waarschijnlijk den 2en Januari 1619 plaats vond.

De te Breda gesloten vriendschap verflauwde niet, toen BEECKMAN weder te Middelburg was teruggekeerd, en had eene verdere correspondentie tengevolge, zooals BEECKMAN trouwens tot zijnen dood in 1637 met DESCARTES in verbinding bleef.

De correspondentie is hierachter afgedrukt. Een enkel woord over de bron waaraan zij is ontleend, die ook trouwens zelve meer dan eens in de latere briefwisseling van DESCARTES ter sprake komt. Het handschrift van BEECKMAN is een foliant van 472 bladen [2]), gebonden in lederen band met koperen beugels en grootendeels in het Latijn gesteld. Het is aangelegd als journaal, d.w.z. BEECKMAN teekende achtereenvolgens elken dag op wat hem bij zijne studie belangrijk voorkwam, maar hij nam er ook wel papieren in op, die hem van anderen in handen kwamen en hem van gewicht schenen. Als journaal werd het omstreeks 1611 aangelegd en eindigt met 1635; zijn uit den eersten tijd de aanteekeningen schaars, omstreeks 1615 zijn die al veelvuldiger geworden en blijkbaar wordt later van het dagboek steeds gebruik gemaakt; niet altijd wordt de datum evenwel gevonden doch wordt deze slechts met groote tusschenruimten genoemd. Meestal is het schrift loopend, slechts een betrekkelijk klein aantal bladen is in schoonschrift geschreven. Naar mijne meening heeft het handschrift aanvankelijk niet den vorm van het tegenwoordige boekdeel gehad, maar maakte BEECKMAN op bundels papier van kleiner omvang zijne aanteekeningen. Eerst later, toen de hoeveelheid papier in omvang was toegenomen en de schrijver de waarde ervan meer en meer op prijs ging stellen, zijn de reeds beschreven bundels met een ruime voorraad schoon papier bijeengebonden. Uit deze omstandigheid is het dan ook te verklaren, dat van de marginale aanteekeningen somtijds gedeelten zijn weggevallen, die bij het inbinden moeten zijn weggesneden. Ook het feit, dat enkele malen brieven zich bevinden tusschen aanteekeningen van jongeren tijd, zal hierin zijn oorzaak vinden. Dit is het geval met brief I hierachter afgedrukt en het door BEECKMAN gecopieerde *Compendium Musicae*, die zich bevinden tusschen

---

[1]) Fol. 104 verso; Picto = le Poitevin, inwoner van Poitou.

[2]) De paginatuur 118—180 komt echter tweemaal achtereen voor.

aanteekeningen van 1620. Vergis ik mij in dezen, dan heeft BEECKMAN dien brief en het *Compendium* eerst later in zijn boek overgeschreven. Beide stukken volgen echter in het handschrift op elkaar en waar het *Compendium* voor BEECKMAN in December 1618 werd vervaardigd mag dit ook verondersteld worden van het uitvoerige stuk dat onder no. 1 is gegeven, dat in het handschrift aan het *Compendium* vorafgaat en van een dergelijke strekking is: het is eigenlijk meer eene op schrift gestelde verklaring, hoe DESCARTES over sommige zaken dacht, dan wel een brief, en als zoodanig behoeft het geen verwondering te wekken, dat BEECKMAN haar bekomen moet hebben terwijl beide zich nog te Breda bevonden. — De brieven II—VII, geschreven in 1619, bevinden zich in BEECKMANS handschrift tusschen aanteekeningen van nog lateren datum dan de vorige nl. 1627; met nog andere stukken uit 1618, b.v. BEECKMANS promotie betreffende, vormen zij een gedeelte dat voorafgegaan en gevolgd wordt door eenige blanco bladen en schijnen dus ook weer op deze plaats bij het binden ingevoegd. Overigens dragen deze brieven eene aanwijzing van plaats en datum, zoodat zich hier geen zwarigheden voordoen. Opgemerkt zij, dat BEECKMAN zich steeds van den nieuwen stijl bedient.

Bij vele brieven zijn marginale aanteekeningen in loopend schrift gemaakt, terwijl de tekst van alle stukken in schoonschrift is geschreven. Blijkbaar zijn die aanteekeningen er later door BEECKMAN bijgeplaatst; zij zijn in het hiernavolgende cursief aangegeven. BEECKMAN schijnt reeds toen groote waarde aan de uitingen van zijn jeugdigen vriend toegekend te hebben, welke hij trouwens later ook neerschreef te stellen boven allen, welke hij ooit gesproken of gelezen had.

Ik laat nu de correspondentie zonder verdere voorafspraak volgen.

Fol. 160 verso—Fol. 162 verso.

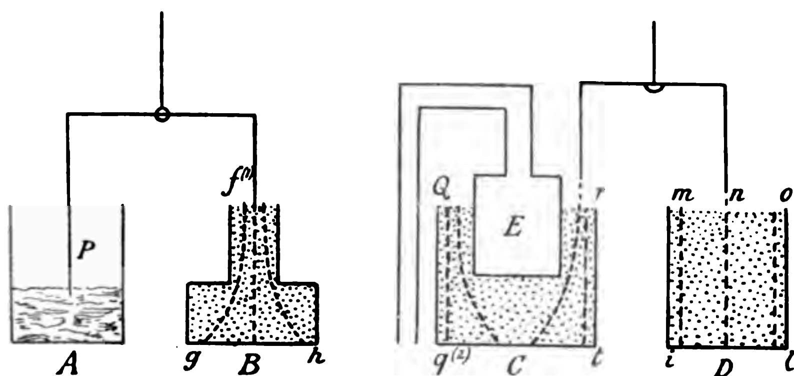
(I. RENÉ DESCARTES te Breda aan ISAAC BEECKMAN te Breda December 1618. [1])

aquae cum primentis in vase ratio reddita, a D. Descartes.

Vt plane de propositis quaestionibus meam mentem exponerem, multa ex meis mechanicae fundamentis essent praemittenda, quod, quia tempus non finit, breviter ut jam licet conabor

[1]) Boven dit stuk staat in BEECKMAN's boek met loopend schrift evenals de marginale aanteekeningen: *Rene du Peron mihi.* Op grond van het hierboven gezegde acht ik den brief geschreven terwijl BEECKMAN zich nog te Breda bevond, waar hij stellig nog 26 December was en van waar hij waarschijnlijk 2 Januari d. a. v. vertrok.

explicare. Et primo quidem ex varijs gravitandi modis, quos jam omnes enumerare non opus eſt noſtrae, duo varij hic diſtinguendi ſunt, nempe quomodo aqua in vaſe exiſtens ejuſdem vaſis fundum premit, et quomodo totum ipſum vas ſimul cum aqua, quae in ipſo eſt, gravitet; duo enim illa plane diſtincta ſunt, ita vt unum altero plus vel minus gravitare poſſe certum ſit. Secundo, vt quid ſignificet verbum gravitare intelligatur, fingendum eſt corpus, quod gravitare dicitur, deorſum moveri et illud in primo inſtanti motus conſiderare; vis, cum qua jn primo jnſtanti impellitur motus, ea eſt quae gravatio vocatur, non illa quae illum in toto motu fert deorſum, quae a prima valde diſtincta eſſe poteſt. Dicemus igitur gravitationem eſſe vim, qua proxima ſuperficies corpori gravi ſubjecta ab eodem premitur. Tertio in illo motus principio imaginabili notandum etiam initium imaginabile celeritatis, qua partes corporis gravitantis corporis diſcendent; haec enim non minus confert ad gravitationem quam corporis ipſius quantitas verbi gratia. Si unus aquae atomus deſcenſurus ſit duplo celerius quam duo alij atomi, ille ſolus aeque gravitabit atque duo alij quibus praemiſſis.



Sint quatuor vaſa ejuſdem latitudinis in fundo, ejuſdem ponderis, ſi vacui ſint, et ejuſdem altitudinis; non infundatur in A plus aquae quam B poteſt continere, reliqua 3ª impleantur quantum poſſunt; aqua una cum vaſe A aeque gravitabit atque aqua ſimul cum vaſe B.

Secundo aqua ſola in fundo vaſis B aeque gravitabit atque

---

[1]) De figuur in het H.S. heeft F.
[2]) De figuur in het H.S. heeft g.

aqua ſola in fundo vaſis D et per conſequens magis quam aqua in fundo vaſis A, aeque jtem atque aqua in fundo vaſis C.

Tertio D, totum vas et aqua ſimul non magis nec minus P gravitat quam C totum etiam in quo embolus E firmus eſt.

Quarto, jllud C totum magis gravitat quam B totum, ubi heri hallucinabar.

Prior pars per ſe nota eſt, ſecunda ita demonſtratur. Aqua in utroque vaſe aequali vi premit fundum vaſis, ergo aequaliter gravitat. Probatur antecedens hoc pacto: Tantum aquae incumbit ſupra omnia puncta determinabilia in fundo unius quam in fundo alterius, ergo aequali vi premuntur. Verbi gratia in fundo unius determinentur puncta g, B, h, in alterius i, D, l; dico omnia illa puncta aequali vi premi, quia ſcilicet premuntur lineis aquae imaginabilibus eiuſdem longitudinis nempe a ſuprema parte vaſis ad imam; neque enim f g linea hic longior cenſenda eſt quam f B vel aliae, non premit enim punctum g ijs partibus, quibus curva eſt et longior, ſed ijs tantum, quibus deorſum tendit, quibus aequalis eſt alijs omnibus. Probandum autem eſt ſolum punctum f aequali vi premere 3ª puncta g, B, h, atque tria diſtincta m, n, o premunt alia 3ª i, D, l[1], quod fit hoc ſyllogiſmo: Res graves aequali vi premunt omnia circumquaque corpora, quibus expulſis aeque facile inferiorem locum occuparent. Atqui ſolum punctum f aeque facile occuparet inferiorem locum, ſi poſſet expellere tria puncta g, b, h, atque tria puncta m, n, o, ſi expellerent alia tria puncta i, D, l. Ergo ſolum punctum f aequali vi premit tria ſimul puncta g, b, h, atque tria puncta diſtincta m, n, o premunt alia tria i, D, l. Major videtur eſſe tam clara et evidens, ut poſſit eſſe principium ſcientificum. Minor ulterius probatur. Imaginentur omnia inferiora puncta g, B, h et i, D, l eodem momento aperiri vi gravitationis corporum ſuprapoſitorum, certe eodem inſtanti concipiendum erit ſolum punctum f triplo celerius moveri quam unumquodque ex punctis m, n, o. Illi enim tria eodem momento loca erunt explenda, quo momento unum tantum cuilibet ex punctis m, n, o erit occupandum. Ergo vis, qua ſolum punctum f premit inferiora, aequalis eſt vi trium ſimul punctorum m, n, o. Eodemque modo probari poteſt de omnibus alijs punctis imaginabilibus in fundo vaſis B. Aequaliter a ſuperiore parum aquae, quae eſt in f, atque omnes partes fundi vaſis D premuntur ab omni aqua incumbente, ideoque

[1]) Het H.S. heeft i, B, l.

aequali vi fundum vafis B premi ab aqua incumbente atque fundum vafis D, quod erat probandum.

Vna tamen objectio proponi poteft meo judicio non contemnenda et cuius folutio fuperiora confirmabit. Quae tamen omnia corpora aequalis magnitudinis et gravitatis, fi deorfum ferantur, habent certum quemdam aequalem celeritatis modum quem non excedunt, nifi ab aliqua vi extranea impellantur. Ergo male affumitur in fuperioribus punctum f propondere ut triplo celerius moveatur quam unum quodlibet ex punctis m, n, o, cum a nulla vi externa dici poffit illud impelli. Abfurdum enim foret dicere illum ab inferioribus aquae partibus attrahi, quod tamen mihi nuper valde eronnee et non agitanter ex ore elapfum eft. Hic enim confideramus: illud vt coetera corpora premit non vt ab alijs impellitur vel attrahitur. Jta tamen ad objectionem refpondeo. Antecedens eft veriffimum, falfo autem ex eo deducitur punctum f non poffe ad triplicem celeritatem propendere. Duo enim diverfa funt in ratione ponderum et valde diftinguenda, nempe propenfionem ad motum et motum ipsum; in propenfione enim ad motum nulla habenda eft ratio celeritatis, fed tantum in motu[1]) ipfo. Corpora enim quae deorfum tendunt, non propendent vt hac vel illa celeritate ad inferiorem locum moveantur, fed vt quam citiffime poteft eo perveniant, unde fit, vt punctum f poffit habere triplicem propenfionem, cum fint tria puncta per quae poffit defcendere, puncta autem m, n, o vnicam tantum, cum fint tantum una puncta, per quae poffint moveri. Duximus autem lineas f g, f B, m i, etc., non quod velimus ita lineam mathematicam aquae defcendere, fed ad faciliorem demonftrationis intelligentiam; cum enim nova fint, et mea, quae dico, multa neceffario supponenda funt, non nifi integro tractatu explicanda; fatis igitur me demonftraffe existimo quod fusceperam.

Ex obiecto autem argumento fequitur, fi revera defcendat aqua ex utroque vafe, fundis illorum eodem momento fublatis, in nulla parte motus imaginabili tantum gravitare aquam vafis B quantum aqua vafis D tum propter determinatam celeritatem cuiuflibet corporis, unde fit ut ibi dici poffit infimas aquae partes in vafe B attrahere fuperiores quodammodo, efficereque vt celerius defcendant motu vacui, quam fert illorum motus

[Hae]c eft ratio [qu]ae tuum motum [pe]rpetuum [con]firmat.[2])

---

[1]) Het H.S. heeft inmota.

[2]) Deze kantteekening is geschreven met dezelfde hand als de tekst en behoorde dus blijkbaar tot het stuk zooals het door DESCARTES is opgesteld. In tegenstelling met de andere kantteekeningen is van deze de rand bij het binden van het H.S. weggesneden; dit gedeelte vormde dus eerst een afzonderlijk geheel.

naturalis. Tum etiam quia, ſi ſupponamus ordinate et mathematice totam aquam ſimul vtriuſque vaſis deſcendere, longitudo linearum m i, n D, o l, semper eadem remanebit, linearum autem f g, f B, f h, perpetuo minuetur, nullumque inſtans in motu poteſt imaginari, in quo hae lineae illis non ſint breviores.

Ex dictis clare ſequitur, quanto plus aqua in fundo vaſis B gravitet quam in fundo vaſis A: tanto ſcilicet, quanto linea f B longior eſt quam A. Sequitur ſecundo aquam in fundo vaſis C aeque gravitare atque in fundo vaſium B et D ex praemiſſa demonſtratione.

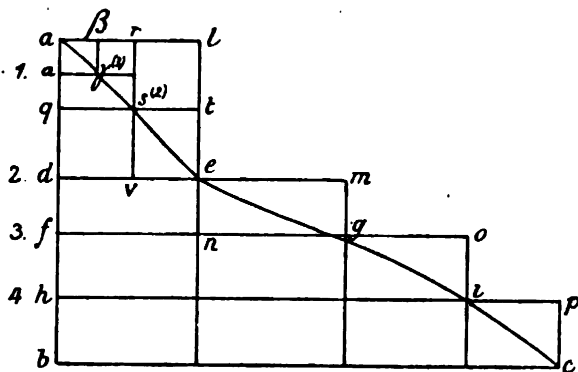
Jam vero conſideremus non ſolum aquae gravitationem in fundo vaſium, ſed vaſorum ipſorum ſimul cum aqua illis injecta gravitatione, quam aequalem eſſe vaſis C et vaſis D, dum ſtant in aequilibrio et quieſcunt, ſic probo: Omnia quae adigere poſſunt ut deſcendant, in utroque ſunt aequalia. Ergo probo antecedens. Primo enim vaſa ſunt poſita eiuſdem ponderis; aqua autem aequaliter premit fundum vnius atque alterius, et in vtroque tali modo vt, ſi totum vas deſcenderet, aquae gravatio totum ſuum finem conſequeretur. Ergo etc. Hoc poſterius probo. Si enim deſcenderet verbi gratia vas C per unum minimum imaginabile, aqua ex q deſcenderet verſus partem f. et iterum versus C, vt impleret locum relictum a corpore fixo E [1]), ſic quid moveretur per celeritatem 1½ item aqua in r per celeritatem etiam 1½, quod aequi polleret celeritati trium punctorum m, n, o in vaſe altero, quorum unumquodque deſcendit per celeritatem 1.

Denique totum vas B non tantum gravitat quam vas C, etiamſi aqua fundum vtriuſque aequaliter premat; ſi enim imaginetur vas B deſcendere ſuum finem plane aqua non conſequetur, vt faciet in vaſe C. Tunc enim deſcendet tantum aqua in loco f per celeritatem vnius, quae tamen premit fundum vt tria; atque eadem eſt eorum duorum differentia, qualis eſt illius, qui in navi existens baculo sive conto nautico alteram ejuſdem navis partem propelleret, et illius, qui conto littus ipſum vel corpus aliquod aliud a navi ſeparatum pulſaret; hic enim navim moveret, alter nullo modo. Quod tam perſpicuum eſt vt erubeſcam me nudius tertius illud non advertiſſe, haec quae iam scripſi non solum vt tibi aliquod monumentum mei reliquerem, ſed etiam dolore et iracundia motus, quod nuper rem adeo facilem ex tempore non potuerim explicare nec quidem concipere.

---

[1]) Het H.S. heeft E.

In propofita quaeftione ubi imaginatur fingulis temporibus novam addi. [1]) Vim qua corpus grave tendat deorfum, dico vim illam eodem pacto augeri, quo augentur lineae tranfversae d e, f g, h i, et aliae infinitae transverfae, quae inter illas poffunt imaginari. Quod vt demonftrem, affumam 1° pro minimo vel puncto motus quod caufatur a prima, quae imaginari poteft attractiva vi terra quadratum a l d e; pro 2° minimo motus *Lapis in vacuo verfus terrae centrum cadens; quantum fingulis momentis motu crefcat ratio Descartes.*



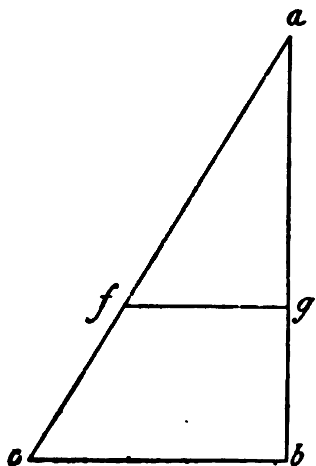
habebimus duplum nempe d m g f, pergit enim ea vis, quae erat in primo minimo, et alia nova accedit illi aequalis. Jtem in tertio minimo motus erunt 3, vires nempe primi, secundi, et tertij minimi temporis etc. Hic autem numerus eft triangularis, vt alias forte fufius explicabo, et apparet hic figuram triangularem a b c representare. Immo inquies funt partes protuberantes a l e, e m g, g o i, etc., quae extra trianguli figuram exemit. Ergo figura triangulari illa progreffio non debet explicari. Sed refpondeo illas partes protuberantes oriri ex eo, quod latitudinem dederimus minimis, quae indivifibilia debent imaginari et nullis partibus conftantia; quod ita demonftratur: Dividam illud minimum a d in duo aequalia in q jamque a r s q eft minimum motus et q t e d fecundum minimum motus, in quo erant duo minima virium; eodem pacto

[1]) Over den inhoud van dit gedeelte van den brief houdt ook BEECKMAN zelve in zijn journaal beschouwingen en zegt daar op fol. 106 recto: .... *Haec ita demonstravit Mr. Peron, cum ei anfam praebuiffem rogando an poffit quis fcire quantum fpacium res cadendo conficeret unica hora, cum fcitur quam conficiat duabus horis* .... Die aanteekening is van vóor 26 December, wanneer BEECKMAN zich nog stellig te Breda bevindt.

[2]) De figuur in het H.S. heeft g.

[3]) De figuur in het H.S. heeft o. Wat de figuur in haar geheel betreft, heeft BEECKMAN haar, om plaats te winnen, beneden de lijn d m van onderen naar boven in elkaar geschoven.

dividamus d f, f h, etc. Tunc habebimus partes protuberantes a r s; fit e etc. Minores res funt parte protuberante a l e vt patet. Rurſum fi pro minimo aſſumam minorem vt a α, partes protuberantes erunt adhuc minores vt a β γ [1]) etc. Quod fi denique pro illo minimo aſſumam verum minimum nempe punctum, tum illa partes protuberantes nullae erunt, quia non poſſunt eſſe totum punctum vt patet, ſed tantum media pars minimi a l d e, atqui puncti media pars nulla eſt. Ex quibus patet fi imaginetur verbi gratia lapis ex a ad b trahi a terra in vacuo per vim, quae aequaliter ab illa ſemper fluat priori remanente, motum primum in a ſe habere ad vltimum quod eſt in b, vt punctum a ſe habet ad lineam b c; mediam vero partem g b triplo celerius pertransiri a lapide quam alia media pars a g, quia triplo majori vi a terra trahitur, ſpatium enim f g b c triplum eſt ſpatij a f g, ut facile probatur; et fic proportione dicendum de caeteris partibus.



Aliter vero poteſt haec quaeſtio proponi difficilius, hoc pacto: Imaginetur lapis in puncto a manere, ſpatium inter a et b vacuum, jamque primum verbi gratia hodie hora 9 Deus creet in b vim attractivam lapidis et fingulis poſtea momentis nouam [2]) et novam vim creet, quae aequalis fit illi quam 1° momento creavit, quae iuncta cum vi ante creata fortius lapidem trahat et fortius iterum, quia in vacuo, quod ſemel motum eſt, ſemper movetur, tandemque lapis, qui erat in a, perimat ad b hodie hora 10ª Si petatur quanto tempore primam mediam partem ſpatij confecerit nempe a g, et quanto reliquum, respondeo lapidem deſcendiſſe per lineam a g tempore $^1/_8$ horae, per ſpatium autem g b $^7/_8$ horae. Tunc enim debet fieri pyramis ſupra baſim triangularem, cujus altitudo fit a b, quae quocumque pacto dividatur vna cum tota pyramide per lineas tranſverſas aeque diſtantes ab horizonte. Tanto celerius lapis inferiores partes lineae a b percurret, quanto majoribus inſunt totius pyramidis ſectionibus. Aliter denique proponi

---

[1]) Het H.S. heeft a β e.

[2]) notam?

poteſt de reditu redituum, qui ſi ſingulis momentis augeri imaginetur et quaeratur, quod hoc vel illo tempore debeatur. Solvetur haec quaeſtio etiam proportionibus ductis a triangulo, ſed dividi non debet linea a b in partes arithmeticas hoc eſt aequales, ſed in geometricas, ſive proportionales, quae omnia evidentiſſime ex mea Algebra geometrica poſſem probare', ſed nimis longum foret.'

Onmiddellijk op dezen brief volgt het door DESCARTES voor BEECKMAN samengestelde *Compendium Musicae*, loopende van fol. 163 recto tot folio 178 verso, waarin DESCARTES aan BEECKMAN zijne denkbeelden omtrent de theorie der muziek openbaarde.[1]) Als bewijs van zijne waardeering kan ik niet nalaten het slot van DESCARTES' opstel over te nemen:[2])

Jamque terram video, feſtino ad littus, multaque brevitatis ſtudio multa oblivione ſed plura certe ignorantia hic omitto; patior tamen hunc ingenii mei partum, ita informem et quaſi vrſae foetum nuper editum ad te exire, vt ſit familiaritatis noſtrae mnemoſÿnon et certiſſimum mei in te amoris monimentum: hac tamen ſi placet conditione ut perpetuo in ſcriniorum vel Muſaei tui umbraculis deliteſcens aliorum iudicia non perferat, qui, ſicut te facturum mihi polliceor, ab hujus truncis partibus benevolos oculos non averterent ad illas, in quibus nonnulla certe ingenij mei lineamenta ad vivum expreſſa non inficior. Nec ſcirent hic inter ignorantiam militarem ab homine deſidioſo et libero, penituſque diversa cogitanti et agenti tumultuoſe, tui ſolius gratia eſſe compoſitum.

Bredae Brabantinorum pridie Calendas Januarias
Anno MDCXVIII completo.

Na BEECKMAN's terugkeer te Middelburg werd nog de volgende briefwisseling gehouden.

---

[1]) Ter linkerzijde van het opschrift: COMPENDIUM MUSICAE staat *met deselfde hand* als de tekst: Rene, Iſaco Beeckmanno, daarboven met andere hand met een invoegingsteeken achter RENÉ: *du Peron ſive Deschartes*; ter rechterzijde van het opschrift in margine met dezelfde hand als de invoeging: *Muſicae Compendium Descartes.* In het journaal vind ik aangeteekend op fol. 108 recto: (in margine: *modi non dulces et ictus teſtimonio probati*) *Quae de ictibus ſonorum et quatuor modis non dulcibus propter falſam quartam deque* /*ex notis Mr Duperon* (*cum vidiſſet* is hier later achtergevoegd) *muſicae ſuae interſeruit*, *ſignificant et meas illas cogitationes placuiſſe*, *den* 2 *Jan*(uarij 1619). Blijkens een volgende aanteekening bevond BEECKMAN zich denzelfden dag te Geertruidenberg om den 10 Januari 1619 weder te Middelburg te zijn.

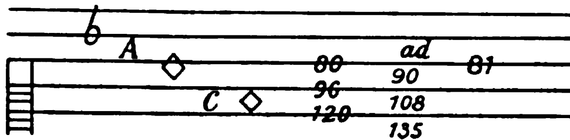
[2]) Fol. 178 recto.

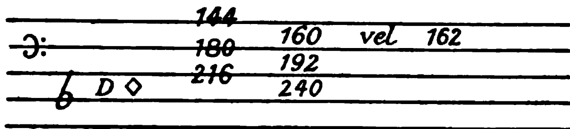
Fol. 287 verso.

(II. René Descartes te Breda aan Isaac Beeckman te Middelburg 24 Januari 1619.)

Et acceptae et expertatae mihi fuerunt tuae litterae, gaviſuſque ſum primo intuitu, cum Muſicae notas inſpexi quo enim pacto te memorem mei clarius oſtenderes; aliud autem eſt quod etiam expectabam et praecipue, nempe quid egeris, quid agas, vt valeas. Neque enim ſcientiam ſolam ſed te ipſum mihi curae eſſe debuiſti credere, nec ingenium ſolum, etiam ſi pars ſit maxima, ſed hominem totum. Quod ad me pertinet, deſidioſus meo more vix titulum libris, quos te monente ſcripturus ſum, impoſui, neque me tamen ita deſidioſum exiſtimes vt plane tempus inutiliter conteram, immo nunquam vtilius, ſed in rebus quas ingenium tuum altioribus occupatum haud dubie contemnet et ex edito ſcientiarum coelo deſpiciet. Nempe in Pictura, Architectura militari, et praecipue ſermone Belgico, jn quod quid profecerim brevi viſurus es; petam enim Middelburgum, ſi Deus ſinat, quadrageſima ineunte. Quod ad tuam quaeſtionem ſpectat, ipſe ſolvis, nec melius poteſt. Vnum autem eſt quod opinor non ſatis mediate ſcripſiſti, nempe omnes ſaltus in vnica voce fieri per conſonantias exactas. Diſtet enim nota

Vocis unius omnes ſaltus in muſica an per exactas conſonantias





A 80 C 108 D 240 ab 80 ad 108 eſt quarta cum vno ſchiſmate.

A a nota D intervallo vnius quintae, neceſſario diſtabit a C ſpatio vnius quartae non perfectae, ſed quae deficiat vno ſchiſmate, vt demonſtratur ex numeris appoſitis, quibus ſi vtaris facillime cuiuſlibet toni exactam quantitatem invenies. Neque dixeris debere potius inter A et D eſſe quintam imperfectam, vt A C ſit vera quarta et exacta, melius enim diſſonantia adverteretur in tonis, qui ſimul emitti debent, quam in ijs qui ſucceſſive, quos exiſtimo ſaltem in vocali muſica et mathematice eleganti

nunquam ab vno confonantiae termino ad alium immediate pervenire, fed vehi fuaviter per omne medium intervallum, quod impedit, ne vnius fchifmatis exiguus error diftinguatur. Idque nec notaffe memini in ijs quae de diffonantijs ante fcripfi, ad quae fi diligenter advertas et ad reliquam meam muficam, invenies omnia, quae de confonantiarum graduum et diffonantiarum intervallis annotavi, mathematice demonftrari, fed indigefte et confufe nimiumque breviter explicata. Sed de his hactenus. Alias plura. Interim me ama et certum habe me Mufarum ipfarum potius quam tui obliturum. Sum enim ab illis tibi perpetuo amoris vinculo coniunctus. Bredae 9°. Kal. Feb. 1619.

Du Perron.

Het opfchrift was:
A Monsieur
Monfieur Isaack Beeckman
Docteur en Medicinae
a Midde(l)b.

(III. René Descartes te Breda aan Isaac Beeckman te Middelburg 26 Maart 1619.) Fol. 288 recto—Fol. 288 verso.

Licebit faltem, opinor, vale mittere per epiftolam, quod tibi difcedens dicere non potui.[1]) Ante 6 dies huc redij, ubi mufas meas diligentius excolui quam vnquam hactenus. Quatuor enim a tam brevi tempore infignes et plane novas demonftrationes adinveni meorum circinorum adiumento. Prima eft celeberrima de dividendo angulo in aequales partes quotlibet, tres aliae pertinent ad aequationes cubas, quarum primum genus eft inter numerum abfolutum, radices et cubos. Alterum inter numerum abf(olutum) quadrata et cubos. Tertium denique inter num(erum) ab(folutum) radices,quadrata et cubos,pro quibus 3 demonstrationes repperi, quarum vnaquaeque ad varia membra eft extendenda propter varietatem fignorum + et —. Quae omnia nondum difcuffi, fed facile meo judicio quod in vnis repperi ad alia applicabo. Atque hac arte quadruplo plures quaeftiones et longe difficiliores folvi poterunt quam communi Algebra; 13 enim diverfa genera aequationum cubicarum numero, qualia tantum funt tria aequationum communium nempe inter 1 ʒ et 0 ♃ + 0 n vel 0 ♃ — 0 n vel denique 0 n — 0 ♃. Aliud eft quod iam quaero de pluribus radicibus fimul ex varijs nominibus

Coffica quaedam Descartes.

[1]) Blijkens het journaal bevond Beeckman zich 22 Maart te Dordrecht, 25 Maart te Rotterdam en was den 2en April weder te Middelburg teruggekeerd.

compositis extrahendis, quod si reperero, vt spero, scientiam illam plane digeram in ordinem, si desidiam innatam possim vincere, et fata liberam vitam indulgeant. Et certe, vt tibi nude aperiam quid moliar, non Lullij artem brevem [1]), sed scientiam penitus novam tradere cupio, qua generaliter solvi possunt quaestiones omnes, quae in quolibet genere quantitatis tam continuae quam discretae possunt proponi, sed vnaquaque iuxta suam naturam. Vt enim in Arithmetica quaedam quaestiones numeris rationalibus absolvuntur, aliae tantum numeris surdis, aliae denique imaginari quidem possunt, sed non solvi, jta me demonstraturum spero in quantitate continua quaedam problemata absolvi posse cum solis lineis rectis vel circularibus, alia solvi non posse nisi cum alijs lineis curvis, sed quae ex vnico motu oriuntur ideoque per novos circinos duci possunt, quos non minus certos existimo et Geometricos quam communis quo ducuntur circuli; alia denique solvi non posse nisi per lineas curvas ex diversis motibus sibi invicem non subordinatis generatas, quae certe imaginariae tantum sunt. Talis est linea quadratrix, satis vulgata, et nihil imaginari poste existimo quod saltem per tales lineas solvi non possit, sed spero fore vt demonstrem quales quaestiones solvi quaeant hoc vel illo modo et non altero, adeo vt pene nihil in Geometria supersit inveniendum. Infinitum quidem opus est nec vnius incredibile quam ambitiosum; sed nescio quid luminis per obscurum hujus scientiae chaos aspexi, cujus auxilio densissimas quasque tenebras discuti posse existimo.

ars generalis ad omnes quaestiones solvendas quaesita.

Quod ad peregrinationes meas attinet, nupera fuit foelix, eoque foelicior quo visa est periculosior, praesertim in discessu ex vestra insula. Nam prima die Vlessigam redij cogentibus ventis; sequenti vero die perexiguo conscenso navigiolo adhuc magis iratum mare sum expertus, cum majori tamen delectatione quam metu; probavi enim me ipsum, et marinis fluctibus, quos nunquam antea tentaveram, absque nausea trajectis audacior evasi ad majus iter inchoandum. Nec subitanei Galliae motus institutum meum mutarunt, tamen detinent aliquandiu; non enim ante tres hebdomadas hinc discedam, sed spero me illo tempore Amsterodamum petiturum, inde Gedanum, postea per Poloniam et Ungariae partem ad Austriam Bohemiamque perveniam, quae via certe longissima est, sed meo judicio tutissima;

peregrinatio Descartes praeconcepta

---

[1]) Raymundi Lulli, doctoris illuminatissimi; Beeckman schijnt vroeger de commentaren daarop van Agrippa van Nettesheim gelezen te hebben.

praeterea famulum mecum ducam et fortaſſe comites mihi notos, quod ſcribo, ne pro me metuas, quia diligis. Pro certo autem ante decimum quintum Aprilis hinc non diſcedam. Jpse videris, vtrum ante illud tempus a te poſſim habere litteras, alioqui enim accepturus non ſum forte a longo tempore. Quod ſi ſcribas, de Mechanicis noſtris mitte, quid ſentias et vtrum aſſentiaris mihi. Cogitavi etiam Middelburgo exiens ad veſtram navigandi artem et revera modum inveni quod poſſem, vbicunque gentium deferrer, etiam dormiens et ignoto tempore elapſo in meo itinere ex ſola aſtrorum inſpectione agnoſcere, quot gradibus verſus Orientem vel Occidentem ab alia regione mihi nota eſſem remotus. Quod tamen inventum parum ſubtile eſt jdeoque difficulter, mihi perſuadeo a nemine hactenus fuiſſe excogitatum, ſed potius arbitrarer propter vſus difficultatem fuiſſe neglectum. Jn inſtrumentis enim ad id vtilibus vnus gradus major non eſt quam duo minuta in alijs inſtrumentis ad altitudinem poli indagandam, ideoque tam exacta eſſe non poſſunt; cum tamen etiam aſtrologi minuta et secundas atque adhuc minores partes instrumentis ſui metiantur, mirarer profecto ſi nautis talis inventio videretur inutilis, in qua aliud nullum occurrit incommodum. Jdeoque ſcire vellem exactius, vtrum ſimile quid non ſit inventum; et ſi ſcias, ad me ſcribe; excolerem enim confuſam adhuc in cerebro meo ſpeculationem illam, ſi aeque novam ſuſpicarer, atque certa eſt. Jnterim me ama, vive foeliciter et vale. Adhuc a me litteras accipies ante diſceſſum. Bredae Brab. 7° Kal. Aprilis

ooſt en weſt te ſeylen a Descartes inventum.

Tuus ſi ſuus
Du Perron.

Het opſchrift was:
A Monſieur
Monſieur Jsaac Beeckman
Docteur en medicine jnden
twee hanen bij de beestemarck
a Middelburgh.

(IV. René Descartes te Breda aan Isaac Beeckman te Middelburg 20 April 1619 [1]).) **Fol. 290 verso.**

Nolui hunc nuntium ad vos mittere ſine litteris, etſi iam

[1]) De volgorde der volgende brieven in het H.S. is niet de hier aangenomene; die in het H.S. blijkt den lezer uit de opgave der pagina's. Blijkbaar heeft de binder een vel verkeerd geplaatst en omgedraaid.

multa scribere non vacet. Sed peto saltem vt hunc [1]), qui famulus est meus, ad me rescribas, vt vales, et quid agis, vtrum in nuptijs adhuc, sed iam non alienis sis occupatus [2]). Hinc discedam die Mercurij proxima statim atque hic nuntius ad me redierit. Plura scripsi ante tres hebdomadas. Vale et me ama. Bredae Brabant. 12° Kal. Maij 1619.

Tuus aeque ac suus
Du Perron.

Het opschrift was:
A Monsieur
Monsieur Jsaac Beeckman,
in de twee haenen bij de
beestemarckt
a Middelb.

Fol. 290 recto.

(V. RENÉ DESCARTES te Breda aan ISAAC BEECKMAN te Middelburg 23 April 1619.)

Accepi tuas litteras pene eadem die, qua scriptae sunt, noluique hinc discedere, quin semel adhuc epistola duraturam inter nos amicitiam renovarem. Ne tamen iam aliquid a Musis nostris expectes, iam enim perigrinatur animus, dum me ad viam die crastina ingrediendam accingo. Adhuc incertus sum quo fata ferant, vbi sistere detur, nam belli motus nondum me certo vocant ad Germaniam, suspicorque homines quidem in armis fore multos, proelium vero nullum. Quod si ita fit, interim in Dania, Polonia et Hungaria spatiabor, donec in Germania vel tutius iter nec a militibus praedonibus occupatum, vel bellum certius possim nancissi. Si alicubi immorer, ut me facturum spero, statim tibi polliceor me Mechanicas vel Geometriam digerendam suscepturum, teque vt studiorum meorum promotorem et primum authorem amplectar. Tu enim revera solus es, qui desidiosum exitasti. Jam e memoria pene elapsam eruditionem revocasti, et a serijs occupationibus aberrans ingenium ad meliora reduxisti. Quod si quid igitur ex me forte non contemnendum exeat, poteris iure tuo totum illud reposcere, et ipse ad te mittere non omittam, tum vt fruaris, tum vt corrigas, vt nuperrime de eo, quod ad te circa rem nauticam scripseram, quod idem quasi divinus ad me misisti; eadem enim est tua

Descartes de me.

oost en west non inventum.

---

[1]) huc? hoc?

[2]) BEECKMAN huwde den 20en April 1620 N.S. (fol. 179 recto).

illa de Luna inventio, quam tamen quibufdam inftrumentis facilitari poffe arbitrabar fed perperam. Quod ad caetera quae in fuperioribus me inveniffe gloriabar, vere inveni cum novis circinis. Nec decipior fed membratim non ad te fcribam, quia integrum opus hac de re meditabor aliquando, meo judicio novum nec contemnendum. Jam autem ab vno menfe non ftudui, quia fcilicet ingenium illis inventis ita exhauftum fuit, vt ad alia quae adhuc quaerere deftinaveram invenienda non fuffecerit; sufficiet autem ad memoriam tui perpetuo confervandum. Vale. 9° Kal. Maij 1619.

Tuus aeque ac fuus
Du Perron.

Het opfchrift was:
A Monsieur
Monfieur Jsaac Beecman,
in de twee haenen bij de
beestemarckt
a Middelborgh.

(VI. René Descartes te Amsterdam aan Isaac Beeckman te Middelburg 29 April 1619.) Fol. 289 recto.

Nolo vllam ad te fcribendi occasionem omittere, vt et meum erga te affectum atque recordationem nullis viae occupationibus impeditam demonftrem. Repperi nudius tertius eruditum virum in diverforio Dordracenfi cum quo de Lulli arte parva fum loquutus, qua fe vti poffe gloriabatur, idque tam foeliciter vt de materia qualibet unam horam dicendo poffet implere, ac deinde fi per aliam horam de eadem re agendum foret, fe plane diverfa a praecedentibus reperturum, et fic per horas viginti confequenter. Vtrum credas, ipfe videris. Senex erat aliquantulum loquax et cujus eruditio vtpote a libris haufta in extremis labris potius quam in cerebro verfabatur. Inquirebam autem diligentius, vtrum ars illa non confifteret in quodam ordine locorum dialecticorum, vnde rationes defumuntur, et faffus eft quidem, fed addebat infuper nec Lullium nec Agrippam claves quasdam in libris fuis tradidiffe, quae neceffaria funt, vt dicebat ad artis illius aperienda fecreta, quod illum certe dixiffe fuspicor, vt admirationem captaret ignorantis potius quam vt vere loqueretur. Vellem tamen examinare, fi haberem librum, fed cum tu habeas, fi vacet, examina quaefo et fcribe vtrum *Lullij ars*

aliquid ingeniofum in arte illa reperies. Tantum ingenio tuo fido, vt certus fim te facile vifurum qualia illa fint; fi quae tamen fint, omiffa illa puncta ad aliorum intelligentiam neceffaria, quae claves vocat. Atque haec ad te scribere volui, ne vnquam de eruditione tecum non loquar, quia poftulas; quod fi idem a te exigam, ne graveris, fi placet. Hodie navim confcendo vt Daniam invifam, ero aliquandiu in vrbe Coppenhaven, vbi a te litteras expecto. Singulis enim diebus hinc eo naves exeunt, et licet hofpitij mei nomen ignores, tamen ita diligens ero ad inquirendum, vtrum ad me qui nautae litteras ferant, vt amitti in via facile [1]) poffint. Cura quaefo reddi ftatim litteras meas his adiunctas Petro van der Mereck. Nec tamen plura nifi vt me ames et fis foelix. Vale. Amfterodami 29 Aprilis 1619.

Tuus fi fuus
Du Perron.

Het opfchrift was:
A Monsieur
Monfieur Beecman Docteur
en Medicinae
a Middelb.

Fol. 289 verso. (VII. Isaac Beeckman te Middelburg aan René Descartes te Kopenhagen 6 Mei 1619.)

Accepi tuas litteras, inclufafque tradidi Petro van der Marckt, ficut ad me fcripferas. Quamquam autem nihil eft quod tibi refpondeam, ut tamen fcias me tuas accepiffe, haec pauca addidi. Scribis te Dordraci doctum hominem reperiffe, quem tamen *Lullij ars.* poftea nolis doctum dici ob unicam cognitionem artis Lullianae, quam prae fe ferebat. Rogas me, vt comentaria Agrippae diligenter evolverem atque claves quas vocabat senex tuus expifcarer, quibus ars illa aperitur ab Agrippa aut ipso Lullio, arti huic non adjunctas, ne quis temere ejus peritus foret; adeo enim fidis ingenio meo, ut me, fi quid in hac arte lateat, non poffit latere volentem diligentius commentarijs incumbere. Ac certe tibi obtemperarem amico meo non vulgari, nifi temporis anguftia id prohiberet. Vereor enim ne tam diu poffis morari à Coppenhagen, cum litterae faepius in via diu haereant, antequam ad locum quo miffae funt perveniant. Ad haec, nifi mihi plane exciderit quod ante aliquot annos hac

1) *non* facile?

de re conceperam ex ſuperficiaria lectione horum Agrippae commentariorum, non ſunt claves hae longe petendae; ex ipſo enim Agrippa, ſi nuper voluiſſes, ipse adamuſſim eas percepiſſes. Nam omnia, quae ſunt, dividit in generales locos, hoſque ſingulos iterum ſubdividit in alios, adeo vt nihil rei cogitari poſſit, quin in hiſce circulis generaliter et ſpecialiter non contineatur, tandem diverſorum circulorum locos ſibi mutuo per litteras conjungit, atque ita quavis re proposita per combinationem omnium terminorum protrahi poterit tempus dicendi ad infinitas paene horas; ſed neceſſe eſt dicentem multarum rerum eſſe peritum, ac diutius loquentem multa ridicula et ad rem parum facientia dicere, ac demum totaliter phantaſtam fieri totamque mentem adeo characteribus litterarum affigere, vt vix aptus ſit ad ſolidi quid meditandum. Haec hac de re ſufficiant, niſi tu aliud quid velis. Det Deus, ut aliquamdiu una vivamus ſtudiorum campum ad umbilicum uſque ingreſſuri. Interim valetudinem tuam cura atque eſto prudens in toto itinere tuo, ne solam praxim ejus ſcientiae quam tanti facis videaris ignorare. Memento mei tuaeque mechanicae conscribendae, ſoles enim promiſſis tuis examuſſim stare, praeſertum ijs quae litteris mandaſti. Vtinam ijſdem et tempus credidisses! Verſaris jam in vrbe praecipua ejus regni; vide ne quid ibi ſit ſcientiae quod non examines, aut vir doctus quem non convenias, ne quid boni in Europa te lateat, aut potius vt rationem tui ad reliquos doctos intelligas. Ego valeo. Pridie Nonarum Maij 1619. ſtylo novo.

Venit huc e patria tua Gallus quidam elegantiſſimas artes publice profeſſus, fontes perpetuo ab eadem aqua ſalientes, bellica, medica, rei familiaris augmentum in pane multiplicando cum ipſe foret rerum omnium egenus. Hunc conveni et ex animi (*sic*) subiectum omnium rerum fere ignarum comperi, etiam eorum quae profiteretur. Jtaque hic rem non faciet, eſtque ad borealiores re(le)gandus, ubi craſſa ingenia deceptionibus et praeſtigijs magis patent.

Tuus vt ſuus
Isack Beeckman.

Het opſchrift was
A monsieur
Monſieur Rene Du Perron estant
in Denemarcken
port. Coppenhaghen.

D 6 e

OVER EENE REEKS MET BESSELSCHE FUNCTIES,

DOOR

J. G. RUTGERS.
(Alkmaar)

---

1. We hebben reeds eene toepassing gegeven van de volgende formules, na ze op eenvoudige wijze afgeleid te hebben:[1])

$$\int_0^1 I_\nu(x\sqrt{c})\,(1-c)^\rho c^{\frac{\nu}{2}}dc = \frac{\Gamma(\rho+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{\rho+1}} I_{\nu+\rho+1}(x),\ \begin{pmatrix} R(\nu) > -1 \\ R(\rho) > -1 \end{pmatrix} \ldots (1)$$

$$\int_0^1 I_{-a}(x\sqrt{c})\,(1-c)^\rho c^{-\frac{a}{2}}dc =$$

$$= \frac{\Gamma(\rho+1)}{\left(\frac{x}{2}\right)^{\rho+1}} \left\{ I_{\rho-a+1}(x) - \sum_{m=0}^{a-1} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\rho-a+1}}{m!\,\Gamma(m+\rho-a+2)} \right\},\ \begin{pmatrix} a = \text{pos. geheel} \\ \text{of nul} \\ R(\rho) > -1 \end{pmatrix} \ldots (2)$$

Door eene andere toepassing zullen we gevoerd worden tot bedoelde reeks met Besselsche functies; we trachten nl. een waarde te vinden voor de integraal in (2) met behulp van formule (1). Voor die integraal kunnen we het volgende schrijven:

$$\int_0^1 I_{-a}(x\sqrt{c})\,(1-c)^\rho c^{-\frac{a}{2}}dc = (-1)^a \int_0^1 I_a(x\sqrt{c})\,(1-c)^\rho c^{\frac{a}{2}} \{1-(1-c)\}^{-a} dc =$$

$$= (-1)^a \int_0^1 I_a(x\sqrt{c})\,(1-c)^\rho c^{\frac{a}{2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-a}{n} (1-c)^n \right\} dc =$$

$$= (-1)^a \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-a}{n} \int_0^1 I_a(x\sqrt{c})\,(1-c)^{\rho+n} c^{\frac{a}{2}} dc,$$

---

[1]) Nieuw Archief (2) VI, p. 368—373.

en deze laatste integraal volgt nu gemakkelijk uit (1), wanneer we daarin nemen: $\nu = a$ en ρ vervangen door $\rho + n$; we vinden dan zoodoende:

$$\int_0^1 I_{-a}(x\sqrt{c})\,(1-c)^\rho\, c^{-\frac{a}{2}}\, dc =$$

$$=(-1)^a\left(\frac{2}{x}\right)^{\rho+1}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-a}{n}\Gamma(\rho+n+1)\left(\frac{2}{x}\right)^n I_{a+\rho+n+1}(x),$$

$$\begin{pmatrix}R(a)>-1\\R(\rho)>-1\end{pmatrix}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Gelet nu op de waarde van deze integraal, zoo $a =$ pos. geheel of nul, uitgedrukt in (2), krijgen we, daar:

$$\binom{-a}{n} = (-1)^n\frac{(a+n-1)!}{(a-1)!\,n!},$$

na eenige herleiding de volgende gelijkheid:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+n-1)!\,\Gamma(\rho+n+1)}{n!}\left(\frac{2}{x}\right)^n I_{\rho+a+n+1}(x) =$$

$$=(-1)^a(a-1)!\,\Gamma(\rho+1)\left\{I_{\rho-a+1}(x)-\sum_{m=0}^{a-1}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\rho-a+1}}{m!\,\Gamma(m+\rho-a+2)}\right\},$$

$$\begin{pmatrix}a = \text{pos. geheel}\\ \text{of nul}\\ R(\rho) > -1\end{pmatrix} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Deze betrekking geeft voor $a = 0$ de identiteit:

$$I_{\rho+1}(x) = I_{\rho+1}(x),$$

terwijl ze voor $a = 1$ overgaat in de volgende eenvoudige formule:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(\rho+n+1)\left(\frac{2}{x}\right)^n I_{\rho+n+2}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\rho - \Gamma(\rho+1)\,I_\rho(x),\ (R(\rho)>-1)\,..\,(5)$$

Hiermede hebben we tevens, voor zoover mij bekend is, eene nieuwe ontwikkeling gevonden van $\left(\frac{x}{2}\right)^\rho$ naar Besselsche functies, onder de voorwaarde echter, dat het reëele gedeelte van $\rho > -1$.

Voor $\rho = 0$ volgt uit (5):

$$1 = I_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty} n!\left(\frac{2}{x}\right)^n I_{n+2}(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

2. Onafhankelijk van de formules (1) en (2) bepaalt men de som in het eerste lid van (4) op de volgende wijze.

Door de daarin voorkomende Besselsche functie te vervangen door hare waarde vindt men:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+n-1)!\,\Gamma(\rho+n+1)}{n!}\left(\frac{2}{x}\right)^n I_{\rho+a+n+1}(x) =$$

$$= (a-1)!\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-a}{n}\Gamma(\rho+n+1)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\rho+a+1}}{s!\,\Gamma(s+\rho+a+n+2)} =$$

$$= (a-1)!\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\rho+a+1}}{s!\,(s+a)!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-a}{n}\frac{(s+a)!\,\Gamma(\rho+n+1)}{\Gamma(s+\rho+a+n+2)} =$$

$$= (a-1)!\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\rho+a+1}}{s!\,(s+a)!}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{-a}{n}\int_0^1 z^{\rho+n}(1-z)^{s+a}dz =$$

$$= (a-1)!\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\rho+a+1}}{s!\,(s+a)!}\int_0^1 z^{\rho}(1-z)^s\,dz =$$

$$= (a-1)!\,\Gamma(\rho+1)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\rho+a+1}}{(s+a)!\,\Gamma(\rho+s+2)} =$$

$$= (-1)^a(a-1)!\,\Gamma(\rho+1)\sum_{m=a}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\rho-a+1}}{m!\,\Gamma(m+\rho-a+2)} =$$

$$= (-1)^a(a-1)!\,\Gamma(\rho+1)\left\{I_{\rho-a+1}(x) - \sum_{m=0}^{a-1}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\rho-a+1}}{m!\,\Gamma(m+\rho-a+2)}\right\}.$$

Dit is de uitdrukking, die voorkomt in het rechterlid van (4), terwijl in den loop dezer afleiding eveneens als voorwaarden zijn opgetreden $a =$ pos. geheel of nul en $R(\rho) > -1$, nl. bij het invoeren van de Eulersche integraal.

BIBLIOGRAPHIE.

H. Offerhaus Ez. **Lineaire kegelsneestelsels en weefsels.** Academisch proefschrift. Groningen, P. Noordhoff, 1905.

Reye wijdt in de „Aufgaben und Lehrsätze", toegevoegd aan het eerste deel zijner „Geometrie der Lage" enkele bladzijden aan eene behandeling der eigenschappen van lineaire stelsels en weefsels van kegelsneden. Zulke stelsels worden gevormd door alle kegelsneden, die een, twee, drie of vier willekeurig in een vlak aangenomen kegelsneden steunen, waarbij eene kegelsnede gezegd wordt eene tweede kegelsnede te steunen, wanneer zij om een poolvierhoek dier tweede kromme beschreven is; weefsels zijn dan de reciproke menigvuldigheden der stelsels. De, uit den aard der zaak, beknopte wijze, waarop Reye deze stelsels en weefsels behandelt, was voor den schrijver van het bovengenoemde proefschrift aanleiding dit onderwerp meer uitvoerig te bewerken. Achtereenvolgens worden de verschillende lineaire stelsels en weefsels onderzocht, waarbij het onderzoek der stelsels van de tweede macht, d. z. de kegelsneenetten en de weefsels zonder meer (Schaarscharen bij Reye), de grootste plaats inneemt. Bij deze menigvuldigheden treden de Cayley'sche kromme van het net, d. i. de omhullende der ∞^1 stralenparen, welke als ontaarde kegelsneden van het net optreden, en de Jacobi'sche kromme van het weefsel op den voorgrond; van beide krommen worden een aantal eigenschappen afgeleid.

Z.

A. A. Dalhuisen. **Over eenige aantallen van kegelsneden, die aan acht voorwaarden voldoen.** Academisch proefschrift. Utrecht, Stoomdrukkerij „de Industrie", J. van Druten, 1905.

In dit proefschrift worden de aantallen der kegelsneden bepaald, die n gegeven rechten snijden, r gegeven vlakken aanraken, terwijl het vlak van elk dier kegelsneden door m gegeven punten gaat, waarbij $m + n + r = 8$ is. Die bepaling geschiedt in alle gevallen door uitsluitend gebruik te maken van het beginsel van het behoud van het aantal, volgens hetwelk het

aantal der figuren, die aan bepaalde voorwaarden voldoen, niet verandert of oneindig groot wordt, wanneer die voorwaarden doorloopend worden gewijzigd. Laat men ééne der bovengenoemde voorwaarden weg, dan zullen de ∞^1 kegelsneden, die aan de zeven overblijvende voorwaarden voldoen, een oppervlak vormen. Van de oppervlakken, die in de verschillende gevallen ontstaan, wordt dan verder de graad bepaald, benevens het aantal en de veelvoudigheid van die rechte lijnen op zulk een oppervlak, die verkregen worden door de ontaarding van kegelsneden, welke aan de zeven voorwaarden voldoen. Z.

A. L. Zaalberg. Differentiaal-meetkundige eigenschappen van stralenstelsels. Academisch proefschrift. Leiden, S. van Doesburgh, 1905.

In een eerste hoofdstuk geeft de schrijver een overzicht van de algemeene eigenschappen van stralenstelsels (congruenties) en beschouwt daarbij meer in het bizonder de isotrope stralenstelsels d. z. die, bij welke de beide focaaloppervlakken ontwikkelbare oppervlakken zijn, om den imaginairen cirkel in 't oneindige beschreven. Daarna houdt hij zich bezig met een onderzoek van stralenstelsels, voor welke een der focaaloppervlakken gegeven is, terwijl de stralen van het stelsel de raaklijnen zijn van een stelsel krommen op dat oppervlak. De algemeene resultaten, voor dergelijke stralenstelsels afgeleid, worden dan verder toegepast: 1e bij het onderzoek omtrent de eigenschappen van pseudospherische stralenstelsels, d. z. die, bij welke zoowel de afstand der beide, op een straal gelegen brandpunten als die der grenspunten constant is, 2e bij het onderzoek van die stelsels, die verkregen worden door een punt P eener ruimtekromme te verbinden met een punt Q eener tweede ruimtekromme en door het midden dier verbindingslijn een straal te brengen, evenwijdig aan de doorsnede der osculatievlakken van de beide krommen in de punten P en Q.

Z.

Fred. Schuh. Vergelijkend overzicht der methoden ter bepaling van aantallen vlakke krommen. Academisch proefschrift. Amsterdam, M. M. Olivier, 1905.

In dit proefschrift geeft de schrijver een vergelijkend en kritisch overzicht der methoden ter bepaling van het aantal vlakke krommen van den graad m, die aan $\frac{1}{2} m (m+3)$ algebraïsche voorwaarden voldoen. De meetkundige beschouwingen van Cayley omtrent deze vraag, de karakteristieken-theorie

met de daarop betrekking hebbende onderzoekingen van Chasles, Zeuthen, Cremona, Schubert en Halphen, de methoden, die zich aansluiten aan de karakteristieken-theorie worden breedvoerig uiteengezet. Na die uiteenzetting wordt een tweetal hoofdstukken gewijd aan de behandeling van een bizonder geval van het bovengenoemde, algemeene probleem, nl. dat, waarbij de voorwaarden, aan welke de krommen van den graad m moeten voldoen, uitsluitend aanrakingsvoorwaarden zijn. Hierbij worden dan de voor de oplossing van dit vraagstuk toegepaste correspondentiebeginsels van Chasles, van Cayley en van Brill en de onderzoekingen van de Jonquières behandeld. Deze laatste heeft eene algemeene formule afgeleid voor het aantal der vlakke krommen van den graad m, die met eene gegeven vlakke kromme C_n t aanrakingen, resp. van de orde a, b, c . . . hebben en bovendien nog door $\frac{1}{2} m (m + 3) - (a + b + c \ldots)$ punten gaan, waarvan er p op C_n liggen, terwijl wordt aangenomen dat de kromme C_n wel δ dubbelpunten, doch geene keerpunten of hoogere singulariteiten heeft. Over eenige uitbreidingen dier formule van de Jonquières geeft de heer Schuh belangrijke en interessante beschouwingen. Z.

G. Darboux. Étude sur le développement des méthodes géométriques, lue le 24 septembre 1904 au Congrès des sciences et des arts à Saint-Louis. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

Nadat hij in enkele trekken den toestand geschetst heeft, waarin de wiskundige wetenschappen bij het begin der negentiende eeuw verkeerden, geeft de schrijver een kort overzicht van de ontwikkeling der meetkundige methoden in den loop dier eeuw. Naast de bekende studie van Gino Loria, „Il passato e il presente delle principali teorie geometriche", waarvan ook eene duitsche vertaling verschenen is, verdient de meer beknopte verhandeling van Darboux over hetzelfde onderwerp zeer de aandacht. Z.

Oeuvres de Laguerre, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par M M. Ch. Hermite, H. Poincaré et E Rouché, Membres de l'Institut. Tome II. Géométrie. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Het tweede deel der werken van Laguerre, verschenen ruim zeven jaar na het eerste, bevat de meetkundige verhandelingen. Onder deze trekken in de eerste plaats de aandacht die, welke

betrekking hebben op het gebruik der imaginairen in de meetkunde. Reeds in 1853, toen Laguerre negentien jaar oud was, gaf hij in eene korte verhandeling over de theorie der brandpunten, verschenen in de „Nouvelles Annales de Mathématiques", eene oplossing van de vraag op welke wijze, bij eene projectieve transformatie de metrische eigenschappen der figuren getransformeerd worden. Die oplossing volgt dadelijk uit de, door hem gegeven definitie van een hoek als de door $2i$ gedeelde logarithmus van de dubbelverhouding der vier stralen, gevormd door de beenen van den hoek en de isotrope lijnen door het hoekpunt. Later is hij verschillende malen meer uitvoerig op de rol van het imaginaire in de meetkunde teruggekomen, o.a. in een viertal stukken, die uitsluitend op dit onderwerp betrekking hebben. In deze wordt, onder meer, de theorie der brandpunten voor willekeurige krommen en oppervlakken ontwikkeld, worden verder twee toegevoegd imaginaire punten der ruimte voorgesteld door den reëelen cirkel, gemeen aan de beide isotrope kegels, die deze punten tot toppen hebben en van deze wijze van voorstellen verschillende toepassingen gemaakt. — Doch ook in andere stukken, in welke hij de vlakke bikwadratische krommen in 't algemeen en enkele hunner in 't bizonder of de eigenschappen van anallagmatische krommen en oppervlakken behandelt, treedt telkens weer het gebruik der imaginairen in meetkundige kwesties op den voorgrond. —

Een ander onderwerp, waarmede Laguerre zich, blijkens verschillende stukken in dit deel zijner werken, dikwijls heeft beziggehouden, is de toepassing van de theorie der algebraïsche vormen, hunne covarianten en invarianten op de meetkunde. Van belang zijn in dit opzicht vooral zijn onderzoek omtrent een kubisch oppervlak met vier conische punten, het reciproke oppervlak van het Oppervlak van Steiner, zijne toepassingen van de theorie der binaire vormen op de meetkunde der krommen, op een kwadratisch oppervlak gelegen en zijne onderzoekingen omtrent algebraïsche krommen, bij welke hij uitgaat van de zoogenaamde „équation mixte" eener kromme, d. i. van de betrekking, die voor elk punt van het vlak de richtingscoëfficiënten geeft der raaklijnen, die men uit dit punt aan de kromme kan trekken.

Onder de overige onderzoekingen van Laguerre op het gebied der meetkunde wordt verder eene belangrijke plaats ingenomen door zijne studiën over de „Géométrie de direction." Hierin wordt eene rechte lijn, die door een zich bewegend punt in een bepaalden zin wordt doorloopen, eene halfrechte (semi-

droite) en een cirkel, die evenzoo in een bepaalden zin doorloopen wordt, een „cycle" genoemd. Met eene rechte lijn komen dus twee half-rechten, met een cirkel twee cycles overeen. Uit dit oogpunt beschouwd, vervallen dan de overige krommen in twee verschillende soorten, de zoogenaamde richtingskrommen (courbes de direction), welke als omhullende eener halfrechte beschouwd op zich zelf eene meetkundige figuur vormen, en die kromme, voor welke dit niet het geval is. Onder die richtingskrommen worden dan in 't bizonder die bestudeerd, welke onder den naam van „hypercycles" worden samengevat; daartoe behooren o. a. de hypocycloïde met vier keerpunten, de brandlijnen eener parabool voor evenwijdig invallende lichtstralen, enz.

Doch behalve over de in 't voorgaande genoemde onderwerpen, zijn er nog vele onderdeelen der meetkunde, waarover Laguerre kortere studies geleverd heeft, o. a. wat de differentiaalmeetkunde betreft, over de geodetische lijnen, over de kromming der anallagmatische oppervlakken en der vlakke doorsneden van die oppervlakken.

De meeste der verhandelingen, in dit deel opgenomen, zijn slechts studies, waarin algemeene beginselen op de eene of andere bizondere meetkundige kwestie worden toegepast. Voor hem hadden, zooals Poincaré in zijne voorrede der werken van Laguerre zegt, de algemeene beginselen en beschouwingen alleen waarde door de bizondere toepassingen tot welke zij konden leiden. Z.

Die Formelzeichen. Ein Beitrag zur Lösung der Frage der algebraischen Bezeichnung der physikalischen, technischen und chemischen Grössen von Olof Linders, Maschinen- und Elektro-Ingenieur. Een deel in 8°, 96 p. Leipzig, Jäh & Schunke, 1905.

Het vraagstuk betreffende een algemeen aangenomen stel algebraïsche teekens voor de verschillende in natuur-, scheikunde en techniek optredende grootheden is in de laatste jaren van verschillende zijden in behandeling genomen. Zoo b.v. door de Deutsche Physikalische Gesellschaft, de Deutsche Bunsen-Gesellschaft, enz. Eene commissie uit den Electrotechnischen Verein te Berlijn kwam in 1904 tot de conclusie, dat bij het samenstellen van een dergelijk stel teekens geen systeem zou moeten gevolgd worden. De schrijver is van meening, dat de vraag of dit probleem van alle andere daarin verschilt, dat

daarin stelselloosheid aan te bevelen is, op zijn minst slechts dan beslist kan worden, als volledige voorstellen van verschillende zijden ter beoordeeling aanwezig zijn. Hij geeft daarom in eene tabel voor 871 grootheden een viertal stellen van teekens en daarbij ter vergelijking de door een vijftal wetenschappelijke of technische gezelschappen voorgestelde, zoomede de in eenige, meestal technische, handboeken gebruikte teekens. Verder wekt de schrijver ook anderen er toe op dit vraagstuk in behandeling te nemen, opdat ten slotte eene internationale uitspraak in deze van nut zal kunnen zijn. W. H. K.

L. Boltzmann. Leçons sur la théorie des gaz, traduites par A. Galotti et H. Bénard. Avec une introduction et des notes de M. Brillouin. Seconde partie. Een deel in 8°, XII, 280 p. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Daar het oorspronkelijk werk van Boltzmann genoegzaam bekend geacht mag worden, behoeft over dit werk niet te worden uitgeweid. We vermelden slechts dat, behalve eene lijst van belangrijke theoretische verhandelingen verschenen van 1894 tot en met 1902, zijn toegevoegd een tweetal noten van Brillouin.

W. H. K.

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes publiée par les soins de B. Baillaud et de H. Bourget. Avec une préface de Emile Picard. T.I. (8 November 1882 — 22 Juillet 1889). Paris, Gauthier-Villars, 1905, 8°, 477 blz.

De Nederlandsche wiskundigen zullen ongetwijfeld het bovenstaande werk met belangstelling ontvangen. Onze te vroeg gestorven landgenoot Stieltjes, door de omstandigheden er toe gebracht zich in Frankrijk te vestigen, wordt door Picard gerekend tot „les géomètres français les plus éminents de la seconde moitié du XIXe siècle" en de thans gepubliceerde briefwisseling stelt ons in staat, om ons van de juistheid dier uitspraak te doordringen. In 1882 schreef Stieltjes voor het eerst aan den grootmeester der Fransche wiskundigen over ontwikkelingscoëfficiënten der storingsfunctie, en sedert is die correspondentie tot den dood van Stieltjes voortgezet. Bij een vluchtig doorbladeren dezer brieven blijkt, hoe sterk beiden zich dadelijk tot elkaar aangetrokken gevoelden. Is in den beginne Stieltjes de jongere, die met grooten eerbied Hermite de uitkomsten van zijn onderzoekingen mededeelt, en die zich in de welwillendheid van Hermite mag verheugen, spoedig verandert de toon der

brieven, en het is Hermite, die aan Stieltjes vragen stelt, of hem over allerlei onderwerpen raadpleegt.

Ook al vat men niet al te letterlijk op den aanhef van den brief, door Hermite 12 Juli 1885 aan Stieltjes gericht, luidende: „Vous avez toujours raison et j'ai toujours tort", toch blijkt uit alles, dat Hermite niet langer in Stieltjes alleen den jeugdigen beschermeling ziet, die aanmoediging verdient, maar dat hij hem beschouwt als een medearbeider, wiens talenten hij hoogschat.

In April 1885 vestigt Stieltjes zich te Parijs, verwerft zich daar op aansporing van Hermite den doctorstitel, en wordt een jaar later op aanbeveling van Hermite chargé de cours te Toulouse, waar hij tot zijn dood is werkzaam geweest.

Steeds is hij met Hermite in eng verkeer gebleven, een verkeer gekenmerkt door wederzijdsche achting en vriendschap. Het „Monsieur" boven de eerste brieven van Hermite is spoedig geworden „Mon cher ami".

Het is niet mogelijk om over den veelzijdigen wetenschappelijken inhoud der brieven in een kort bestek veel te zeggen.

De eerste brieven handelen meest over benaderende berekeningen, interpolatie, mechanische kwadratuur en getallentheorie, deze laatste ook in verband met elliptische functies. In de latere brieven geraken deze onderwerpen iets meer op den achtergrond, er blijkt, dat Stieltjes voortdurend zijn veld van studie uitbreidde. Ten slotte omvat het de geheele analyse. Het kan niet anders, of de studie dezer briefwisseling zal ook ten onzent gevoelens opwekken van eerbied voor de groote bekwaamheden van onzen vroegeren landgenoot, en wij zullen van ganscher harte instemmen met de hulde, door de wiskundigen van zijn tweede vaderland aan zijne nagedachtenis gebracht.

Kl.

Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences. Conférences faites en Amérique par Emile Picard. Paris, Gauthier-Villars, 1905, 8°, 167 blz.

Vier voordrachten in Amerika gehouden zijn in dit werk vereenigd. De eerste voordracht handelt over het functiebegrip, zooals dit zich in de laatste eeuw heeft ontwikkeld. De schrijver gedenkt in de eerste plaats de merkwaardige wijziging, die door de studie der goniometrische reeksen in de oorspronkelijke opvatting is gebracht. Waren het eerst de toepassingen der wis-

kunde op physisch gebied, die de ontwikkeling der functie-theorie beheerschten, weldra kwamen met Riemann en Weierstrass de meer theoretische beschouwingen op den voorgrond. De differentieerbaarheid, de continuiteit en de mogelijkheid eener ontwikkeling in eene reeks van veeltermen maakten gewichtige punten van onderzoek uit. Van zelf maakte de groote uitbreiding, die het begrip functie had ondergaan, beperkende onderstellingen noodzakelijk, zou men uitkomsten van beteekenis verkrijgen, en zoodoende is men er toe gekomen voornamelijk de aandacht te wijden aan de analytische functies. De studie dezer functies heeft in onze dagen eene groote vlucht genomen, maar de schrijver is van gevoelen, dat men op den duur zich niet tot de analytische functies zal kunnen bepalen. Ook in onzen tijd gaat het functiebegrip nog steeds zijne verdere ontwikkeling tegemoet. In de tweede voordracht geeft de schrijver een overzicht van de theorie der differentiaalvergelijkingen. Eerst ten tijde van Cauchy gevoelde men de noodzakelijkheid van het bewijs voor het bestaan van oplossingen. Al is men er in geslaagd het gevraagde bewijs te leveren, toch blijven er bij de studie der partieele differentiaalvergelijkingen nog vele moeilijkheden te overwinnen. Het opsporen der integralen zelve nog daargelaten, denke men slechts aan de groote verscheidenheid der voorwaarden, die kunnen dienen om eene bijzondere oplossing te bepalen. Vele onderzoekingen zijn nog noodzakelijk, eer deze afdeeling der analyse als een eenigszins afgerond geheel kan worden beschouwd. Het onderzoek der gewone differentiaalvergelijkingen is ten deele verder gevorderd. Tot op zekere hoogte heeft men hier te doen met een hoofdstuk der gewone functie-theorie. De schrijver wijst op hetgeen gedaan is ten aanzien der lineaire vergelijkingen, op de studie der singulariteiten, waarmede Briot en Bouquet zijn begonnen, en op de asymptotische ontwikkelingen en de periodieke oplossingen, welke door Poincaré zijn ingevoerd.

Uitsluitend van de analytische functies is sprake in de derde voordracht. Na een kort historisch overzicht staat de schrijver iets langer stil bij de nieuwere onderzoekingen. Hij bespreekt de voortzetting van eene door een element gegeven functie, het opsporen der singulariteiten, het begrip geslacht, de verspreiding der nulpunten en de wijze van aangroeiing eener holomorphe functie. Daarnaast gedenkt hij onderzoekingen van minder algemeenen aard en schetst hij de beteekenis van de theorie der algebraïsche, en in verband daarmede, van de elliptische en automorphe functies voor de tegenwoordige analyse.

Ten slotte ontwikkelt de schrijver in zijne vierde voordracht zijne denkbeelden over de ontwikkeling der wiskunde en over het verband, dat tusschen haar en de verwante wetenschappen bestaat.

Deze voordrachten leveren een nieuw bewijs voor de groote veelzijdigheid van den geleerden schrijver. Overal blijkt, hoezeer hij het geheele gebied der analyse beheerscht en overziet. De aandachtige lezing dezer voordrachten zal ook den minder gevorderden beoefenaar der wiskunde eenig inzicht geven in de beteekenis van de tegenwoordige functie-theorie. Kl.

Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions par Ernst Lindelöf. Collection de monographies sur la théorie des fonctions publiée sous la direction de M. Émile Borel. Paris, Gauthier-Villars, 1905, 8°, 141 blz.

De integraalstellingen van Cauchy vormen een der grondslagen van de theorie der .eenwaardige functies. In alle leerboeken bekleeden deze stellingen dan ook eene voorname plaats, maar de voorstellingswijze is gewoonlijk eenigszins verschillend van die, welke Cauchy er aan gaf. Zoodra de stellingen van Taylor en van Laurent bewezen zijn, kan het begrip residu worden ingevoerd en de residuenrekening van Cauchy kan zeer dikwijls verdere toepassing der eigenlijke integraalrekening vervangen. Van die residuenrekening nu geeft de schrijver een overzicht. Na in het eerste hoofdstuk de beginselen te hebben uiteengezet, geeft hij in het tweede hoofdstuk de eenvoudigste toepassingen, welke Cauchy reeds heeft gemaakt. Namelijk wordt de residuenrekening gebruikt tot het bepalen van symmetrische functiën der wortels van eene algebraïsche vergelijking, tot het ontwikkelen van implicite functies (vergelijking en reeks van Lagrange), tot het ontwikkelen van meromorphe functies in eene reeks van breuken, en eindelijk tot het berekenen van eenige bepaalde integralen. Het derde hoofdstuk handelt over de verschillende sommatieformules, die met residuenrekening kunnen worden afgeleid, terwijl in het vierde hoofdstuk deze formules worden aangewend, om uitdrukkingen en ontwikkelingen te vinden voor de Γ-functie en voor de ζ-functie van Riemann. Eindelijk bevat het laatste hoofdstuk beschouwingen over functies, voorgesteld door eene reeks van Taylor, in welke reeks iedere coëfficiënt eene analytische functie is van zijn rangnummer. Er worden een paar stellingen bewezen, die betrekking hebben op het

gedrag van eene dergelijke functie buiten den convergentiecirkel, en er wordt eene nieuwe methode aangegeven om zulk eene functie buiten dien cirkel analytisch voort te zetten.

Evenals van de overige monographiën uit de collectie Borel kan ook de studie van dit werkje ten zeerste worden aanbevolen.

Kl.

Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. I. Teil: Differential-Rechnung von Dr. Ludwig Kiepert, zehnte vollständig umgearbeitete und vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr. Max Stegemann. Hannover, Helwingsche Verlagsbuchhandlung, 1905, 8°, 816 blz.

Van de negende uitgave onderscheidt zich de tiende door eenige toevoegingen. Zoo zijn bijgevoegd de afleiding van de interpolatie-formule van Newton en talrijke stellingen, die betrekking hebben op de kromming van ruimtekrommen en oppervlakken. Het bekende leerboek is in vergelijking met andere leerboeken der analyse wel omvangrijk geworden. Die omvang echter behoeft den aanvanger niet af te schrikken, want bij den eersten oogopslag blijkt, dat die omvang voornamelijk het gevolg is van het opnemen van tallooze uitgewerkte vraagstukken. Deze vraagstukken zijn met zorg gekozen. Het zijn geen moeilijke questies, voor den leerling zelf onoplosbaar, waarvan de medegedeelde sierlijke behandeling alleen dient om den aanvanger in verwarring te brengen. Het zijn eenvoudige vraagstukken, geheel in de bevatting van den leerling, die hem doen zien, hoe hij de eerste beginselen der theorie moet toepassen.

Nog een andere oorzaak werkt mede om den omvang van het boek te vergrooten. Namelijk is er veel opgenomen, wat gewoonlijk in de leerboeken der differentiaalrekening achterwege blijft, en wat tot de eigenlijke algebra gerekend wordt. Ik bedoel beschouwingen over determinanten, hoogere machtsvergelijkingen, complete grootheden, reeksenconvergentie, enz. Het verband tusschen deze onderwerpen en de eigenlijke differentieaalrekening komt daardoor tot zijn recht, en een eerste overzicht over de gansche algebraïsche analyse wordt daardoor den leerling gemakkelijker gemaakt.

Overigens heeft ook in deze tiende uitgave het leerboek zijn karakter behouden. Terwijl de schrijver vermijdt door al te afgetrokken beschouwingen over de grondslagen de studie te bemoeilijken, is toch nergens van schijnredeneeringen gebruik

gemaakt, en is in alle beschouwingen de strengheid behoorlijk gehandhaafd. Als leerboek is het in alle opzichten aanbevelenswaardig. Kl.

N. Spijker. Der Körper grösster Anziehung eines Ellipsoides. Inaugural-Dissertation. Zürich, G. v. Ostheim, 1904, 8°, 85 blz. Met een stereoskopische teekening.

In hoofdzaak bevat dit proefschrift de beantwoording van een prijsvraag, gesteld in 1898 door de wiskundige afdeeling van het Polytechnikum in Zürich. Gevraagd werd naar vorm en stand van eene hogomeen lichaam van gegeven volumen in de onderstelling, dat dit lichaam van eene gegeven homogene ellipsoïde eene zoo groot mogelijke aantrekking ondervindt.

Ter beantwoording dezer vraag wordt eerst aangetoond, dat er bij iedere gegeven richting een lichaam van gegeven volume kan worden gevonden, waarvoor de ontbondene der aantrekking in de gegeven richting zoo groot mogelijk is. Daarna is bepaald voor welke richting het maximum van den aantrekkingscomponent wordt bereikt. In dit geval moet de aantrekking zelve met die richting samenvallen, en er wordt bewezen, dat de gezochte richting is die der kleinste as van de ellipsoïde. Zoowel meetkundig als analytisch met behulp van elliptische functies wordt het begrenzende oppervlak van het gevraagde lichaam nader bepaald en onderzocht.

Eindelijk wordt het overeenkomstige vraagstuk voor twee afmetingen behandeld. Kl.

L'algèbre de la logique par Louis Couturat. Recueil „Scientia", série phys.-math., fasciscule no. 24. Paris, C. Naud, 1905, klein 8°, 95 blz.

Ontwikkeling van de algebra der logica, van een zuiver formeel standpunt, opgevat als eene algebra, die berust op eenige willekeurig aangenomen grondbeginselen. Kl.

J. G. Rutgers. Over differentialen van gebroken orde en haar gebruik bij de afleiding van bepaalde integralen. Proefschrift. Utrecht, J. van Boekhoven, 1904, 4°, 49 blz.

De schrijver geeft vooraf een historisch overzicht van de pogingen gedaan door Liouville, Riemann en anderen om differentiaal-quotienten met willekeurigen aanwijzer te definieeren.

Als uitgangspunt van schrijvers eigen definitie dient de vergelijking

$$D_x^{\xi} x^n = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-\xi+1)} x^{n-\xi}.$$

Deze definitie veroorlooft het differentiaalquotient van willekeurige orde te bepalen voor functies, welke aan enkele beperkende voorwaarden voldoen. Steeds wordt daarbij gelet op de zoogenaamde complementaire functie $\phi(x)$, die in het differentiaalquotient moet worden toegevoegd, en die bepaald is door de voorwaarde

$$D_x^{-\xi} \phi(x) = 0.$$

Op een groot aantal bijzondere gevallen wordt de differentiatie toegepast, waarna ten slotte de gevonden uitkomsten worden gebruikt, om van allerlei bepaalde integralen de waarde te berekenen. Kl.

J. A. Vreeswijk Jr. Involuties op rationale krommen. Proefschrift. Utrecht, J. van Druten, 1905, 8°, 104 blz.

Aanvangende met de kwadratische involutie van punten op eene rechte lijn worden achtereenvolgens involuties van hoogeren graad, en ook van hoogeren rang, op rationale krommen behandeld. De beschouwing van dergelijke involuties, welke aanleiding geven tot het ontstaan van allerlei met de kromme samenhangende meetkundige figuren, kan van dienst zijn bij het opsporen van verschillende singulariteiten, of bij het bepalen van allerlei kenmerkende getallen. In dien zin worden door den schrijver verschillende vlakke krommen en ook ruimtekrommen onderzocht. Kl.

Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité par René Baire, maître de conférences à l'Université de Montpellier. Paris, Vuibert et Nony, 1905, 8°, 59 blz.

Een onmeetbaar getal, aanvankelijk op de gebruikelijke wijze bepaald met behulp van eene snede (coupure) in de reeks der meetbare getallen, wordt daarna opgevat als eene grens (borne) van eene gegeven verzameling bestaanbare getallen. Deze opvatting, tezamen genomen met eene eigenaardige definitie van het verschil van twee onmeetbare getallen, stelt den schrijver in staat eene reeks van op grenswaarden betrekking hebbende eigenschappen te bewijzen, op grond waarvan hij als

bijzondere gevallen van eene algemeene stelling de definities van som, produkt en quotient van twee onmeetbare getallen kan afleiden. Kl.

G. C. A. Valewink. Over asymptotische ontwikkelingen. Proefschrift. Haarlem, de Erven Loosjes, 1905, 8°, 138 blz.

Door Laplace en Cauchy werd reeds gebruik gemaakt van eenige bekende zoogenaamd half convergente reeksen, die zoo zij ergens worden afgebroken, de waarde eener functie aangeven met eene fout, die kleiner is dan de eerste der verwaarloosde termen. Later zijn door Stieltjes en door Poincaré in algemeenen vorm de zoogenaamde asymptotische reeksen gedefinieerd. Ook hier is het weder de vraag, bij welken term men de reeks moet afbreken, om voor den restterm eene zoo laag mogelijke waarde te vinden. Die vraag wordt door den schrijver uitvoerig behandeld voor het geval, dat men voor de integraallogarithme de bekende divergente ontwikkeling wil toepassen. Een overzicht wordt gegeven van de beschouwingen van Poincaré en van door hem bewezen eigenschappen ten aanzien der bewerkingen (optellen, vermenigvuldigen, integreeren), die men op asymptotische ontwikkelingen mag toepassen. Eindelijk worden de asymptotische ontwikkelingen met differentiaalvergelijkingen in verband gebracht. Vooreerst kan men in sommige asymptotische ontwikkelingen bepaalde formeele oplossingen van differentiaalvergelijkingen herkennen, en op deze wijze aan die ontwikkelingen eenige beteekenis toekennen. Vervolgens echter, en als voorbeeld wordt behandeld de vergelijking van Bessel, kan men van asymptotische ontwikkeling dikwijls gebruik maken, om de oplossing van eene gegeven differentiaalvergelijking in de omgeving van $x = \infty$ te bepalen. Kl.

Bryn Mawr College Monographs. Reprint series, vol. I, n°. 4. Contributions from the Mathematical and Physical Departments. Bryn Mawr, Penna., U.S.A., April 1904.

De „Bryn Mawr College Monographs" worden in twee reeksen uitgegeven, nl. een reeks (monograph series) van nieuwe artikelen en een reeks (reprinted series) van overdrukken uit andere tijdschriften. Ze verschijnen ongeregeld en worden uitgegeven door een commissie van redactie bestaande uit M. C. Thomas, T. H. Morgan, L. M. Keasbey en D. Irons.

Het deel, dat we hier aankondigen, bevat negen verhandelingen, van welke vijf tot de wis-, drie tot de natuur- en een tot de scheikunde behooren. Drie der vijf wiskundige, van de hand van Dr. C. A. Scott, hebben betrekking op vlakke kromme lijnen (*Rev. sem.* XI 1, p. 8, XI 2, pp. 10, 11). En van de twee overigen is de eene van hare leerlinge Dr. E. N. Martin (*Rev. sem.* X 1, p. 2) afkomstig, terwijl de laatste „An Instrument for Drawing a Sine Curve", door A. Stanley Mackenzie, oorspronkelijk verscheen in het *Physical Review*, deel 15, 1902. Van de drie meer natuurkundige verhandelingen zal ongetwijfeld de eerste „On the Period of a Rod Vibrating in a Liquid", geleverd door mej. M. L. Northway en A. Stanley Mackenzie, wat het tot de mechanica behoorende theoretische gedeelte betreft, den wiskundigen lezer boeien. S'.

Lezioni di geometria proiettiva dettate nella R. Università di Napoli dal Prof. Federico Amodeo. Terza edizione migliorata e aumentata, con 420 figure e molti esercizi. Een deel in kwarto, 456 blz. Napoli, Luigi Pierro, Piazza Dante, 1905.

Van dit werk, waarvan we in het vorige deel van het *Nieuw Archief* den tweeden druk aankondigden, is nu de derde druk verschenen. Door den overgang van den typographischen, niet zeer behagelijken vorm tot den gewonen drukvorm, heeft het verdienstelijk werk in uiterlijk veel gewonnen. S'.

V

A BRIEF HISTORY OF THE JAPANESE MATHEMATICS,

BY

TSURUICHI HAYASHI,
(Tokyo).

(Continued from p. 296—361 of volume VI) [1].

FIFTH PERIOD,

(1772—1868 A. D.).

86. We shall now mention the facts that took place in the last period of the history of the Japanese mathematics. Since TAKAKAZU SEKI founded his school in the third period, the mathematics of Japan had continued to make progress till the fourth period and in the last or fifth period this progress was more striking still. We shall first of all explain the reason why the year 1772 is taken as the beginning of this last period.

87. Of all the problems that were investigated by old Japanese mathematicians the rectification and quadrature of the circle were the most attractive ones to them, as was shown before. Therefore, several methods pertaining to the rectification, quadrature and cubature of any curved line and any curved surface were brought together under the name of the "Enri method", the literal translation of the word "Enri" being "the principle of the circle".

The rectification and quadrature of the circle were done up till now by the mathematicians in the following way that a regular polygon with a large number of vertices is inscribed in the circle and the limit of the perimeter of the polygon is obtained by indefinitely increasing the number of the sides of the polygon.

---

[1]) At the end of the article we will sum up the corrections to both parts indicated by the author himself. (RED.)

In KATAHIRO TAKEBE's *Enri-Kohai-Tetsujitsu*, we find that the method of obtaining the limit of this kind had been somewhat reformed after SEKI's time. As it was already shown in Nr. 77, the lengths of the successive sagittae of a given arc were expressed in infinite series, by means of which the squares of the successive chords (= sagittae × diameter) were expressed in infinite series; and thus the length of a side of an inscribed regular polygon was very minutely determined. The result was: If s is the sagitta of a given arc and d its diameter, then

$$\left(\frac{arc}{2}\right)^2 = sd\left(1 + \frac{4}{3.4}\cdot\frac{s}{d} + \frac{4.16}{3.4.5.6}\cdot\frac{s^2}{d^2} + \frac{4.16.36}{3.4.5.6.7.8}\cdot\frac{s^3}{d^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{4.16.36.64}{3.4.5.6.7.8.9.10}\cdot\frac{s^4}{d^4} + \ldots\ldots\right).$$

The old Japanese mathematicians were not used to write the general term of an infinite series and consequently did not explain the rule of getting the coefficients. But the general term of the above-mentioned series is obviously

$$\frac{1}{r+1}\cdot\frac{2.4.6\ldots\ (2r)}{3.5.7\ldots(2r+1)}\cdot\frac{s^r}{d^r}.$$

For the further details, the readers are requested to see Prof. KIKUCHI's papers in the *Tōkyō Sugaku-Buturigakkwai Kiji*, Vol. VII, p. 107—110, and Vol. VIII, p. 179—198).

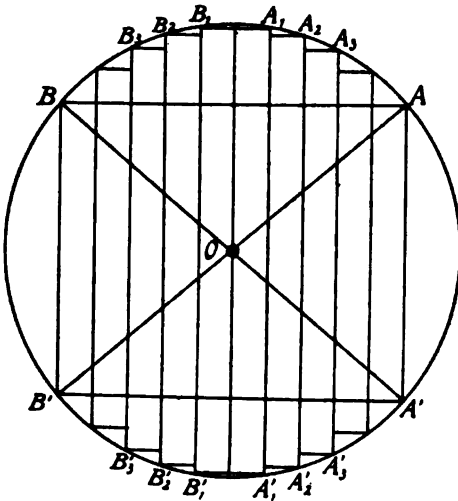
88. In the fifth period, this prevailing method was quite reformed, and the new method resembled much the Infinitesimal Calculus. The inventor of this new method was NAOMARU AJIMA. Prof. R. FUJISAWA called this mathematician YASUSHIMA instead of AJIMA in his speech delivered at the Second International Congress of Mathematicians held at Paris, 1900 (see DUPORCQ's *Compte rendu du congrès*, p. 379—393); and Prof. D. KIKUCHI is used to call him AJIMA; however, it cannot be settled which name is right. This illustrious man NAOMARU AJIMA became the head-master of the Seki school after his master SHUJU YAMAJI's death in the year 1772, which is the reason why this same year is taken as the beginning of the present period. If the date of AJIMA's obtainment of this new method were known, it would of course have been taken as such.

89. AJIMA's method of finding the length of the circumference of a circle is set forth in Prof. D. KIKUCHI's translation in the *Tōkyō Sugaku-Buturigakkwai Kiji*, Vol. VII, p. 114–117. He translated in an admirably faithful way the material which was contained in a manuscript book, or rather papers (see the introduction to this history).

We shall here briefly explain the method which AJIMA employed in finding the perimeter and area of a circle.

Let AB be an arc of a circle whose diameter is d; then the length of the arc AB and the area of the circular segment AA_1B are required to be found.

Let the chord AB be denoted by a and be divided into $2n$ equal parts ($n = 5$ in the figure). Through every point of division draw perpendiculars to the chord AB, and give numbers to them starting from that which passes through the center of the circle to the right-hand ones so that AA′ is the nth perpendicular. Then by Pythagoras' theorem, the length of the mth perpendicular will be



$$2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{ma}{2n}\right)^2}.$$

Now this expression has to be expanded by the binomial theorem.

90. We shall now consider the binomial theorem. Since TAKAKAZU SEKI's days the binomial theorem for positive integral indices had been well known. The theorem for positive fractional indices, whose numerators are 1, had also been known from nearly the same time. Whe find that theorem for the index $\frac{1}{2}$ used in a great many cases. This case alone may be said to have been used by them very often. This was done in order to obtain the approximate values of the roots of a

quadratic equation, likewise in order to represent the lengths of the successive sagittae in infinite power series containing the original sagitta and the diameter as before mentioned. The binomial theorem for the fractional index $\frac{1}{2}$ was established by the actual extraction of the root of the binomial expression. Of course, the convergency was not investigated; its general term might have been written if wanted, but it was not.

91. In this way the lengths of A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', etc. were obtained as follows:

$$A_1A_1' = b_1 = d - \frac{1^2 . a^2}{2n^2d} - \frac{1^4 . a^4}{8n^4d^3} - \frac{3 . 1^6 . a^6}{48n^6d^5} - \dots,$$

$$A_2A_2' = b_2 = d - \frac{2^2 . a^2}{2n^2d} - \frac{2^4 . a^4}{8n^4d^3} - \frac{3 . 2^6 . a^5}{48n^6d^5} - \dots,$$

$$A_3A_3' = b_3 = d - \frac{3^2 . a^2}{2n^2d} - \frac{3^4 . a^4}{8n^4d^3} - \frac{3 . 3^6 . a^5}{48n^6d^5} - \dots,$$

etc., etc.,

whence

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n$$

$$= nd - \frac{(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)a^2}{2n^2d} - \frac{(1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4)a^4}{8n^4d^3} -$$

$$- \frac{3(1^6 + 2^6 + 3^6 + \dots + n^6)a^6}{48n^6d^5} - \dots$$

By multiplying this expression by $\frac{a}{2n}$ and again by 2 and then by making n indefinitely large, the area of the figure $AA_2B_1BB'B_1'A_2'A'A$ is obtained. It becomes necessary to know

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^\lambda + 2^\lambda + 3^\lambda + \dots + n^\lambda}{n^{\lambda+1}}.$$

But the old mathematicians did not seem to have evaluated this general limit. Then how did they treat it? When λ is a small positive integer, they proceeded as follows. They were able to obtain the value of

$$1^\lambda + 2^\lambda + 3^\lambda + \dots + n^\lambda$$

in the form of a function of n; then they arranged the expressions according to the descending powers of n and divided it by $n^{\lambda+1}$; e. g.,

$$\text{for } \lambda=2,\ldots\ldots \frac{1}{3}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{6n^2},$$

$$\text{for } \lambda=4,\ldots\ldots \frac{1}{5}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{30n^4},$$

$$\text{for } \lambda=6,\ldots\ldots \frac{1}{7}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{6n^4}+\frac{1}{42n^6},$$

$$\text{for } \lambda=8,\ldots\ldots \frac{1}{9}+\frac{1}{2n}+\frac{2}{3n^2}-\frac{7}{15n^4}+\frac{2}{9n^6}-\frac{1}{30n^8},$$

etc., etc.

Thus, when λ is equal to 2, 4, 6, 8, 10, 12 respectively and n is made indefinitely large, the limit is $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{11}$, $\frac{1}{13}$ successively.

Hence for the area of the figure $AA_2B_1BB'B_1'A_2'A'A$ is found

$$P=ad-\frac{a^3}{6d}-\frac{a^5}{40d^3}-\frac{3a^7}{336d^5}-\frac{15a^9}{3456d^7}$$

up to the seventh term.

92. Next for the area of the rectangle ABB′A′, which is four times the area of the triangle OAB, is found:

$$Q=ad-\frac{a^3}{2d}-\frac{a^5}{8d^3}-\frac{3a^7}{48d^5}-\frac{15a^9}{384d^7}\cdots$$

Now, the area of the sector AOB, that is $\frac{2P-Q}{4}$, is found. Hence

$$arc\ AB=\frac{2P-Q}{d}=a+\frac{a^3}{6d^2}+\frac{3a^5}{40d^4}+\frac{5a^7}{112d^6}+\frac{35a^9}{1152d^8}+\cdots$$

$$=a\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2}{d^2}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{a^4}{d^4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{a^6}{d^6}+\cdots\right)$$

and therefore, according to GAUSS' notation for the hypergeometric series,

$$arc\,\mathrm{AB} = a\,.\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{a^2}{d^2}\right).$$

Hence, if s denotes the sagitta of the arc AB,

$$arc\,\mathrm{AB} = a\left(1 + \frac{2}{3}\frac{s}{d} + \frac{2\,.\,4}{3\,.\,5}\cdot\frac{s^2}{d^2} + \frac{2\,.\,4\,.\,6}{3\,.\,5\,.\,7}\frac{s^3}{d^3} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9} + \frac{s^4}{d^4} + \ldots\right)$$

$$= a\,.\,\mathrm{F}\left(1,\ 1,\ \frac{3}{2}, \frac{s}{d}\right).$$

Therefore, when $a = d$ and $2s = d$, the length of the circumference is

$$2d\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2\,.\,4\,.\,6\,.\,8}\cdot\frac{1}{9} + \ldots\right) =$$

$$= 2d\,.\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right),$$

or

$$2d\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1\,.\,2}{3\,.\,5} + \frac{1\,.\,2\,.\,3}{3\,.\,5\,.\,7} + \frac{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}{3\,.\,5\,.\,7\,.\,9} + \ldots\right) = 2d\,.\,\mathrm{F}\left(1,\ 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Next, the area of the segment AB is

$$\frac{\mathrm{P}-\mathrm{Q}}{2} = \frac{a^3}{6d} + \frac{a^5}{20d^3} + \frac{3a^7}{112a^5} + \frac{5a^9}{288d^7} + \ldots.$$

Therefore, when $a = d$, the area of the circle is

$$d\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6}\cdot\frac{1}{7} + \ldots\right) = \frac{1}{3}d\,.\,\mathrm{F}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1\right).$$

This method of performing the rectification and the quadrature of the circle had been applied to other curves, and even to the quadrature of curved surfaces and the cubature of the solids bounded by closed curved surfaces.

93. AJIMA, the discoverer of this new method, was born in 1739 and died in 1798. He learned mathematics first from MASATADA IRIE, who belonged to the Nakanishi school (nr. 82); and then became a student of SHUJU YAMAJI.

He was gifted with great mathematical talents and discovered many theorems and methods. He was able to solve easily the problems which had been very difficult to the preceding scholars. He is said to have found the methods of rectification and quadrature of the circle (nr. 89—92) before he received the diploma of *Inka-Kaiden*, and showed it to his master SHUJU YAMAJI, who was very much surprised at his find. From this time, the methods of rectification, quadrature and cubature were quite reformed, and the Enri method was greatly improved. The most remarkable thing was that the whole perimeter of an ellipse and the length of an elliptic arc were each represented in an infinite series. Recognizing his superior ability, his master looked upon him as one of the greatest mathematicians that ever lived. He was still more respected by his fellow-students; one of whom, SADASUKE FUJITA (see later on), said he was a „*Meijin*", that means a distinguished expert. FUJITA himself was known as a meijin among his generation; so we may infer that AJIMA was the most excellent meijin of all the meijins in his days.

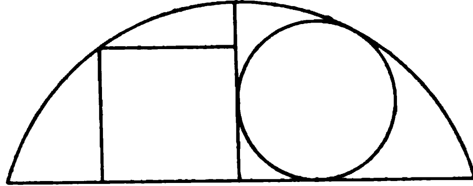
94. Whe shall state a few more facts about AJIMA He took great pains to use symbolical expressions instead of words in order to demonstrate a proposition. His symbols were still the strokes written lengthwise on paper, which were explained before. Before AJIMA's time, they preferred the use of words to that of symbols in solving a problem. He arranged the strokes in a very skilful way and made it very easy to understand the demonstration and the order of reasoning.

He wrote many manuscript books, but not one was printed. MAKOTO KUSAKA (see later on) compiled them into a book which he named *Fukyu-sampō*, that means a "perpetual mathematics", because he was anxious of their being scattered and getting lost. At one time he intended to print and publish it, but from some cause he could not do so. The later scholars never failed to copy it and regarded it as an estimable work.

95. The following is one of the problems whose solutions done bij Ajima were looked upon as superior to those of other mathematicians.

Problem. Divide a circular segment into two parts by the sagitta and let a square and a circle be inscribed in each part

as in the figure; then the chord and the sagitta of the circular segment are known; and besides,



chord + sagitta + side of the square + diameter of the circle

and

$$\frac{\text{sagitta}}{\text{chord}} + \frac{\text{diameter of the circle}}{\text{sagitta}} + \frac{\text{side of the square}}{\text{diameter of the circle}}$$

are known; to find the side of the square and the diameter of the circle.

His solution of this problem was nothing but an algebraical one. The problem and its other solution were written on a board and put up by a certain mathematician on the wall of a famous shrine, Gion, in the city of Kyōto. One day AJIMA happened to see it and thought it a very lengthy one. Thus, he excited great astonishment among the people by deducing a far simpler solution. It took place in 1774. It was a custom at that time to hang a tablet, on which a mathematical problem and its solution were inscribed, in a Shintō shrine or a Buddhist temple. Now-a-days we never fail to find tablets of this kind in many shrines or temples in Japan. The custom may have risen from two causes. One was that they thought they were able to solve so difficult problems by the assistance of the gods, and therefore, they had to thank the gods in that way; and the other was that they could satisfy their vanity by showing forth their attainments in mathematics to the public. Its natural result was that, when a mathematician hung a tablet in a certain shrine or temple, on which a problem and its solution were written, another strove to put a tablet in the same place which contained a simpler solution, or a solution of a more extended case or of a faremore difficult problem.

INHOUD.

Bibliographie.

INHOUD.

De redactie van het „Nieuw Archief" brengt den medewerkers in herinnering, dat met het oog op den betrekkelijk geringen omvang van het tijdschrift bijdragen van niet te groote uitgebreidheid de meest gewenschte zijn.

Alle stukken het „Nieuw Archief" betreffende gelieve men te richten aan den Secretaris der Redactie, Dr. **J. C. KLUYVER** te Leiden.

Boek-, Muziek- en Handelsdrukkerij van GEBR. HOITSEMA te Groningen.

NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

TWEEDE REEKS
DEEL VII
TWEEDE STUK

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1906

INHOUD.

96. He solved the following problem in 1773. A certain number of equal circles are drawn touching one another externally and a given circle either externally or internally: determine the radii of these circles (compare Problem 61, No. 49). The solution of this problem already existed in ISOMURA's days, but it was said to be quite different from that of AJIMA which, having been kept absolutely secret, was not known among the public.

97. In the same year he demonstrated the method of finding convergents of a continued fraction. This method was already found by YOSHITA KURUSHIMA as was mentioned in No. 83. But as KURUSHIMA had not written it, AJIMA wrote down the method fearing it might get lost. The following problem is one of them.

Problem. The square root of 67 is

$$8,18535277187245\ldots;$$

find a common fraction approximate to this decimal fraction.

Transforming the decimal fraction into the simple continued fraction

$$8+\frac{1}{5}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\ldots,$$

the convergent $\frac{48842}{5967}$ has been found.

98. In 1794 AJIMA found the method of performing the rectification of the line of intersection of two given surfaces, and that of the quadrature and cubature of the solid bounded by two intersecting surfaces. The old Japanese mathematicians named the method "*Niji-Enri-Tetsujitsu*", or "*Enri-Kwatsujitsu*". So the summation of the infinite series was generally employed. The following is one of the problems of this kind, which AJIMA solved.

Problem. The axes of two right circular cylinders having different diameters intersect at right angles; find the volume of the part they have in common.

Its answer was as follows: Let a be the diameter of the larger cylinder and b that of the smaller one; then the required volume is

$$\frac{\pi}{4}b^2a\left(1-\frac{b^2}{8a^2}-\frac{1}{8.8}\frac{b^4}{a^4}-\frac{1.5}{8.8.16}\frac{b^6}{a^6}-\frac{1.5.7}{8.8.16.16}\frac{b^8}{a^8}-\frac{1.5.7.21}{8.8.16.16.40}\frac{b^{10}}{a^{10}}-\frac{1.5.7.21.33}{8.8.16.16.40.56}\frac{b^{12}}{a^{12}}-\ldots\right).$$

Every coefficient of such an infinite series was put into a table called *Jō-Jo-ritsu*: *Jō-ritsu* means multiplicators and *Jo-ritsu* divisors. Every coefficient of an infinite series was found as the sum of an infinite series, so that after all they treated nothing but the double infinite series. He found every term of the infinite series up to the 21st; and the sum of them he took as the approximate value of the required volume. When KUSAKA, a disciple of AJIMA's, compiled *Fukyu-sampō* (No. 94), he put this problem as Problem 36 in its first volume.

AJIMA was able to find the surface and volume of an anchor-ring. Besides these chief problems, he was of course able to solve many others.

99. We have now to record the career of SADASUKE FUJITA who learned mathematics with AJIMA from SHUJU YAMAJI. But before continuing we will just mention here that there were women among the old Japanese mathematicians. In history, we find only two female mathematicians; one was a daughter of GENKEI NAKANE (No. 79), and the other named KŌ TAIRA. Their careers are not well known; the latter wrote a book called *Sampō-shōjo*, or "Daughter of mathematics."

100. SADASUKE FUJITA was the most eminent of all YAMAJI's disciples. He was born in 1734 and died in 1807. He had several hundred disciples, among whom were illustrious mathematicians. Especially TEIREI KAMIYA, RYŌGEN MARUYAMA were most famous. His son KAGEN FUJITA is said to have been deeply versed in mathematics.

SUDASUKE FUJITA wrote many works and treated many new problems. His most important deeds were the extention, the revision and the illustration of the methods and theorems which

had been found by the mathematicians preceding him. His most famous works are these:

In 1774, he commented very minutely on the *Sandatsu*, or the step-children problem, which was one of the Seven Books of the Seki school (No. 72). He published a book named *Sandatsu-Kaigi*, or the commentary on *Sandatsu*.

In 1779, he published a book entitled *Seiyō-sampō*, or the details of important mathematics, containing useful problems only. The book was esteemed valuable, its compilation having been done very well. The materials were arranged in a good order proceeding from easy matter to more difficult. It, however, contained no considerably difficult problems.

In 1791, he revised SHIGEHARU SATO's *Sampō-Tengen-Shinan*, that is, a guide to the Tengen method (published in 1493) and published it under the title of *Kaisei-Tengen-Shinan*.

101. While FUJITA had been teaching his students, YASUMASA SUZUKI (he afterwards changed his name into YASUAKI AIDA) had founded a school of mathematics which competed with Fujita's school. SUZUKI or AIDA was a disciple of TOSHIAKI HONDA, who belonged to the line of KATAHIRO TAKEBE of the Seki school. HONDA was a man of mathematical talents and also deeply versed in astronomy, the science pertaining to calendar, and the art of navigation. His name justly deserves a place in the history of *Wasan*.

AIDA (as we shall now call him) was born in 1747 and died in 1817. He belonged in reality to the Seki school, because his master HONDA was a mathematician of that school. He however wished to become a student of FUJITA, leaving Honda's school. When he asked FUJITA to allow him to enter his school, FUJITA said that he should grant his request, if he consented to correct his own solution of a problem pertaining to the arithmetical progression which AIDA had hung in the Shintō shrine on Atago hill in Shiba, the southern part of Tokyo. AIDA did not accept FUJITA's proposal and took his leave. He then said that he had never thought of becoming a student of such a foolish mathematician as FUJITA, and that his only purpose of visiting FUJITA was to know whether he was wise or not. Notwithstanding AIDA was himself a mathematician of the Seki school, he founded the Mogami school

the fourth term is $\dfrac{\left\{1^2-\left(\frac{6}{n}\right)^2\right\}\left\{3^2-\left(\frac{6}{n}\right)^2\right\}\left\{5^2-\left(\frac{6}{n}\right)^2\right\}\cdot\frac{6}{n}}{4.6.8.10.12.14}$;

etc., etc.

If m stands for $\frac{6}{n}$ and x for $\frac{1}{2}$, this series is equivalent to the famous series

$$\frac{\sin(m\sin^{-1}x)}{x}=\frac{m}{1!}-\frac{m(m^2-1^2)}{3!}x^2+\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{5!}x^4\mp\ldots,$$

the discoverer of which is thought by BERTRAND to be EULER, and by WILLIAMSON to be NEWTON. So, when a stands for the length of a side of the regular polygon and r for the circumradius,

$$\frac{a}{r}=2\sin\left(\frac{6}{n}\sin^{-1}\frac{1}{2}\right),$$

has been obtained, and it is in reality

$$\frac{a}{r}=2\sin\frac{\pi}{n};$$

hence we have

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

So we have to infer that there is no error in the solution.

In this infinite series, when the length of a side of the regular heptagon is one *sun* ($=\frac{1}{33}$ cm.), the series was summed up to the 17th term, and 1, 152 382 435 47 *sun* was determined as the required circumradius. The method had originally been discovered by YOSHITA KURUSHIMA (see No. 83), but as AIDA never mentioned the name of KURUSHIMA as its discoverer, he may have found it independently. Mr. T. ENDŌ, however, reproached AIDA in his history for having pretended to be its true discoverer. After all, he was one of the greatest mathematicians of his days. Is it not very interesting that the expansion of

$$\sin(m\sin^{-1}x)$$

was applied by the Wasanka?

105. Though AIDA stood in competition with the Seki school, he put a mathematical problem, which he himself selected and solved, in the sacrificial altar of TAKAKAZU SEKI, when his friend UJIKIYO FURUKAWA worshipped the greatest Wasanka on the hundredth anniversary of his death.

106. RYŪGEN MARUYAMA, who was one of the best disciples of SADASUKE FUJITA, had invented a method of finding the square root of a number; he published a book on it in 1796 entitled *Shimpō-Tetsujitsu-shōkai* (the minute explanation of the new *Tetsujitsu*). For example, the square root of 2 is found in the following way: — First a number (such as 1, 414) whose square is approximate to 2 is settled upon; let it be denoted by a. Then the following series is formed: the first term is $2a^2 - 2$ and the second term and others are formed according to the law that any term of the series is the result obtained by subtracting 2 from the square of its preceding term. Then, when four times the $r+1^{\text{th}}$ term is divided by the product of the first r terms, the approximate value of $\sqrt{2}$ is obtained. In this case, the larger r is, the more approximate is the value $\sqrt{2}$. Namely,

$$\sqrt{2} = \lim_{r=\infty} \frac{4 \times (r+1)^{\text{th}} \text{ term}}{\text{product of the first } r \text{ terms}}.$$

This is written in Mr. T. ENDŌ's history, but doubtless it is a mistake.

107. YORINAO HOSOKAWA was another disciple of SADASUKE FUJITA. He published a small pamphlet on simple mechanisms in 1796.

108. Let us now proceed to relate about the disciples of NAOMARU AJIMA. It was MAKOTO KUSAKA who received from AJIMA the diploma of Inka-kaiden. Fearing they might get lost, he compiled his master's manuscripts in 1799 into a book which he named *Fukyū-sampō* (No. 94). He intended to print and publish it, but he could not do so for some reason or other. The book, however, was generally regarded by the Wasanka as very important. He solved many difficult problems and emphasized the authority of the Seki school. He does not seem to have published any books. Though many great mathematicians had come

forth from several schools since the days of SHUJU YAMAJI (see No. 80), no other school sent forth greater scholars than the school of KUSAKA. He was born in 1764 and died in 1839.

109. KOHAN SAKABE was one of the best pupils of NAOMARU AJIMA, as M. KUSAKA was. The date of his birth is unknown, that of his death was 1824. He studied first in the school of TOSHIAKI HONDA (No. 101), and then became a student of AJIMA. He had acquired the deepest principles of mathematics and not only taught his own students very zealously, but also encouraged the mathematical study of the public. He effectively excited men of business by emphasizing the importance of the art of navigation. But it could not have a considerable influence, because the government of Tokugawa Shogoons had absolutely prohibited any navigation in the far-sea.

The use of the logarithmic table was made known by him for the first time. According to Mr. T. ENDŌ, the logarithm and its table were never invented in our country, but were imported by Europeans, especially by Dutchmen. It is quite unknown who taught it and by what books. In our country of course many new methods were invented about the construction of this table.

The theorems of trigonometrical functions were also never independently discovered in Japan.

110. SAKABE was first a constable of the government of the Shogoons and afterwards, leaving the service, he devoted himself to the instruction of mathematics. He wrote a great many works. The following were chief of all.

In 1795, he published *Shisen-Tetsujitsu* which contained a new method of evolution.

In 1802, he wrote *Kakujitsu-keimō*, in which he treated a problem of the regular polygon with hundred and twelve sides.

In 1803, he discovered a method of finding the cube root of a quantity by merely employing the method of extracting a square root. He called the method *Rippō-eijiku*, and applied it to the calculation on *Soroban*. He also contrived a method of performing the numerical solution of an equation of higher degree.

In the same year, HISANORI KAWAI, one of his students,

explained his master's method very minutely and published a book named *Kaishiki-simpō.* KAWAI says in this book that the quadratic equation has two roots, the cubic equation has three roots, and thus the equation of the nth degree has n roots; they are positive or negative, real or imaginary; an imaginary root has always its conjugate. It is, however, doubtful if he attained an exact demonstration; moreover, the fact had already been recognized among the Wasanka since SEKI's days.

111. To return to SAKABE, he then discovered how to find the roots of numeral equations. It much resembled HORNER's method. The method of finding the integral root of an equation of higher degree was already discovered in 1767 by a mathematician, CHUZEN MURAI, and was mentioned in his book *Kaishō-tenpeihō.* C. MURAI was a disciple of CHIKAMITSU KŌDA, who was a student of GENKEI NAKANE. He became famous because of the revision and reprinting of the *Five Swan-kings*, namely *Sun-tsu-swang-king*, *Wu-tsaou-san-suh*, *Hai tao-san-suh*, *Wu-king-swang-king* and *Hia-hou-yang-swan-king* (compare No. 21) which was of great advantage to the mathematicians of his day.

In 1810, SAKABE wrote *Sampō-Tenzan-shinan* (a guide to the Tenzan method). Even though many books had been written on the Tenzan method since *Shūki-sampō* was published, we could not find a better one than SAKABE's work. In the book, one hundred and ninety six typical problems are arranged in excellent order, proceeding from easy problems to difficult ones, so that the readers might have much profit. The problems of the Enri method were mentioned with their answers without demonstrations.

At the end of the book we meet with the method of finding the length of the circumference and an arc of an ellipse which had been already discovered by AJIMA. It was the first appearance in printed books of the problems pertaining to the ellipse. After this a great many books containing problems on the ellipse were published. It was thought by some scholars that the part of the book relating to the ellipse was written by his pupil, HISANORI KAWAI. KAWAI once studied mathematics under YASUSHI WADA (see later on) who was the successor of KUSAKA.

112. In 1812, SAKABE published *Kwanki-kodo-shōhō* (a short-way to the measurement of spherical arcs by observing heavenly bodies through a telescope) and insisted upon the importance of the science of navigation. It was a book on spherical trigonometry. Though *Tsaou-shu-shu-chieh* written by MAI-WANGTE, a Chinese mathematician in the present dynasty, was the original of SAKABE's work, the latter was, it must be said, quite different from the former. Trigonometrical tables were employed in it.

In 1816, he published *Kairo-anshinroku* (the safety of navigation) which contained the treatment of the mariner's compass, the measurement of longitude and latitude, etc. It was the first book on the art of navigation in Japan. *Kwanki-kodo-shōhō* contained too difficult mathematical theories to be generally comprehended; and it was for this reason that *Kairo-anshinroku*, understandable without requiring so deep a knowledge of mathematics, was written by the same author.

113. In about 1802—3, UJIKIYO FURUKAWA (1758—1820) founded a school which was called the Shisei-sankwa school or the Sanwa-itchi school. Now there were eight schools of mathematics in all: the Momokawa school, the Seki school, the Kuichi school, the Nakanishi school, the Miyagi school, the Takuma school, the Mogami school and the Shisei-sankwa school (compare Nos. 82 and 101). They all existed independent of one another. There were more:

The old school or Yoshida school (see No. 82).
The Kurushima school — the followers of YOSHITA KURUSHIMA.
The Ohashi school — the followers of TAKUSEI OHASHI who was a disciple of KIYOYUKI MIYAGI, the founder of the Miyagi school.
The Nakane branch — the followers of GENKEI NAKANE.
The Nishikawa branch — the followers of SEIKYU NISHIKAWA.
The Asada branch — the followers of RYUGŌ ASADA (see later on). As a subbranch of this branch, existed the Takeda branch. It was founded by SHINGEN TAKEDA (see later on), who was a student of MASANAGA SAKA, the best disciple of ASADA, and who opened a school of mathematics in the city of Osaka.

The Shimidzu branch — the followers of SADANORI SHIMIDZU.
The Mizoguchi branch — the followers of RINKYŌ MIZOGUCHI.
etc., etc., etc.

Of all these the Seki school was of course the most flourishing. These many schools were more or less connected with the Seki school, the Kuichi school and the Miyagi school. The Mogami school taught nothing but the mathematics of the Seki school, having merely changed the names of the methods (No. 101). The Nakane school and the Shisei-sankwa school were also branches of the Seki school. The three schools, the Momokawa, the Kuichi, and the Miyagi, were afterwards incorporated in that same school. It was only the Kurushima school and the Asada school that taught mathematics somewhat peculiar to their own schools. Their authority being the Seki school, the other schools had no characteristics of themselves.

114. In the following pages I shall explain how the old Japanese mathematicians had been taking pains in order to obtain a perfect calendar. I have already mentioned in No. 79 that SHUNKAI YASUI or SHUNKAI SHIBUKAWA endeavoured to make a calendar; and, in the same number, that both KATHIRO TAKEBE and GENKEI NAKANE, one of TAKEBE's pupils, made great progress in the compilation of one. In 1744, Yoshimune Tokugawa, then the Shogoon, established an astronomical observatory in the division of Kanda, Tōkyō. In the following year, the next Shogoon, Iyeshige Tokugawa, appointed SEIKYU NISHIKAWA officer of the observaotry, who was the founder of the Nishikawa school (No. 113), and not the same person as JOKEN NISHIKAWA mentioned in No. 79. At first the task was committed to the descendants of SHUNKAI SHIBUKAWA; but ROKUZŌ SHIBUKAWA was not clever enough in calendar-making to discharge his responsibility. It now happened that, together with him, NISHIKAWA was appointed to manage the business. After a little while, ROKUZŌ SHIBUKAWA died, and his succesor ZUSHO SHIBUKAWA, his younger brother, had still less knowledge of the work. At last, in 1750, NISHIKAWA was made chief manager of the calendar-compilation by the shogoon Iyeshige Tokugawa. He was

engaged in the observation of the movement of heavenly bodies for three years, and then composed a calendar. Again he observed heavenly bodies during the following three years in an astronomical observatory in Kyōto, in order to find errors in his new calendar. At that time, in all, nine instruments were used for the observation of heavenly bodies but their construction is not accurately known. As a reference-calendar he used, it is said, the *Shou-shi-lih* composed by GO-SHONKING in the Yuen dynasty of China.

This new calendar had been adopted in 1754 and was called the *Kōjutsu* calendar. This was the calendar, succeeding the *Teikyō* calendar, that was mentioned in No. 79.

In 1755, SEIKYU NISHIKAWA determined in Yedo the points of the autumnal equinox and winter solstice with other scholars, among whom was SHUJU YAMAJI (see No. 80). The observatory was abolished in 1757, because the new calendar had been completely composed. However there appeared a solar eclipse in 1763, that was not mentioned in the calendar. In our country and in China, a solar eclipse was believed to be an ill omen. The eclipse appeared at the time of *Snake* (between ten and twelve) (see No. 16), on the first day of October. The first day of every month was the most important of the whole month, and on that day some ceremony of the goverment was used to be held. The public opinion against the calendar became very intense throughout the whole country. SEIKYU NISHIKAWA and ZUSHO SHIBUKAWA were at their wits' end and could not clearly explain the reason. Now the astronomical observatory that had once been abolished was again established in Ushigome division of Tōkyō, in 1764. As its subordinate institution, they had the office of examining the new calendar there.

In 1766, MORITANE CHIBA who was a disciple of CHIKAMITSU KŌDA, of the school of GENKEI NAKANE, had written a book for ZUSHO SHIBUKAWA and had explained to him how to predict the day on which the solar eclipse appears.

115. There was RYUGŌ ASADA who studied astronomy independent of teachers, and who became very learned in mathematics too. He founded the Asada school in Osaka (No. 113). This mathematician was a son of a certain doctor and

had got acquainted with the chronology in the western countries by his knowledge of the Dutch language. (It is mentioned afterwards, No. 170, that only doctors were able to read Dutch books at this period). He made a telescope himself and devoted himself to the observation of heavenly bodies. He found errors in the *Kōjutsu* calendar which was then being used. A great number of pupils assembled at his school and his fame was acknowledged everywhere. So, towards the end of the eighteenth century, the Shogoon Iyenari Tokugawa intended to make him one of his officers. He did not accept this offer, because he had before resigned his service to his feudal lord of Tsutsuki in order to entirely investigate sciences and to exclusively devote himself to them. If he had accepted the Shogoon's proposal, he would have been thought a covetous scholar. He made, however, his two pupils, SHIGETOKI TAKAHASHI and SHIGETOMI HAZAMA go to the Shogoon to render their service to him in 1795. He himself remained in Osaka, studying astronomy and chronology as before, besides which he practiced the art of medicine. He was born in 1732 and died in 1799.

116. RYUHO NAKANO who became very clever in the Dutch language and who was an interpreter of the Shogoon's government, published a book named *Rekishō-shinsho* (the new book of calendars) in 1797, that had been written on the compilation of calendars.

117. The *Kōjutsu* calendar was at last replaced by another new one in 1797, which was called the *Kwansei* calendar. The calendarists who took it upon themselves to compile it were SHUSHU SHIBUKAWA, the adopted son of ZUSHO SHIBUKAWA, and TOKUFU YAMAJI, a descendant of SHUJU YAMAJI, SHIGETOKI TAKAHASHI, etc. In 1797 TAKAHASHI wrote a book entitled *Kisaku-kampō* which contained a calendar that might be used without errors during the following twenty years. It was merely employed in his school for the purpose of teaching his students the calendar-composition. He died in 1804. The date of his birth is not known. Some Buddhist priest (it may have been FUMON RISSHI) had privately composed a calendar which commenced with the year of 1797, and had the name of the *Ōten* calendar. It was never publicly adopted.

118. In 1782, TOSHIAKI HONDA, who was very clever in astronomy and the art of navigation as before mentioned in No. 101, enlarged and revised the *Shou-shi-lih* composed by GO-SHONKING in the Yuen dynasty of China, and made a calendar which began in the year of 1782, and taught his students how to compose one.

In this year, the astronomical observatory which had been established in Ushigome division was removed to Asakusa division (the institution, at present in Asabu division, is now presided over by Dr. H. TERAO, professor of the Tōkyō Imperial University).

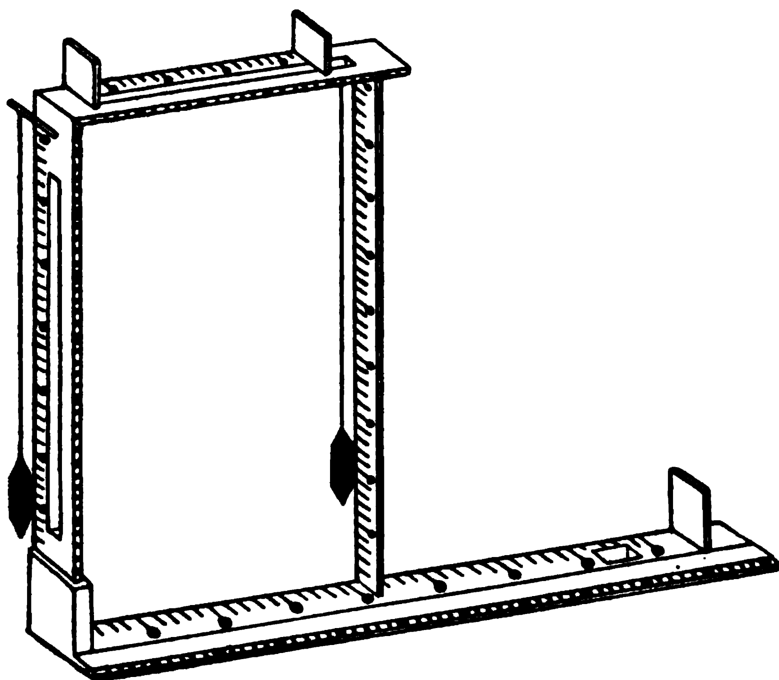
NOBUKADZU KAWABE wrote in 1785 the explanation of *Chou-pai-swan-king*. This was an old book pertaining to the calendar written in China (No. 21). Nevertheless it was of extreme necessity to mathematicians of that age to have the book in hands, there were not many of its copies and so they could not readily obtain one. Moreover it was too difficult to be understood by beginners. Therefore he wrote the explanation which proved to be of great profit to the public.

119. In 1811, an office, the "translation bureau", was founded in the astronomical observatory and there European mathematics which has connection with the calendar-composition was closely studied. KYŪ UCHIDA, the best pupil of MAKOTO KUSAKA who was a head of the Seki school, compiled a private calendar beginning in the year 1828, and taught his students about it (No. 147). He read Dutch books and had several hundred students at his school. In 1837, SHUKI KOIDE, also one of the best disciples of KUSAKA, composed a calendar which he named the *Teiyu* calendar (No. 152).

120. The calendar was again changed in 1842, because a great many errors had been found in the old one. It was really in 1844 that the new one was publicly adopted. The SHIBUKAWA's and the YAMAJI's took part in the revision of the calendar. SHUKI KOIDE also took part in the business. The new calendar was called the *Tenpō-Jinin* calendar. It had long been employed, even as late as 1872, when the Gregorian calendar was adopted.

This is the brief history of the calendars which have publicly been adopted in our country and they were without exception luni-solar calendars.

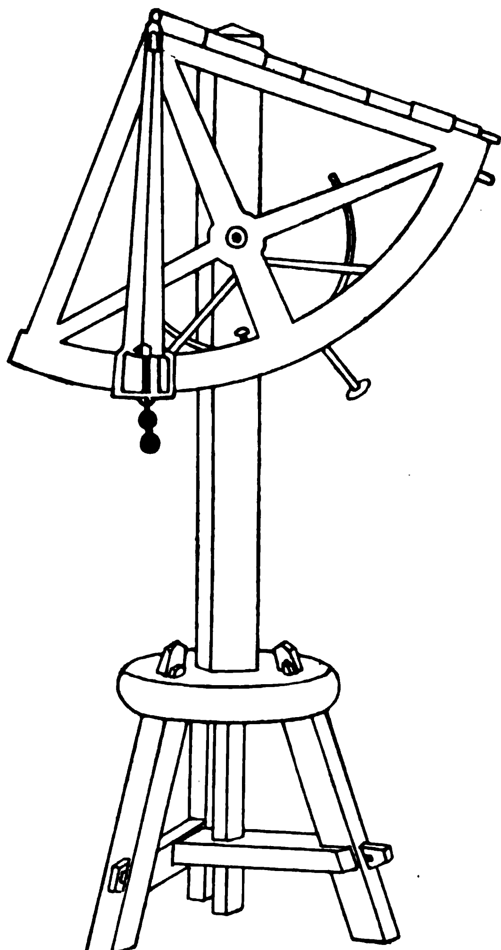
121. I shall next write about the land-surveying in our country. Of all books on the art of surveying, *Kiku-buntōshū* deserves most to be mentioned here. It was written in 1722 by TOKIHARU MAN-O. It contains the method of constructing a surveying instrument of a peculiar form, which has a level filled with water and two vertically suspended weights. He actually constructed the instrument and taught how to use it in land-surveying. Though it could not be a delicate one, it may have been simple and convenient for practical use at that time. He writes in the book about the method of making a

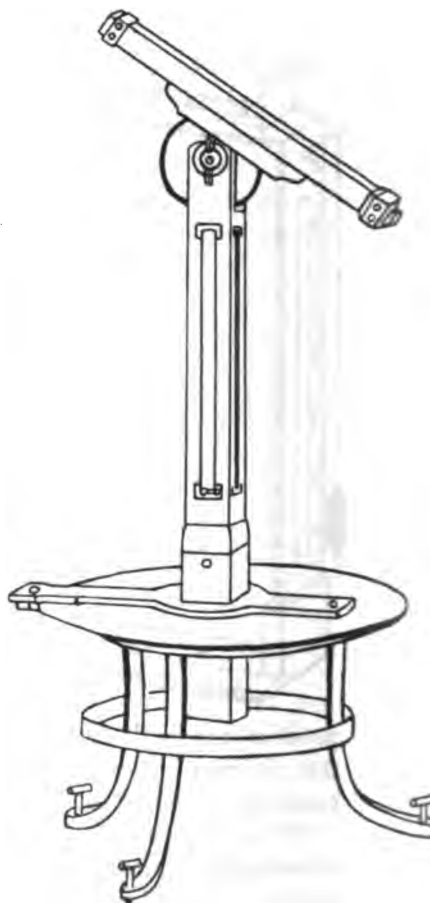


peculiar mariner's compass. Mr. T. ENDŌ says in his history that it may have been more convenient than the European common compass.

The next year, 1723, MATSUMIYA published a book in which he enlarged the method of surveying invented by S. SHIMIDZU (compare No. 113) who was the founder of the Shimidzu school. He writes in the book about land-surveying and the art of navigation, and carefully explains the use of several instruments, having quoted in many places opinions of Dutch scholars.

122. Next, I will proceed to write the biography of the greatest surveyor that ever lived in Japan. The deeds of this surveyor have become the fundamental base of the surveying work which is now-a-days being practiced by the Department of the Army of our country. Though he had only rude instruments, he has obtained wonderfully good results. The diagrams of the instruments that were employed by this great surveyor are introduced by Dr. H. NAGAOKA, professor of the Tōkyō





Imperial University, in the *Tōkyō Sūgaku-Buturigakkwai Kiji*, Vol. IV, p. 90—92. The surveyor was CHUKEI or TADANORI INŌ; he was born in 1745 and died in 1821 (compare Prof.

C. G. KNOTT's paper in the *Transactions of the Asiatic Society of Japan*, vol. XVI, part 2).

He studied astronomy and the science pertaining to calendar-composition in the school of SHIGETOKI TAKAHASHI (see No. 115), a student of RYUGŌ ASADA He studied indefatigably day and night how to survey the movements of the sun and the moon, and how to determine when they eclipse, and to investigate many other things of this kind. One day he asked his master, TAKAHASHI, about the method of surveying the distance from the astronomical observatory to his house in the division of Fukagawa. His master's reply was that it was the same as the method of surveying the distance from Yedo or Tōkyō to Yezo or Hokkaidō, that is the north-eastern end of our country. He was extremely excited by this answer and determined to perform the great survey. At last, he presented a memorial to the shogoon's government and asked the permission of the great survey. The government gave him leave to perform his enterprise in 1800. Now he set about his surveying and after many great efforts finished the greatest deed ever done. To begin with, he made the first rough map of the whole of Japan after nine months of diligence. Up to this time, there was no map of our country. We cannot help praising him for having obtained, within so short a time, a map that has on the whole no great mistakes. He continued surveying in order to get a more accurate one.

In 1801, he had finished the surveying of the eight provinces of Tōkaidō, namely Musashi, Sagami, Idzu, Awa, Kadzusa, Shimoosa, Hitachi, and Mutsu; and the central station was the Ōkido or great wooden gate at the south-eastern entrance of the city of Tōkyō. In the following year he presented the map to the shogoon's government. He also surveyed two or three northern provinces in the same year.

In 1803, following up the command of the government, he surveyed the coast-line of the twelve provinces, namely Yechigo, Yetchu, Noto, Sado, Kaga, Yechizen, Ōmi, Mino, Owari, Mikawa, Tōtomi, and Suruga. He had completed the work in the following year and presented the map to the government.

In this way half of Japan was accurately represented in three maps on different scales, probably according to a certain method like the method of Mercator's projection. It is not

clear, whether he invented this method of mapping or whether he knew it from a European book.

In the smallest map, one degree of longitude was represented as 8.46 *sun* (1 *sun* $\doteq \frac{100}{33}$ cm.); one degree in the place of 35° latitude (it is not clear what this means, one degree between 34° and 35° or that between 35° and 36°), as 6.93 *sun*; that in the place of 40° latitude, as 6.84 *sun*; that in the place of 44° latitude, as 6.08 *sun*.

The scale of the intermediate map is twice the size of that of the smallest.

In the largest map, one degree of longitude was 101.52 *sun*; one degree in the place of 35° latitude 83.16 *sun*; that in the place of 40° latitude 77.70 *sun*; that in the place of 44° latitude 73.03 *sun*.

123. Inō determined the length of one degree of both the longitude and latitude. He is said to have spent three years on this task. According to him, the length of one degree of longitude is 23.2 *ri* (one *ri* = 5363.63 metres); in the place of 35° latitude it is 23.1 *ri*; in the place of 40° latitude it is 21.6 *ri*; and in the place of 44° latitude it is 20.285 *ri*.

124. From 1804 till 1813, he was engaged in surveying Nankaidō, Sanyōdo, Sanindō, Saikaido, and many islands belonging to them, and finished the survey with great success. Thus the remaining half being finished, the map of the whole of Japan was complete. There are no gross errors in these maps, though many a time it was tried to correct the maps after the land having been surveyed with the more accurate instruments which we now have.

He made a map of Yedo or Tōkyō in 1815; and again a detailed one of the city in 1817. He directed the survey of the lake Ashi on mount Hakone and the seven islands of Idzu in 1815.

When he was once observing the sun in his house situated in Fukagawa division, he happened to see, it is said, a transit of the planet Venus, probably that of 1769. He was the first man in our country who saw a transit of Venus.

125. I must now return to record the deeds of the best disciples of Makoto Kusaka. He had many eminent scholars,

one of whom became the eighth head of the Seki school succeeding him. It was YASUSHI WADA. He made great inventions which entirely reformed the mathematics of the Seki school. His mathematical talents and attainment in it won for him the regards of his fellow-students; and many of them learned privately mathematics from him. Then the curious coincidence took place that some pupils of KUSAKA were at the same time pupils of WADA, who was himself a student of KUSAKA.

Besides WADA, KUSAKA had many great mathematicians among his pupils, such as NOBUYOSHI SAITŌ, AKIYUKI KENMOCHI, KYŌ UCHIDA, TOSHIAKI ŌHARA, SHUKI KOIDE, YASUMOTO GOKAI, NAGATADA SHIRAISHI, etc. The famous mathematician HIROSHI HASEGAWA was once a student of KUSAKA, but afterwards he was for some reasons (see later on) expelled from the school of KUSAKA.

126. First of all, I shall write about the career of YASUSHI WADA. He was a *samurai* belonging to the Buddhist temple Zōjōji, in Shiba, Tōkyō, and then became the chief of the mathematicians of Tsuchimikados (see No. 79).

He studied the Enri method, originated useful tables, and invented many new simple and elegant methods. Thus the Enri method was quite reformed by this great mathematician. He first learned mathematics of the Miyagi school (No. 82) and afterwards entered the school of KUSAKA. His skill was next to no other students of the school and many of them studied mathematics from him. His fame was known among learned men. He however never published a book. His unpublished work was held in great esteem in the Tsuchimikado family. So, unless any one entered his school and learned directly from him, they were not able to know about the mathematics that he instructed. He died in 1840. The date of his birth is unknown.

127. WADA composed several tables, as we have already mentioned, which are necessary to the Enri method; most of them were the collections of the sums of infinite series. There were nineteen tables in all which were called WADA's *Enri-hyō* and were regarded as very valuable. We shall later on explain the use of one or two of these tables.

He first wrote *Genkan-jutchi* for the purpose of training his students on the problems of plane rectilinear figures and those of solids bounded by planes only. Next he wrote *Taishō-sampō*. By this textbook, he taught, on one hand, the problems of plane figures formed by curved lines, and those of solids formed by curved surfaces. On the other hand, besides the use of the Enri tables, he taught how to find the length, area, and volume by means of a limiting process.

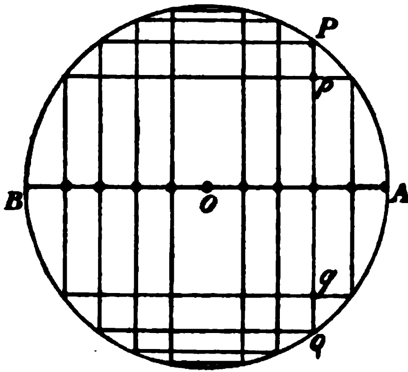
128. In solving the problems of rectification, quadrature and cubature, it is usually necessary to write down the length of the ordinates of the curved lines or surfaces. In such a case AJIMA used to write down in order the lengths of the first ordinate, the second ordinate, the third ordinate, etc., and never tried to write in general the length of the mth ordinate. When before this I wrote of AJIMA's method, I mentioned the general expression representing the length of the mth ordinate, which was however never given by him (No. 89). WADA now wrote down the general expression in his *Taishō-sampō*, so that tedious calculations were accomplished by him in a very simple, elegant and convenient way.

129. When WADA had to find out some area, he computed the limit of the larger area, as well as that of the smaller one, while the latter only was computed by his predecessors. For instance, he obtained the area of a circle not only as the limit of the area of its inscribed regular polygon, but also as the limit of the area of its circumscribed one.

130. WADA said that there are two methods of giving numbers to the ordinates. When AJIMA's method of obtaining the area of a circle was explained (see No. 89) numbers were first given to the ordinates passing through the center, and then successively to the right-hand or the left-hand ones passing through the points of division of the diameter, divided into $2n$ equal parts. This method was named by WADA the *Saikei-jumpo*, that is, the right method of giving numbers to the ordinates. But numbers may be given to the ordinates in the reverse way, beginning from both ends of the diameter toward the center. This is called by WADA the *Saikai-gyakuhō*,

that is, the opposite method of giving numbers to the ordinates. These two different methods of giving numbers cause a slight modification in the general expressions of the ordinates. Both methods are called together the *Enri-jungyakuhō* or the Enri right and opposite methods. (He also explained the *Hōri-jungyakuhō*. "Hōri" means the principle of the rectangle and treats figures of straight lines or planes, while Enri means the principle of the circle and treats figures of curved lines or surfaces). The things of this kind are not studied so much now-a-days; but, as may be supposed, they were regarded as very great inventions at that time.

131. Next, I shall briefly explain WADA's methods of finding the area of a circle by employing the two methods, namely the *Saikei-jumpō* and the *Saikei-gyakuhō*.



The following is performed by employing the first method.

Divide the diameter AB with length d into $2n$ equal parts and let PQ be the mth ordinate, called m^{th} *chō* by the Wasanka.

Then

$$m^{\text{th}}\ ch\bar{o} = \sqrt{d^2 - \left(\frac{md}{n}\right)^2}.$$

The difference between the mth and $(m+1)^{\text{th}}$ ordinates is called the $(m+1)^{\text{th}}$ *chōkaku*.

$$(m+1)^{\text{th}}\ ch\bar{o}kaku = \sqrt{d^2 - \left(\frac{md}{n}\right)^2} - \sqrt{d^2 - \left(\frac{\overline{m+1}\,d}{n}\right)^2}$$

$$= \frac{m\dfrac{d}{n^2}}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{m}{n}\right)^2}}.$$

Twice the circular arc intercepted between the mth and $(m+1)^{th}$ ordinates is called the $(m+1)^{th}$ *haikaku*:

$$(m+1)^{th}\ haikaku = \frac{\frac{d}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2}}.$$

From these we have:

$$\text{Area of the circle} = \lim_{n=\infty} \sum^{m} \left(m^{th}\ ch\bar{o} \times \frac{d}{n}\right).$$

$$\text{Area of the circle} = \lim_{n=\infty} \sum^{m} \left(m^{th}\ ch\bar{o}kaku \times \frac{md}{n}\right).$$

$$2 \times \text{Area of the circle} = \lim_{n=\infty} \sum^{m} (m^{th}\ haikaku \times d).$$

$$\text{Diameter} = \lim_{n=\infty} \sum^{m} (m^{th}\ ch\bar{o}kaku).$$

$$\tfrac{1}{2} \times \text{Circumference} = \lim_{n=\infty} \sum^{m} (m^{th}\ haikaku).$$

In these equations the general term was first summed up with respect to m, and then the limit was obtained by making n infinite. This process was called by the Wasanka "*tatamu*", meaning "to fold", and the result thus obtained was called *Jōsu*, meaning "the number resulting by folding".

The Wasanka knew that the *Jōsu* for different series are sometimes finite and sometimes infinite and sometimes zero.

132. The following is performed by applying the *Saikei-gyakuhō*:

$$m^{th}\ ch\bar{o} = \sqrt{d^2 - \left(d - \frac{md}{n}\right)^2} = \sqrt{\left(2-\frac{m}{n}\right)\frac{m}{n}} \cdot d,$$

$$(m+1)^{th}\ ch\bar{o}kaku = (m+1)^{th}\ ch\bar{o} - m^{th}\ ch\bar{o}$$

$$= \frac{\left(1-\frac{m}{n}\right)\frac{d}{n}}{\sqrt{\left(2-\frac{m}{n}\right)\frac{m}{n}}},$$

$(m+1)^{\text{th}}$ *haikaku* $= 2 \times$ circular arc intercepted between the mth and $(m+1)^{\text{th}}$ *chō*

$$= \frac{\frac{d}{n}}{\sqrt{\left(2-\frac{m}{n}\right)\frac{m}{n}}}.$$

The area, the circumference, and the diameter of the circle is obtained by folding in the same way as before.

133. WADA has really obtained the circumference of a circle by employing the *Saikei-jumpō* in his book *Enri-shinkō*, or the elementary lessons of Enri:

$$(m+1)^{\text{th}}\ haikaku = \frac{\frac{d}{n}}{\sqrt{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2}}.$$

He expanded $\left\{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$ by using the eighth of his *Enri-hyō*, No. 127, and obtained:

$$(m+1)^{\text{th}}\ haikaku =$$

$$= \frac{d}{n}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{m}{n}\right)^4+\frac{15}{48}\left(\frac{m}{n}\right)^6+\frac{105}{384}\left(\frac{m}{n}\right)^8+\ldots\right\}.$$

This may be transformed into the following series, though WADA did not do so:

$$(m+1)^{\text{th}}\ haikaku =$$

$$= \frac{d}{n}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^2+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{m}{n}\right)^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{m}{n}\right)^6+\right.$$

$$\left.+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\left(\frac{m}{n}\right)^8+\ldots\right\}$$

Hence

$$\frac{1}{2} \times \text{circumference} = \text{Lim}\ \Sigma\ (m^{\text{th}}\ \textit{haikaku}) =$$

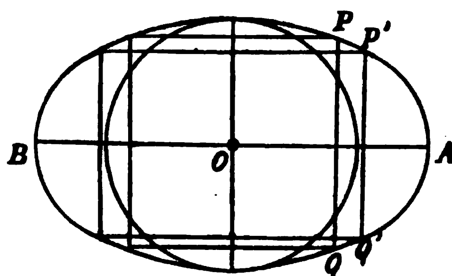
$$= d\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{9} + \ldots\right)$$

$$= d.\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ 1\right)$$

[folded by using his first table].

This result is the same as that obtained by AJIMA, No. 92.

184. Next, I shall explain WADA's method of finding the perimeter of an ellipse, which is also contained in his *Enri-shinkō*. This is performed by applying the *Saikei-jumpō*.



Let a and b denote the major and minor axes respectively. Then,

$$(m+1)^{\text{th}}\ \textit{chōkaku} = m^{\text{th}}\ \textit{chō} - (m+1)^{\text{th}}\ \textit{chō}$$

$$= \frac{\left(\frac{m}{n}\right)b}{\sqrt{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2}},$$

$(m+1)^{\text{th}}$ *haikaku* = 2 × elliptic arc intercepted between the mth and $(m+1)^{\text{th}}$ *chō*

$$= \frac{\frac{a}{n}\sqrt{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)}}{\sqrt{1-\left(\frac{m}{n}\right)^2}}.$$

By using the eighth table,

$$\left[1-\left(\frac{m}{n}\right)^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^2\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right) - \frac{1.1}{2.4}\left(\frac{m}{n}\right)^4\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)^2 -$$

$$- \frac{1.1.3}{2.4.6}\left(\frac{m}{n}\right)^6\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)^4 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\left(\frac{m}{n}\right)^8\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)^6 - \ldots,$$

and

$$\left[1-\left(\frac{m}{n}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^2+\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{m}{n}\right)^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(\frac{m}{n}\right)^6+\ldots\ldots$$

By actual multiplication, $\left[1-\left(\frac{m}{n}\right)^2\left(1-\left(\frac{b^2}{a^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}\cdot\left[1-\left(\frac{m}{n}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$

is expanded into a power series of $\left(\frac{m}{n}\right)^2$. Then,

$$\frac{1}{2}\times \text{perimeter of the ellipse} = \lim_{n=\infty}\sum^{m} (m^{\text{th}}\ \textit{haikaku})$$

$$=a\pi\left\{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)-\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)^2\right.$$

$$\left.-\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)^3-\ldots\ldots\right\}.$$

This may be transcribed as follows:

$$=a\pi\left\{1-\frac{1.1}{1^2}\cdot\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{4}-\frac{1.1}{1^2}\cdot\frac{1.3}{2^2}\left(\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{4}\right)^2-\frac{1.1}{1^2}\cdot\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{3.5}{3^2}\left(\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{4}\right)^3\right.$$

$$\left.-\frac{1.1}{1^2}\cdot\frac{1.3}{2^2}\cdot\frac{3.5}{3^2}\cdot\frac{5.7}{4^2}\left(\frac{1-\frac{b^2}{a^2}}{4}\right)^4-\ldots\ldots\right\};$$

$1-\frac{b^2}{a^2}$, that is the square of the eccentricity, occurring in these series was named the "*ritsu*" or modulus of these series.

135. The students of WADA had to study *Kwatsujitsu-shomon*, after they had finished *Enri-shinkō*. WADA entirely reformed AJIMA'S *Kwatsujitsu* into a far simpler and more elegant one.

In *Kwatsujitsu-shomon*, the following problem is mentioned:

Problem. Find the volume of the common portion of two right circular cylinders whose axes intersect at right angles.

Answer. If a and b be the diameters of the larger and smaller cylinders, then the required volume is

$$= \frac{\pi}{4} ab^2 \left(1 - \frac{1}{1} p - \frac{1.1.3}{1.3} p^2 - \frac{1.1.3.3.5}{1.3.6} p^3 - \frac{1.1.3.3.5.5.7}{1.3.6.10} p^4 - \ldots\right)$$

where $p = \frac{1}{8}\left(\frac{b}{a}\right)^2$. [To obtain this series, the fourth and eighth tables are used.]

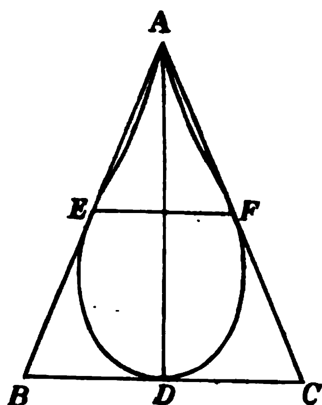
136. WADA invented a method named *Enri-Kyokusū-jitsu* ("*Kyokusū*" means limits) which could be with great convenience applied to find the length, area, or volume. In this method, he likewise employed the series derived by differentiating a power series of one variable term by term. But I do not clearly understand his method and shall investigate elsewhere how he obtained the derived series and how he used it.

137. The length of a curve had hitherto been found by dividing the chord or the diameter into equal parts. WADA for the first time on the contrary divided a curved arc into equal parts, and then found the length of the chord or the sagitta. This method was called *Enri-Saihai-jitsu*, and was admired very highly by his contemporaries.

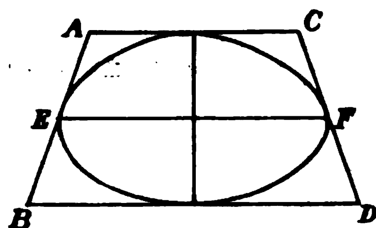
138. In 1825, WADA invented *Iyen-sampō*, that is, the method of special closed curves. He says it is an ordinary fact that the area of a circle is obtained by multiplying the area of a square by $\frac{\pi}{4}$, and the area of an ellipse by multiplying the area of a rectangle by $\frac{\pi}{4}$. Similarly, the volume of a sphere is obtained by multiplying the volume of a cube by $\frac{4}{3}\pi$; and the volume of a spheroid is obtained by multiplying the volume of a rectangular prism having a square base by $\frac{4}{3}\pi$. Generalizing this reasoning he says, the area of a particular curve must be obtained by multiplying the area of an isosceles triangle, an isosceles trapezium, etc. by $\frac{\pi}{4}$, and the volume of the solid bounded by a particular surface must

be obtained by multiplying a right pyramid by $\frac{4}{3}\pi$. He determined such particular curved lines or surfaces which he named "*Iyen*" (literally meaning special curves).

The curve obtained from an isosceles triangle can be inscribed in the triangle and its form is like that of the flame of a candle. The curve is classified into three different kinds according to the height AD being greater than, or equal to, or less than the base BC or double the length of the chord of contact EF, E and F being the middle points of the sides AB and AC respectively. In the first case, the curve was called *Seitōyen*, meaning the form of a very brightly burning flame; in the second case, it was called *Hōshukei*, because it resembles the form of a precious gem, which was named *Hōshu* by the Japanese; and in the third case, it was called *Suitōyen*, meaning the the form of a fading flame.



WADA named the curve obtained from an isosceles trapezium *Rankei* or egg-shaped curve, E and F being also the middle points of the two sides AB and CD respectively.

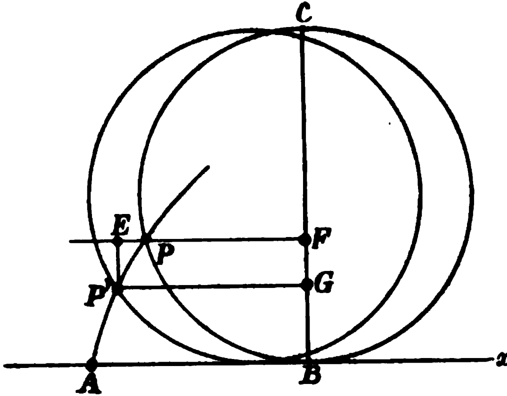


The surface obtained from a right prism having a rectangular base was called *Daritsuyen* or ellipsoid. This surface was sometimes called *Beiryūkei* or rice-shaped surface, because it resembles the shape of a rice.

139. In 1829 WADA wrote *Rokuyaku-sampō* in which infinite geometrical series are treated.

140. Meanwhile WADA discovered from 1818 till 1829 a

method called *Tenkyo-kiseki-jitsu*. *Tenkyo-kiseki* are the roulettes. The investigation of this kind was made by him for the first time in our country. His method of finding the length of a cycloid, or *Hisen*, was as follows:



Let Ax be the base line and A the initial position of the point P. Let d, the diameter of the rolling circle, be divided into n equal parts and BF be equal to $\frac{m}{n}d$. Then

$$BF \,.\, BC = BP^2 = \frac{m}{n}d^2.$$

Hence

$$PC^2 = d^2 - \frac{m}{n}d^2 = d^2\left(1 - \frac{m}{n}\right),$$

whence

$$PC = d\sqrt{1 - \frac{m}{n}}.$$

Since, if P' be the consecutive point of P, $\triangle$BPC and $\triangle$PEP' are similar to each other, we have

$$\frac{PC}{d} = \frac{\frac{d}{n}}{PP'};$$

therefore

$$PP' = \frac{d^2}{n \,.\, PC} = \frac{d}{n\sqrt{1 - \frac{m}{n}}}.$$

If we fold this expression, i. e. if we find the limit by summing it up with respect to m, and making n infinitely large, the length of the cycloid $4d$ is found.

The following method was known to him too.

In the above figure,

$$FG = P'E = \frac{d}{n}; \qquad BF = \frac{m}{n} d;$$

$$BF \,.\, BC = BP^2 = \frac{m}{n} d^2,$$

whence

$$BP = d\sqrt{\frac{m}{n}}.$$

Again

$$PF^2 = BP^2 - BF^2 = \frac{m}{n} d^2 \left(1 - \frac{m}{n}\right).$$

Therefore

$$PF = d\sqrt{\frac{m}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)}.$$

Since $\triangle$BPF and $\triangle$PEP′ are similar to each other, we find

$$\frac{PF}{PB} = \frac{P'E}{PP'}.$$

Therefore

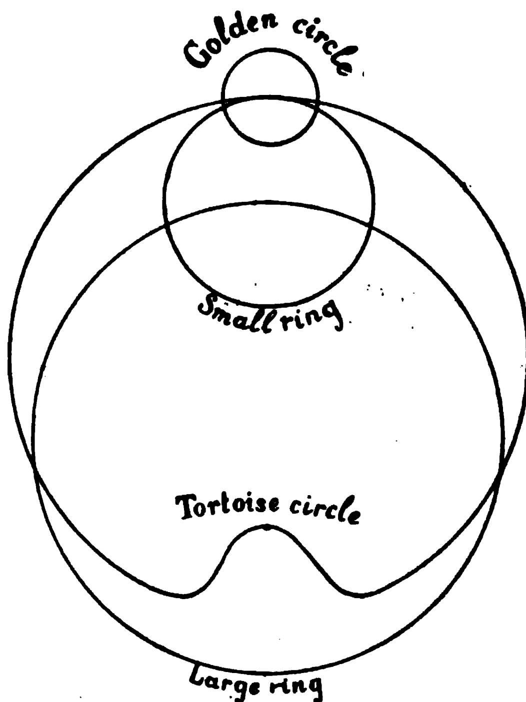
$$PP' = \frac{d^2\sqrt{\frac{m}{n}}}{n\sqrt{\frac{m}{n}\left(1 - \frac{m}{n}\right)}} = \frac{d}{n\sqrt{1 - \frac{m}{n}}},$$

which is the same as before. By folding this, we arrive at the result $4d$.

The method in the preceding article is contained in Mr. T. Endō's history. It is also mentioned by him in his article in the *Tōkyō Sūgaku-Buturigakkwai Kiji*, Vol. VII, p. 103—106. They were extracted from the manuscript book written by a scholar belonging to the school of Kyū Uchida, one of Wada's pupils (see later on).

141. Wada's theory of roulettes became well known by the following problem, since he had hung it in the Atago shrine, in Shiba, Tōkyō.

Problem. The centre of a small ring moves clockwise along the circumference of a large ring. The centre of a golden circle (he called it so) moves clockwise along the circumference of the small ring. When it begins to move, the centre of the golden circle is situated nearest to that of the large ring. In the interval of time in which the centre of the small ring describes the whole circumference of the large ring, the centre of the golden circle describes the whole circumference of the small ring too. Then the locus of the centre of the golden circle is a particular curve, which is called *Kiyen*, that is "tortoise circle", because it resembles the shape of the shell of a tortoise. The lengths of the diameters of the large and small rings are given, and the area of the tortoise circle is required.



Answer. Let a and b be the diameters of the large and small rings respectively; then the required area is

$$\frac{\pi}{4}(2b^2 + a^2).$$

142. The most famous mathematicians, who were students of KUSAKA and so at the same time students of WADA, were AKIYUKI KENMOCHI, NOBUYOSHI SAITŌ, KYŌ UCHIDA, TOSHIAKI ŌHARA, SHUKI KOIDE, YASUMOTO GOKAI, HIROSHI HASEGAWA, etc.

143. AKIYUKI KENMOCHI was born in Kōzuke province, as SEKI. The dates of his birth and death are unknown. He published *Sampō-Yakujitsu-shinsho*. *Yakujitsu* was the method of reducing infinite decimals to common fractions. The several methods of reducing circulating decimals to common fractions had been contained in many books published since the beginning of the eighteenth century. They were however inferior to the method of KENMOCHI both in simplicity and clearness. The same book contains the method of reducing an infinite decimal, whose figures make an arithmetical progression, to a common fraction. For example, 0.12345 .... was reduced to a common fraction by the following method. This decimal is nothing but the infinite series

$$\frac{1}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\ldots\ldots+\frac{n}{10^n}+\ldots\ldots,$$

the figure in the tenth place being 10, that in the eleventh place 11, etc. Now

$$\frac{1}{9}=0.11111\ldots\ldots;$$

hence

$$\frac{10}{9^2}=\frac{1.11111\ldots\ldots}{9}$$

$$=\frac{1}{9}+\frac{0.1}{9}+\frac{0.01}{9}+\frac{0.001}{9}+\ldots\ldots$$

$$=0.11111\ldots\ldots$$
$$+0.01111\ldots\ldots$$
$$+0.00111\ldots\ldots$$
$$+0.00011\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$=0.12345\ldots\ldots$$

The infinite decimal whose figures make a series of triangular numbers, such as 0.136(10)(15) ....

or $$\frac{1}{10}+\frac{1+2}{10^2}+\frac{1+2+3}{10^3}+\frac{1+2+3+4}{10^4}+\ldots\ldots,$$

or $$\sum_m \frac{\frac{m\,(m+1)}{2}}{10^m}$$

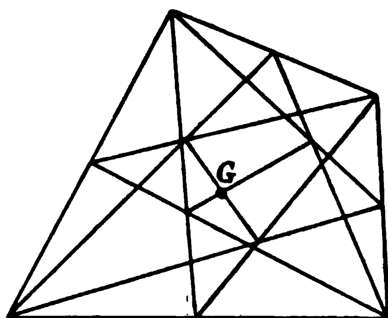
might be reduced to a common fraction by a similar method. The result is $\frac{100}{729}$. By generalizing the problems of the kind, several somewhat complicated problems were solved in the book.

144. Next I proceed to NOBUYOSHI SAITŌ. He was also born in Kōzuke province and was generally called the "Sanja" of Kōzuke, because he was well versed in mathematics. His father NOBUNAGA SAITŌ was a mathematician too. At first, NOBUYOSHI SAITŌ learned mathematics from his father and then he entered the school of WADA.

He published in 1834 *Sampō-Enrikan*, in which he solved a problem of finding the centre of gravity by using the Enri method. (The theory of roulettes that had been invented by WADA was also published in the same book). The problem was to find the centre of gravity of a spherical segment. He only gives the answer without the demonstration. According to Mr. T. ENDŌ he might have picked up this method from some Dutch book.

The problem of finding the centre of gravity of a figure, which may be solved without the Enri-method or the infinitesimal calculus, were already mentioned in the book *Sampō-Tenzan-shogakushō*, written by MASAKATA HASHIMOTO in 1830. It contains the method of finding the centre of gravity of a quadrangle. The usual solution was as follows:

Divide the quadrangle into two triangles by one diagonal, find the centres of gravity of the two triangles as the intersection of the three medians, and then draw the straight line joining the two centres of gravity. In the same way, draw the other straight line joining the centres of gravity of the two triangles, which are formed by drawing the other diagonal. Then the point of intersection G of these two straight lines is the required centre of gravity.



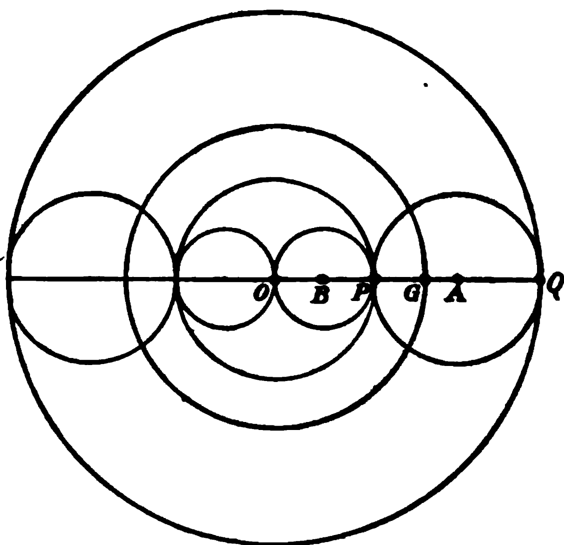
According to Mr. ENDŌ, this method is also derived from some Dutch book.

Since the year 1834 in which *Sampō-Enrikan* appeared, the problems of finding the centres of gravity were investigated vigourously by the Wasanka from 1844 to 1853, and the following two methods were chiefly employed for that purpose by them.

145. Problem. Two circles whose diameters are known are in external contact. Find the centre of gravity.

I. The first method which is said to be based upon SEKI's idea:

A and B are the centres of the two given circles, touching externally at the point P, whose diameters are denoted by a



and b respectively. Let OPQ be the common central line; and let G be the required centre of gravity. Since

circumference of the circle with radius OA

$$=\pi(a+2b),$$

volume of the anchor-ring with radii OP and OQ

$$=\pi(a+2b)\times\pi\frac{a^2}{4}.$$

Again since

circumference of the circle with radius OB

$$=\pi b,$$

volume of the anchor-ring with radii zero and OP

$$=\pi b \times \pi \frac{b^2}{4}.$$

Hence (the following expression is written without demonstration)

$$2\pi . \mathrm{OG} = \frac{\pi (a+2b) \times \pi \frac{a^2}{4} + \pi b \times \pi \frac{b^2}{4}}{\pi \frac{a^2}{4} + \pi \frac{b^2}{4}}$$

$$= \pi \frac{b (a^2 + b^2) + a^2 (a + b)}{a^2 + b^2}$$

Therefore

$$\mathrm{OG} = \frac{b}{2} + \frac{a^2 (a + b)}{2 (a^2 + b^2)}.$$

II. The *Simpō* or new method (so called by the mathematicians):

Without demonstration, they write down

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{BG}} = \frac{\pi \frac{a^2}{4} + \pi \frac{b^2}{4}}{\pi \frac{a^2}{4}},$$

whence

$$\mathrm{BG} = \frac{a^2}{a^2 + b^2} . \frac{a + b}{2}.$$

But

$$\mathrm{OG} - \frac{b}{2} = \mathrm{BG}.$$

Therefore

$$\mathrm{OG} = \frac{b}{2} + \frac{a^2 (a + b)}{2 (a^2 + b^2)},$$

the same as before.

The first method was the solution of KYŌ UCHIDA, a disciple of WADA's (see the next number), and has been extracted from a book written by his disciple KUBOTA. The second method has also been taken from a book written by his disciple KOMATSU.

146. I shall now record the deeds of KYŌ UCHIDA. He is said to have been living to about 1877 and is known by the name GOKWAN UCHIDA. He was born in Yedo, but the date of his birth is not known. He rendered service to the Tokugawa's government and was well acquainted with the Dutch language. He learned mathematics from both KUSAKA and WADA, and received the diploma of Inka-Kaiden in 1822. He had several hundred students at his school, which he named "Mathematica". This European word might have been selected as the name of his school from vanity in order to show to the public that he was well versed in the western languages.

147. UCHIDA had made a private calendar beginning with the year 1828 and taught his students the calendar-composition by using it (No. 119). The method, it is said, was rather accurate.

In 1832, he published *Kokonsankan*. Since this was a highly advanced work he became very famous and was greatly esteemed by his contemporary mathematicians.

148. It is not exactly known when mathematicians of our country got acquainted with the theory and use of logarithms. They may very likely have known them through the Dutch books, if at least these were not too difficult for them to read. But as these books were so easy, they may possibly have known the theory and use of logarithms from *Shuli-tsingwung* published in China under the reign of Emperor Suntsu of the Tsing dynasty (Emperor Suntsu reigned in China from 1662 to 1722). If this was the case, mathematicians of our country knew the use of the logarithmic table at a comparatively early stage. It was not at all however known by them how to compose the table. This was for the first time explained by KYŌ UCHIDA. The explanation was published by his disciples in the book *Taisuhyō-shōkai*, that is, the explanation of the logarithmic table. SHUKI KOIDE, a fellow-student of UCHIDA, had composed a logarithmic table too and published it in 1844, (No. 152).

149. UCHIDA's method of composing a logarithmic table was a very troublesome one. I will explain the method as follows:

At first, $\log^{-1} 0{,}1$ or $10^{\frac{1}{10}}$ is computed by actual root-extraction :

$$\log^{-1} 0{,}1 = 1{,}258\ 925\ 411\ 794\ 2\,;$$

whence by multiplication,

$$\log^{-1} 0{,}2\,,\ \log^{-1} 0{,}3\,,\ \ldots\,,\ \log^{-1} 0{,}9$$

are found.

Next, $\log^{-1} 0{,}01$ or $10^{\frac{1}{100}}$ is computed by actually extracting the tenth root of $10^{\frac{1}{10}}$:

$$\log^{-1} 0{,}01 = 1{,}023\ 292\ 992\ 280\ 8\,;$$

whence by multiplication,

$$\log^{-1} 0{,}02\,,\ \log^{-1} 0{,}03\,,\ \ldots\,,\ \log^{-1} 0{,}09$$

are found.

Next, $\log^{-1} 0{,}001$ or $10^{\frac{1}{1000}}$ is computed by actually extracting the tenth root of $10^{\frac{1}{100}}$:

$$\log^{-1} 0{,}001 = 1{,}002\ 305\ 238\ 077\ 9\,;$$

whence by multiplication,

$$\log^{-1} 0{,}002\,,\ \log^{-1} 0{,}003\,,\ \ldots\,,\ \log^{-1} 0{,}09.$$

are found. And so forth.

By arranging these results in order, UCHIDA had composed a so-called *Konsūhyō* or table of roots. The mantissa of any number is found by using this table. Next, I shall explain how the mantissa of log 2 was found by him.

We find by the *Konsūhyō*

$$\log^{-1} 0{,}3 < 2 < \log^{-1} 0{,}4\,,$$

whence the first place in the required mantissa is 3. Then we calculate actually $2 \div \log^{-1} 0{,}3$, and find in the table of roots that

$$\log^{-1} 0{,}001 < \frac{2}{\log^{-1} 0{,}3} < \log^{-1} 0{,}002\,;$$

whence the second and third places in the mantissa are 0 and 1.

Next we calculate actually $2 \div (\log^{-1} 0{,}3 \times \log^{-1} 0{,}01)$ and find in the table of roots that

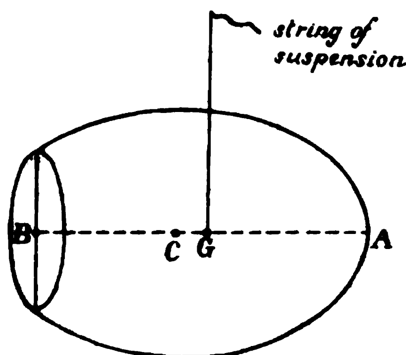
$$\log^{-1} 0{,}0000\,2 < \frac{2}{\log^{-1} 0{,}3 \times \log^{-1} 0{,}01} < \log^{-1} 0{,}00003;$$

whence the fourth and fifth places in the required mantissa are 0 and 2. Repeating this method, the following result is obtained

$$\log 2 = 0{,}301\,029\,995\,663 +$$

In the same way, the logarithms of the prime numbers 3, 5, 7, 11, ... are obtained. The logarithms of composite numbers are obtained by mere addition. Thus, the common logarithms of the numbers less than ten thousand were calculated up to the twelfth place of decimals. This must have been performed by extremely hard labour.

150. KUBOTA, a disciple of UCHIDA's, wrote the first part of *Enri-shōheijitsu* (the date of publication is unknown). In 1855, the second part of the same book was written by KUWAMOTO, his fellow-student, and revised by TAKEMURA of the same school. The first part contains the methods of finding the centre of gravity of plane figures, one of which has been mentioned before (No. 145). In the second part, the methods of finding the centre of gravity of solids are mentioned. One of them I will extract from the book here.



Problem. A spheroid is cut off by a plane parallel to one of its principal planes. Find the centre of gravity of the remaining part.

Answer. If the longest axis 2 . CA be represented by a and the sagitta AB by s, then

$$AG = \frac{s}{2}\left\{\frac{a-s}{2(a-s)+a} + 1\right\}.$$

151. YOSHISHIGE ARA, also of the school of UCHIDA,

published in 1865 a famous book on the art of surveying, called *Ryōchi-sanryaku*.

152. SHUKI KOIDE was born in 1798 and died in 1865. He first learned the mathematics of the Miyagi school and afterwards entered the school of KUSAKA and at the same time learned from WADA. He studied astronomy and calendar-composition under HARUCHIKA ABE, head of Yin and Yang (name of an imperial government official) about the year of 1826. In 1837 he made a private calendar called *Teiyu* calendar beginning with the same year, which was perfectly accurate (No. 119). He published a logarithmic table in 1844. This was the first publication of a logarithmic table in our country, though it had previously been used (No. 148).

153. YASUMOTO GOKAI was born in 1794 and died in 1862. He entered the school of KUSAKA and so learned from WADA, and at the same time he learned the advanced course of the Enri method from NAGATADA SHIRAISHI, his older school-mate (see the next number). *Sampō-senmonshō*, published in 1840, was the most famous of all his works. It contains for the greater part the problems of the Tenzan method, and in the latter part the *Hōjin-reppuhō*, that is, the method of composing magic squares. This method of composing magic squares made the book so famous. *Hōjin* or the magic squares had been continuously studied by SEKI, KURUSHIMA, MATSUNAGA, and others. But it was the first book that treats all the cases of magic squares. The formation of the magic squares of an odd order was doubtless discovered by KURUSHIMA, while the discoverer of that of an even order is not surely known. The latter square is usually classified into two kinds, namely the magic square of an even-even order and that of an odd-even order; in the former $4n$ numbers are arranged on one side of the square and in the latter $4n + 2$ numbers. The arrangement could not have been found by a mere trial: they must have known the theory to some extent. However it is doubtful whether they knew the complete general solution; I will investigate this question in future. The magic square of an odd order had completely been solved and is the same as that obtained by BACHET DE MEZIRIAC's method. An example or two of them may be given here:

I.

31	12	24	18	25	1
35	26	17	20	8	5
4	28	21	15	10	33
3	9	22	16	27	34
2	29	14	23	11	32
36	7	13	19	30	6

II.

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	34	20
21	39	8	32	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

III.

57	16	24	33	25	48	56	1
7	50	42	31	39	18	10	63
6	51	43	30	38	19	11	62
60	13	21	36	28	45	53	4
61	12	20	37	29	44	52	5
3	54	46	27	35	22	14	59
2	55	47	26	34	23	15	58
64	9	17	40	32	41	49	8

154. I shall now write about NAGATADA SHIRAISHI. He learned mathematics from both KUSAKA and WADA and was versed in the *Enri-kwatsujitsu*. He wrote a great many books, among which the two volumes of *Shamei-sampu*, published in 1826, were most famous. It was a collection of the mathematical problems which he and his pupils hung in Shintō shrines in several provinces. Some problems that can only be solved by means of the *Tetsujitsu* or equation of the third order made their first appearance in the book. He died in the same year 1872 as GOKAI, but the date of his birth is not known.

SHIGETŌ IWAI, the best pupil of SHIRAISHI, wrote *Sampō-zasso* in 1830 and *Enri-hyōshaku* in 1837, which were both famous.

155. SEITŌ BABA (? — 1860) was a great mathematician too and had a great many students at his school. His father, SEITOKU BABA (? — 1843), was also an expert.

156. Now I must write the biography of HIROSHI HASEGAWA, a student of both KUSAKA and WADA. But, beforehand, I shall record something about a few mathematicians who were not students of WADA.

157. In Osaka there was a mathematician, SHINGEN TAKEDA. He was a student of MASANAGA SAKA who was the best pupil of RYUGŌ ASADA, the founder of the Asada school (Nos. 113 and 115). TAKEDA's school was extremely flourishing and a

great many scholars assembled there. It was called the Takeda school or the Shingen school. He was wont to say that there was no reason beside the number, and no number beside the reason This remark was generally known among the public. He was also well versed in astronomy, as ASADA.

SANENORI NAITO, his student, was a mathematician from Bitchu province and was famous in the district. Besides, SEIFUKU FUKUTA (1806—1858), RIKEN FUKUTA (who became afterwards a student of SHUKI KOIDE), etc. were also famous mathematicians belonging to the Takeda school.

158. In this age, NAGAYOSHI KIKUCHI lived in the city of Sendai. He wrote in 1845 a book on the theory of integral numbers, which he named *Seisu-kigenshō*. The theory had been investigated by many scholars since SEKI's time, and so it was mentioned in several books. MATSUNAGA's *Mukihen* was a comparatively early book, which contained a noteworthy theory of integral numbers; but it was not known among the public. FUJITA's *Seiyō-sampō* (No. 100) does not contain the minute. explanation of the theory. WADA's *Kōko-seisukai* contains only the case, in which the lengths of the three sides of a right-angled triangle, or *kōkogen*, are represented by integers. KIKUCHI published at last *Seisu-kigenshō* to minutely explain the theory of numbers. It contains a problem on the triangle whose three sides and area can be represented by integers. If a, b, c and A be the three sides and the area of the triangle respectively, then the solution is

$$a = m(l^2 + n^2),$$
$$b = n(l^2 + m^2),$$
$$c = (l^2 \pm mn)(m \mp n),$$
$$A = (l^2 \pm mn)(m \mp n)\,lmn,$$

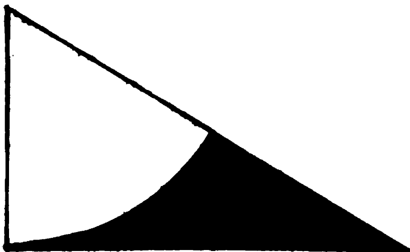
where l, m, n are arbitrary integers.

159. HIROSHI HASEGAWA will be now recorded. He was born in 1792 and died in 1832. He had at first learned mathematics from KUSAKA, but was expelled from the school on account of his bad conduct. His fellow-students broke off friendship with him, and mathematicians of the Seki school unfailingly scorned him. He was superior to the other scholars

with respect to skill in mathematics He investigated mathematics independently and devoted himself to writing books. They were all published in the names of his pupils. He was very famous as these books were widely distributed in our country, and was highly respected by non-mathematicians too. His son, HIROSHI HASEGAWA (the father and the son seem to have had the same name, but the Chinese ideographs for their names are different) learned from his father and was well versed in mathematics. Among the students of Hasegawa's school, the following were famous: GEKI SATŌ, TANEHIDE CHIBA, GIICHI AKITA, TSUNEMITSU MURATA, GAZEN YAMAMOTO, TEISHIN HIRAUCHI, etc.

160. *Tsūki-sampō* was written in 1863 by YASUNOBU MURAYAMA, a student of GEKI SATŌ's. The materials were for the greater part written by SATŌ himself. In the appendix, the *Enri-kyokusujitsu*, that is, the Enri method of limiting values was explained very minutely. It was the solution of the problems of the theory of maxima and minima. The problems of this kind were invented by WADA and mentioned for the first time in *Sampō-Enrikan* written by NOBUNAGA SAITŌ (1784—1844), his student, and his son NOBUYOSHI SAITŌ (No. 144). SATŌ learned mathematics not only from HASEGAWA, but also from SAITŌ. So that the things written in the appendix were handed down from WADA. One of the problems is given below:

Problem. Draw a circle whose centre is the vertex of one acute angle of a *Kōkogen* or rightangled triangle and whose radius is equal to one side of the acute angle. Then the black area (which is the literal translation of the word *Koku-seki*, used by the Wasanka) is formed as in the figure. The area of the right-angled triangle is given. Find the maximum of the black area.



Answer. The maximum black area = half the area of the *Kōkogen*.

161. TANEHIDE CHIBA became famous by the publication

of *Sampō-shinsho* in 1830, in which the Soroban method, the Tengen method, the Tenzan method and the Enri method are mentioned in regular order. Though these methods were briefly explained in the book they were arranged in a good natural order fitting for beginners; so the book was in vogue.

In the second part of this book, the Enri-tables are mentioned too. The *Kyokkei-jitsu* or method of limiting figures, which had been invented by HASEGAWA, is mentioned in the appendix too. (As to the *Kyokkei-jitsu*, see the author's memoir "On the Isosceles Trapezium Problem" in the *Tōkyō Sugaku-Buturigakkwai Kiji*, Vol. IX, p. 1—6). HASEGAWA was exceedingly proud of this invention.

162. GICHI AKITA published *Sampō-Kyokkei-shinan* in 1835 It treats only the method of limiting figures above-mentioned with accurate explanations, which made the book very famous.

He also published *Sampō-Chihō-taisei* in 1837. It dealt with the arithmetic for farmers and the measurement of fields, and was used very widely. KYŌ UCHIDA made his pupils criticise the book and insisted upon its being harmful for the agricultural administration. The government at last prohibited its publication, but after a little while it was again very generally read. Though it had more or less errors, it was of great profit to the public.

163. TSUNEMITSU MURATA published *Sampō-Sokuyen-shōkai* in 1831. *Sokuyen* means ellipse. An abundance of problems of the rectification, quadrature and cubature with respects to ellipses is arranged without order. This was also a famous work. He published *Sampō-Chihō-shinan* in 1835, which also dealt with the art of surveying and the engineering work that was done by provincial officers. But this never met with any severe criticisms. *Ryōchi-tebikigusa* was published by him in 1853, containing also the land-surveying.

During the interval from 1780 to 1800, the octant was imported from Europe, most likely from Holland; and soon after that the sextant was imported too. As to the use of the octant, it was made publicly known by the publication of *Octant-yōhō-ryakuzukai*, that is, the brief explanation of the use of the octant, written by MOCHICHIKA WATANABE in

1852, in which, after the elapse of seventy years since the importation of the octant, its use was described for the first time. The instrument had so long been kept in a store-house of the government and people had no knowledge of it, except a few scholars, such as KAIKŪ YAMAJI, a descendant of SHUJU YAMAJI and a calendarist of the government. As MOCHICHIKA WATANABE was a son of a gunner belonging to the government and the civilization of our country was beginning to advance at that time under the influence of external powers, this book was of great profit to the public, teaching it how to use the octant for land-surveying, especially for coast-surveying necessary for the defence of the country; it attracted a good many pupils towards his school.

The use of the sextant was taught for the first time by MURATA's *Ryōchi-tebikigusa* published in 1853. Only the applications of those two instruments were introduced in these two books, and no reference was made to the fact that it can be employed in the observation of heavenly bodies.

164. GAZEN YAMAMOTO wrote *Sampō-jojitsu* in 1841; in this work he arranged the important formulae in regular order and applied them to the demonstration of the geometrical problems.

165. TEISHIN HIRAUCHI published *Sampō-Henkei-shinan* in 1820, in which he discussed how a geometrical figure is transformed when one of the conditions which determine it is changed. His *Sampō-Chokujitsu-seikai*, published in 1840, contains purely geometrical solutions of geometrical problems, while hitherto the geometrical problems were usually solved by means of the Tenzan method, or the algebraical method, though of course there are many exceptions.

166. HIROSHI HASAGAWA was a son of HIROSHI HASAGAWA. As we remarked already the father and the son seem to have one and the same name, but the Chinese ideographs for their names are different. HASEGAWA, the son, had a good pupil, HISANOBU UCHIDA. In 1844 UCHIDA published *Sampō-Kyuseki-tsuko* which is said to have been written by his teacher HASAGAWA and in which he solved the problems of quadrature

and cubature, having skilfully applied the Enri method. The Enri tables were clearly mentioned in it.

Among the disciples of HASAGAWA was KŌHAN ONO who studied the European mathematics from a Dutchman, in 1855, following the command of the shogoon's government. From this time, the European mathematics began to spread over our country.

167. KAZUHIDE ŌMURA was a disciple of GIICHI AKITA. He studied mathematics from YASUO HOSOI with Mr. TOSHISADA ENDŌ, the author of *Dai-Nihon-sūgakushi*, or the history of Mathematics in Great Japan. He wrote the two volumes of *Sampō-Tenzan-tebikigusa* in 1841. He was highly versed in mathematics and invented many new methods and theorems. His book was the sequel to *Tenzan-tebikigusa-shohen*, written by GAZEN YAMAMOTO in 1832. The sequel intended to show the advanced course of the Tenzan method. He skilfully demonstrated the theorems relating to catenary curves. The problems of this kind began to be investigated in about 1860 and were for the first time published in *Sampō Hōyenkan* written by YOSHINOBU HAGIWARA, who was the best disciple of NOBUNAGA SAITŌ

In 1865 ŌMURA wrote *Shayen-Tekitōshiki* which seems to have contained the problems of common tangents to three or four circles, and was famous too. In 1867 he wrote a commentary of YASUNOBU MURAYAMA's *Tsūki-sampō* (No. 160), with YASUTOSHI HOSOI, a son of YASUO HOSOI. He wrote also a few other commentaries.

In the same year, he lectured to his students on *Enri-Kyokusū-shinjitsu*, that is, a new method of solving the problems relating to maxima und minima. The method is far simpler and easier to understand than that of WADA, mentioned in MURAYAMA's *Tsūki-sampō*.

168. I will now close this brief history of the Japanese mathematics, recording some facts about the recent importation of the European mathematics. How our countrymen were able to read European books, especially Dutch books, has been mentioned in the preceding numbers (Nos. 58—60 and 79). There are some books in which it is maintained that the first

arrival of a Dutch ship in our country was in the year 1597. But I shall here write what is more trustworthy.

169. The first Dutchman who came to our country was Jan Huygen van Linschoten. The date of his arrival was 1582, or 1585. The second one was Dirk Gerritsz. who stayed in our country from August 1585 till February of the next year. These two men were both from the port of Enkhuizen and on board of some Portuguese ships. When they got home, they mentioned the circumstances of our country to their fellow-countrymen. In 1595, the goverment of Holland sent out a fleet for the Far East under the direction of Houtman for the purpose of exploring our country. In 1598, four fleets were again sent out from Holland directed by Jacques Mahu. The fleets met with a perilous danger on the way to our country and the ships were separated from one another. Only "de Liefde", one of the ships, reached after much adversity Bungo province of Kyūshu Island in April 1600. Then the shogoon Iyeyasu Tokugawa invited the ship to the port of Sakai (a city near Osaka) and then to Yedo. Among the men on board were William Adams, Jean Yansten, etc. They met with Iyeyasu's kind treatment and became counsellors of the shogoon's government, staying in our country. William Adams, an Englishman, was the navigator of the ship and skilful in the art of navigation, ship-building, gunnery, and mathematics. He taught these arts and sciences with kind intention only. Jacob Quackernaeck, the captain of de Liefde, and Melchior Sandvoort got leave to go back to their own country. When they got home, the circumstances of our country were more minutely described. Then the Dutch government sent two ships, "de Roode Leeuw" and "de Griffoen", in December 1607. They both arrived in safety at the port of Hirado of Hizen province in Kyūshu Island, July 1609. The men on board went to Iyeyasu Tokugawa in Sunpu (this city is now called Shidzuoka and is situated in Suruga province of Tōkaidō) where was his residence, and got from him the Goshuinjō, or the document stamped with the vermillion seal of the shogoon giving permission to the commercial intercourse of the two countries. The European mathematics seems to have been imported at about this time.

It is recorded that a Dutch book on mathematics was imported and got by a doctor, RYŌTAKU MAYENO, for the first time in 1772.

170. Of all the things that our countrymen learned from Hollanders, the art of medicine was the most attractive and striking. So the doctors were the first to learn the Dutch language, except interpreters.

171. As was mentioned in No. 79, the shogoon Yoshimune Tokugawa was so fond of astronomy that he invited Joken Nishikawa from the mart of trade, Nagasaki, and gave him a calendar to compose. At that time, there were Zenzaburo Nishi and Kōzaemon Yoshio, who were both interpreters in Nagasaki. They intended to study sciences and arts from Dutch books and obtained a Dutch dictionary from one of the men on board of a Dutch ship. Having heard of this dictionary, the shogoon Yoshimune Tokugawa wished to get it, but Nishi presented the shogoon with a book on astronomy written in Dutch. The minute description of particulars in the book excited the shogoon's admiration and he made a scholar, BUNZŌ AOKI, go to Nagasaki to study the Dutch language there, since only through Nagasaki European civilization could enter into Japan.

It was in 1744.

172. In 1745, the study of Dutch books was publicly admitted, while it had been forbidden under a severe penalty hitherto.

173. When AOKI got back to Yedo, a man came to his school and asked with great eagerness to learn Dutch from him. The man was indeed the before-mentioned RYŌTAKU MAYENO (No 169) born in Yedo 1723, a son of a doctor belonging to the feudal lord of Nakatsu of Buzen Province. AOKI was moved by MAYENO's earnestness, so he taught him the Dutch language. Having entirely left his profession of medical art, MAYENO became exclusively a Dutch scholar; and at last in 1772 he happened to get a book on arithmetic, the title of which is not known. He died in 1803.

174. In 1797, RYUHO NAKANO published *Rekishō shinsho*, a book on calendar-making (No. 116). He was versed in Dutch and an interpreter of the shogoon's government.

175. RYUGŌ ASADA (No. 115) was very learned in the Dutch language too and read many books written in it. His best pupil, SHIGETOKI TAKAHASHI (No. 115), who became the teacher of the great surveyor, CHUKEI INŌ (No. 122), was no less skilful in Dutch than ASADA. From this time, many mathematicians began to read Dutch books. KAGEYASU TAKAHASHI a son of SHIGETOKI TAKAHASHI, engaged in composing a calendar, succeeded his father's business. He was put in prison in 1828, because he was guilty of having exchanged a map of our country for that of Holland with Dr. Siebold, a Dutchman (or a German) very well known by us. He died in prison in 1830.

176. It seems that almost all mathematicians who lived towards the beginning of the nineteenth century were able to read mathematical books written in Dutch. KYŌ UCHIDA, a student of WADA, had so much interest in the language that he named his school "Mathematica", using the pronunciation of the word just as it is (No. 146).

177. In 1837, KAIKŌ YAMAJI, a descendant of SHUJU YAMAJI, obtained two books written by a Dutch scholar (Bcima?) on astronomy and he wrote a book entitled *Seireki-shinhen*, or new book on European calendars.

MASAKADO MORI published *Katsuyen-hyō* or tables of dividing a circle, that is the trigonometrical table, which he was able to study from a Dutch book.

178. In 1855, KŌHAN ONO, a pupil of HIROSHI HASEGAWA, learned mathematics from a Dutchman, having been commanded by the government. From this, European mathematics began to be studied widely step by step (No. 166).

179. The *Honyaku-kyoku* or the translation bureau which was established in the astronomical observatory in 1811 (No. 119), was changed by name into *Bansho-torishirabedokoro* in 1857, where the translation of European books was vigorously performed.

In the year 1857, AKIRA YANAGAWA published *Yōzan-yōhō*, by which *Yōsan* or European mathematics became somewhat widely known. The name *Yōzan* or *Yōsan* is used together with the name Wazan or Wasan, meaning the Japanese mathematics.

In the year 1856, KENKICHI HANAI wrote *Seizan-sokuchi*. *Seizan* or *Seisan* means the western mathematics or the mathematics of Western countries, while *sokuchi* means "to get a knowledge promptly."

180. The government established a new institution, *Yōsho-shirabedokoro*, which was the reformation of the *Bansho-torishirabedokoro* mentioned in the preceding article, in the year 1862.

In the next year, it was changed again into the *Kaiseijo*. There was the department of mathematics in that institution, and Baron KOHAI KANDA became the professor and encouraged the investigation of the mathematics of Western countries. Nevertheless, there were few students studying it there.

The goverment engaged Gratama, a Dutchman, as a professor of physics and chemistry of the *Kaiseijo* in 1865. It was principally upon the progress of the European mathematics in Japan. (Dr. Bauduin began to teach European medical science in the governmental hospital in Nagasaki in the year 1859).

181. Our country was in a great confusion towards the year 1868, when the Reformation took place; and the shogoon's government lost its authority and the imperial government was restored again. Many battles were fought in succession between the feudal lords and their subjects, who endeavoured to restore the imperial goverment, and the other feudal lords and their subjects, who wished to continue the shogoon's government.

There were a great many books of Wasan kept by the YAMAJI's and the SHIBUKAWA's who had exclusively managed the compilement of calendars from generation to generation. All the books were put on board of the "*Kaiyō-gō*", a warship of the shogoon's government, and were borne off to the north-eastern part of our country, for fear they might be burnt by a fire caused by the war. On the way the man-of-war was shipwrecked and the books were all lost.

Many books on Wasan, which were kept by KYŌ UCHIDA, were also carried from Tōkyō to Shimoosa province, because he thought the books were in danger. Unfortunately, the house where he put the books was burnt down by a fire which broke out accidentally, and the books were all reduced to ashes.

Now almost all the valuable books written on Wasan were lost by these events and could not be found in our country. So the mathematics peculiar to our country had entirely decayed and could not become flourishing again.

182. The *Kaisei-kō* was established in September 1868 and Baron KŌHEI KANDA and SHUNZŌ YANAGAWA became the presidents of the school. In the next year, several Englishmen and Frenchmen were engaged as professors of the institution, where they taught the European mathematics. Few mathematicians could be found who paid attention to Wasan anymore.

The *Kaisei-kō* was afterwards named the *Daigaku Nankō* which was combined with other institutions to the Tōkyō Imperial University now-existing.

It was officially determined in 1872 that only the European mathematics or *Yōzan* were to be taught in the elementary schools, the middle schools, the university and so forth. So Wasan was never studied again.

THE END.

ERRATA

TO

A BRIEF HISTORY OF THE JAPANESE MATHEMATICS

BY

T. HAYASHI.

Vol. VI.

p. 298,	l. 12	for	succeding	read	succeeding
» »	» 34	»	Christian	»	individual
» »	» 35	»	»	»	»
» 300,	» 15	»	Instead	»	Instead *)
		and add the foot-note: *) For the ten numbers from one to ten we employ at present both two sets, namely hitotsu, futatsi, etc. and ichi, ni, etc.			
» 301,	» 2	for	kau	read	kan
» »	» 3	»	sai (10^{44}).	»	sai (10^{44}), kyoku (10^{45}).
» »	» 16	»	*ama-no-mihakari*	»	*Ama-no-Mihakari*
» »	» 18	»	*Santen-Reki*	»	*Santen-Reki* *)
		and add the foot-note: *) *Santen* means three intervals: day, month and year; *reki* means calendar. This calendar seems to have been a luni-solar one.			
» 302,	» 4	for	WANG-JÊN	read	WANG-JÊN
» 303,	» 14	»	KWAN-RŌ	»	KWAN-RŌ
» »	» 35	»	*hitsuzi*	»	*hitsuji*
» 304,	» 34	add: The same designation is used for days also.			
» 305,	» 17	for	*Yuen-Kia*	read	*Yuen-kia*
» 311,	» 1	»	Monbŭ	»	Monbu
» 313,	» 34	»	then	»	than
» 315,	» 3	For the squares thin lines are used. In the third the sign 𝍰 must replace $\underline{\text{|||}}$			
» 316,	» 9	for	$\underline{\text{|||}}$	read	𝍰
» 323,	» 4	»	|||	»	$\not{\text{|||}}$
» 324,	» 1	»	horse	»	sheep
» »	» 2	»	sheep	»	horse
» »	» 3	»	z	»	x
» »	» 5	»	x	»	z
» 331,	» 2	»	a	»	as

p. 333,	l. 23	for	Chu-Shieh-Chieh	read	Chu-Shieh-chieh
» 334,	» 32	»	rows	»	rods
» 339,	» 5	»	mr.	»	Mr.
» »	» 32	»	Chu-Shieh-Chieh	»	Chu-Shieh-chieh
» 341,	» 9	»	side by side	»	by the side
» 345,	» 24	»	wich	»	which
» 346,	» 21	»	If	»	It
» 347,	» 10	»	are	»	were
» »	» 21	»	Takahazu	»	Takakazu
» 349,	» 30	»	Ota	»	Ōta
» 351,	» 23	»	op	»	of
» 352,	» 19	»	Kataynki	»	Katayuki
» »	» 31	»	*Yendangenkai*	»	*Endangenkai*
» 354,	» 34	»	Ise shrine	»	the Ise shrine
» 355,	» 8	»	insistu pon	»	insist upon
» 359,	» 3	»	1766	»	in 1766

Vol. VII.

p. 105,	l. 24	for	that a	read	a
» »	» 29	»	will	»	shall
» 106,	» 19	»	*Sugaku*	»	*Sūgaku*
» »	» 28	»	is used to call	»	generally calls
» 107,	» 3	»	*Sugaku*	»	*Sūgaku*
» »	» 8	»	in finding	»	to find
» »	» 34	»	Whe	»	We
» 110,	» 5	»	$\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}+\frac{s^3}{d^3}$	»	$\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\frac{s^3}{d^3}$
» »	» 14	»	$\frac{8a^7}{112a^5}$	»	$\frac{8a^7}{112d^5}$
» »	» 16	»	$\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}$	»	$\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{9}$
» »	» 23	»	nr.	»	No.
» 111,	» 5	»	»	»	»
» »	» 16	»	„*Meyin*"	»	"*Meyin*"
» »	» 20	»	Whe	»	We
» »	» 28	»	not one	»	no one
» »	» 30	»	*Fukyu*	»	*Fukyū*
» »	» 36	»	bij	»	by
» 112,	» 29	»	faremore	»	farmore

D 6 e

OVER REEKSEN VAN BESSELSCHE FUNCTIES EN DAARMEDE SAMENHANGENDE BEPAALDE INTEGRALEN, WAARIN BESSELSCHE FUNCTIES VOORKOMEN,

DOOR

J. G. RUTGERS.
(Alkmaar).

---

1. NIELSEN geeft de volgende uitdrukking: [1])

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n I_{\nu+n+1}(x) = \frac{x}{2} \cdot \int_0^1 I_\nu(x\sqrt{c}) f(x-cx) c^{\frac{\nu}{2}} dc, \quad . \quad . \quad (1)$$

waaraan hij ten onrechte toevoegt de voorwaarde: $R(\nu) > -2$; dit moet zijn: $R(\nu) > -1$, d. w. z. reëele gedeelte van $\nu > -1$.

De volgende onderstelling heeft hij daarbij gemaakt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Tot dat resultaat wordt hij gevoerd door uit te gaan van de bekende formule:

$$I_{\nu+\rho+1}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\rho+1}}{\Gamma(\rho+1)} \int_0^1 I_\nu(x\sqrt{c})(1-c)^\rho c^{\frac{\nu}{2}} dc, \begin{pmatrix} R(\nu) > -1 \\ R(\rho) > -1 \end{pmatrix} . \quad (3)$$

hierin te nemen: $\rho = n$ $(= 0, 1, 2, \ldots)$ en, na vermenigvuldiging met a_n, beide leden te sommeeren over n van 0 tot ∞.

2. Daar ons nu de som van verschillende reeksen van Besselsche functies bekend is, zou (1) ons in staat kunnen stellen eenvoudige waarden voor bepaalde integralen te vinden, waarin

---

[1]) Handbuch der Theorie der Cylinder-functionen p. 262; 1904.

Besselsche functies voorkomen, mits ook gelijktijdig een eenvoudige uitdrukking voor $f(x)$ in (2) mogelijk wordt.

Bij het opstellen zijner formule heeft NIELSEN blijkbaar niet daaraan gedacht. De voorwaarde echter, waaraan ν bij (1) moet voldoen, beperkt de toepassingen zeer, waarom ik mij voorstel allereerst voor het eerste lid van (1) eene andere uitdrukking af te leiden, waarbij ν *aan geen enkele voorwaarde gebonden* is, terwijl (1) er als bijzonder geval uit is te verkrijgen.

Om tot die nieuwe formule te geraken gaan wij eveneens uit van (3), maar voegen er de volgende formule aan toe:

$$I_{\rho-a+1}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\rho+1}}{\Gamma(\rho+1)} \int_0^1 I_{-a}(x\sqrt{c})\,(1-c)^{\rho}\, c^{-\frac{a}{2}}\, dc +$$

$$+ \sum_{m=0}^{a-1} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\rho-a+1}}{m!\,\Gamma(m+\rho-a+2)}, \quad \left(\begin{array}{c} a = \text{pos.} \\ \text{geheel}, \\ R(\rho) > -1 \end{array}\right) . \ . \quad (4)$$

Slechts in vorm verschillen (3) en (4) van de formules, die in een vorige verhandeling door mij op eenvoudige wijze zijn afgeleid [1]).

Vervangen we nu in (4) a door $-\nu$, dan kunnen we (3) en (4) combineeren tot deze enkele formule:

$$I_{\nu+\rho+1}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\rho+1}}{\Gamma(\rho+1)} \int_0^1 I_{\nu}(x\sqrt{c})\,(1-c)^{\rho}\, c^{\frac{\nu}{2}}\, dc +$$

$$+ \sum_{m=0}^{-\nu-1} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\rho+\nu+1}}{m!\,\Gamma(m+\rho+\nu+2)}, \quad (R(\rho) > -1) . \quad (5)$$

waarin de laatste som geen beteekenis heeft en dan ook weg moet blijven, wanneer $R(\nu) > -1$; voldoet ν hieraan niet, dan moet $\nu =$ negatief geheel, in welk geval bedoelde som wel optreedt.

---

[1]) Nieuw Archief (2) VI, p. 368—370; 1905.

Door σ te schrijven in de plaats van ν en daarna te stellen: $\rho = \nu - \sigma + n$ gaat (5) over in:

$$I_{\nu+n+1}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\sigma+n+1}}{\Gamma(\nu-\sigma+n+1)} \int_0^1 I_\sigma(x\sqrt{c})(1-c)^{\nu-\sigma+n} c^{\frac{\sigma}{2}} dc +$$

$$+ \sum_{m=0}^{-\sigma-1} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu+n+1}}{m!\,\Gamma(m+\nu+n+2)}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

hierin nu is ν *willekeurig* aan te nemen, $n = 0, 1, 2, \ldots$ ondersteld, terwijl door σ aan één der volgende voorwaarden moet worden voldaan: 1e: $-1 < R(\sigma) < R(\nu + n + 1)$, in welk geval de laatste som wegblijft, 2e: $\sigma =$ negatief geheel $< R(\nu + n + 1)$.

Vermenigvuldigen we thans beide leden van (6) met a_n en sommeeren we daarna over n van 0 tot ∞, dan komt er:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n I_{\nu+n+1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\sigma+1} \int_0^1 I_\sigma(x\sqrt{c}) f(x-cx)(1-c)^{\nu-\sigma} c^{\frac{\sigma}{2}} dc +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{m=0}^{-\sigma-1} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu+n+1}}{m!\,\Gamma(m+\nu+n+2)}, \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

zoo we de volgende onderstelling maken:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(\nu-\sigma+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^n . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Met behulp van deze uitdrukking kunnen we echter aan de som in het rechterlid van (7) een andere gedaante geven, we kunnen er dan n.l. het volgende voor schrijven:

$$\sum_{m=0}^{-\sigma-1} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^m}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\Gamma(m+\nu+n+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+\nu+n+1} =$$

$$= \frac{1}{2^{\nu+1}} \sum_{m=0}^{-\sigma-1} \frac{(-1)^m x^m}{2^{2m}\, m!} \frac{d^{-\sigma-m-1}}{dx^{-\sigma-m-1}} x^{\nu-\sigma} f(x),$$

zoodat we ten slotte komen tot het volgende resultaat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathrm{I}_{\nu+n+1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\sigma+1} \int_0^1 \mathrm{I}_\sigma(x\sqrt{c}) f(x-cx)(1-c)^{\nu-\sigma} c^{\frac{\sigma}{2}} dc +$$

$$+ \frac{1}{2^{\nu+1}} \sum_{m=0}^{-\sigma-1} \frac{(-1)^m x^m}{2^{2m}\, m!} \frac{d^{-\sigma-m-1}}{dx^{-\sigma-m-1}} x^{\nu-\sigma} f(x), \dots \text{(I)}$$

waarbij gebruik gemaakt is van (8), voorts ν *geheel willekeurig* is, en σ voldoen moet aan één der voorwaarden:

1°: $-1 < \mathrm{R}(\sigma) < \mathrm{R}(\nu+1)$, in welk geval de laatste som weg blijft,

2°: $\sigma =$ negatief geheel $< \mathrm{R}(\nu+1)$.

Stellen we nu in (I): $\sigma = \nu$ en verbinden we hieraan de voorwaarde: $\mathrm{R}(\nu) > -1$, dan komt de uitdrukking (1) van NIELSEN voor den dag, terwijl (8) overgaat in (2).

3. Zooals reeds opgemerkt is, kunnen de verschillende ontwikkelingen van functies naar Besselsche functies, die ons bekend zijn, nu dienen om met behulp van (I) waarden te vinden voor bepaalde integralen, waarin Besselsche functies voorkomen.

Tot eenige voorbeelden willen we ons bepalen en stellen daartoe:

1°: $a_{2n} = 2(-1)^n$ en $a_{2n+1} = 0$, waardoor het eerste lid van (I) voor $\nu = 0$ wordt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(-1)^n \mathrm{I}_{2n+1}(x) = \sin x,$$

en kiezen we nu: $\sigma = -1$ en $\sigma = 0$, dan krijgen we volgens (8) respectievelijk:

$$f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \frac{4}{x} \sin\frac{x}{2},$$

$$\text{en } f(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 2\cos\frac{x}{2},$$

zoodat na substitutie dezer waarden in (I) ontstaan:

$$\int_0 \mathrm{I}_1 (x\sqrt{c}) \sin\left(\frac{x-cx}{2}\right)\frac{dc}{\sqrt{c}} = \frac{2}{x}\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\sin x \ldots (9)$$

$$\int_0^1 \mathrm{I}_0 (x\sqrt{c}) \cos\left(\frac{x-cx}{2}\right) dc = \frac{1}{x}\sin x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10).$$

2°: $a_{2n} = (-1)^n \varepsilon_{2n}$ en $a_{2n+1} = 0$; hierbij wordt ondersteld: $\varepsilon_{2n} = 2$, zoo $n \neq 0$, en $\varepsilon_0 = 1$. Voor het eerste lid van (I) vinden we nu, wanneer $\nu = -1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_{2n} \mathrm{I}_{2n}(x) = \cos x\,,$$

terwijl volgens (8), zoo we ons bepalen tot $\sigma = -1$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon_{2n}}{(2n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} - 1 = 2\cos\frac{x}{2} - 1.$$

Voor $\nu = 1$ daarentegen krijgen we:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varepsilon_{2n} \mathrm{I}_{2n+1}(x) = \mathrm{I}_0(x) - \mathrm{I}_2(x) - \cos x,$$

en wanneer dan $\sigma = 0$ genomen wordt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \varepsilon_{2n}}{(2n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \frac{4}{x}\sin\frac{x}{2} - 1.$$

Substitueeren we deze verschillende waarden in (I), dan volgen na eenige herleiding de integralen:

$$\int_0^1 \mathrm{I}_1 (x\sqrt{c}) \cos\left(\frac{x-cx}{2}\right)\frac{dc}{\sqrt{c}} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{I}_1 (x\sqrt{c})\frac{dc}{\sqrt{c}} +$$

$$+ \frac{2}{x}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\cos x - \frac{1}{x},$$

$$\int_0 \mathrm{I}_0 (x\sqrt{c}) \sin\left(\frac{x-cx}{2}\right) dc = \frac{x}{4}\int_0^1 \mathrm{I}_0 (x\sqrt{c})(1-c)\,dc +$$

$$+ \frac{1}{x}\mathrm{I}_0(x) - \frac{1}{x}\mathrm{I}_2(x) - \frac{1}{x}\cos x.$$

De waarden van de bepaalde integralen, voorkomende in de rechterleden volgen gemakkelijk uit (I) door achtereenvolgens te substitueeren:

$$\nu = -1,\ \sigma = -1,\ a_0 = 1,\ a_n = 0 \text{ voor } n > 0,$$
$$\nu = 1,\quad \sigma = 0,\quad a_0 = 1,\ a_n = 0 \text{ voor } n > 0;$$

na eenige herleiding vindt men:

$$\int_0^1 I_1(x\sqrt{c})\frac{dc}{\sqrt{c}} = \frac{2}{x}\{1 - I_0(x)\},$$

$$\int_0^1 I_0(x\sqrt{c})(1-c)\,dc = \frac{4}{x^2} I_2(x),$$

zoodat de voorgaande betrekkingen overgaan in:

$$\int_0^1 I_1(x\sqrt{c})\cos\left(\frac{x-cx}{2}\right)\frac{dc}{\sqrt{c}} = \frac{2}{x}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{x}\cos x - \frac{1}{x} I_0(x). \quad (11)$$

$$\int_0^1 I_0(x\sqrt{c})\sin\left(\frac{x-cx}{2}\right)dc = \frac{1}{x} I_0(x) - \frac{1}{x}\cos x \quad \ldots\ldots (12).$$

Uit (9) en (11) laten zich nog herleiden:

$$\int_0^1 I_1(x\sqrt{c})\sin\frac{cx}{2}\cdot\frac{dc}{\sqrt{c}} = \frac{1}{x}\sin\frac{x}{2}\{1 + \cos x - I_0(x)\} \ldots (13)$$

$$\int_0^1 I_1(x\sqrt{c})\cos\frac{cx}{2}\cdot\frac{dc}{\sqrt{c}} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{x}{2}\{1 - \cos x + I_0(x)\} \quad (14)$$

evenzoo uit (10) en (12):

$$\int_0^1 I_0(x\sqrt{c})\sin\frac{cx}{2}\cdot dc = \frac{1}{x}\cos\frac{x}{2}\{1 - I_0(x)\} \quad \ldots (15)$$

$$\int_0^1 I_0(x\sqrt{c})\cos\frac{cx}{2}\cdot dc = \frac{1}{x}\sin\frac{x}{2}\{1 + I_0(x)\} \quad \ldots (16).$$

3°. $a_{2n} = (-1)^n(\nu + 2n + 1)$ en $a_{2n+1} = 0$. Hierdoor gaat het eerste lid van (I) over in:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n(\nu + 2n + 1)\, I_{\nu+2n+1}(x) = \frac{x}{2}\cdot I_\nu(x)\ ^{1)},$$

---

1) NIELSEN p. 270, (8).

terwijl volgens (8):

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\nu+2n+1)}{\Gamma(\nu-\nu+2n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}.$$

Nemen we nu: $\sigma=-1$ en bepalen we ons verder tot de gevallen: $\nu=0$ en $\nu=1$, dan vindt men respectievelijk:

$$f(x)=\cos\frac{x}{2} \text{ en } f(x)=\frac{2}{x}\sin\frac{x}{2},$$

zoodat we na substitutie dezer waarden in (I) achtereenvolgens vinden de integralen:

$$\int_0^1 I_1(x\sqrt{c})\cos\left(\frac{x-cx}{2}\right)\frac{(1-c)dc}{\sqrt{c}}=\frac{2}{x}\cos\frac{x}{2}-\frac{2}{x}I_0(x)\ldots(17)$$

$$\int_0^1 I_1(x\sqrt{c})\sin\left(\frac{x-cx}{2}\right)\frac{(1-c)dc}{\sqrt{c}}=\frac{2}{x}\sin\frac{x}{2}-\frac{2}{x}I_1(x).(18)$$

waaruit zich nog laten herleiden:

$$\int_0^1 I_1(x\sqrt{c})\sin\frac{cx}{2}.\frac{(1-c)dc}{\sqrt{c}}=\frac{2}{x}\cos\frac{x}{2}I_1(x)-\frac{2}{x}\sin\frac{x}{2}I_0(x).(19)$$

$$\int_0^1 I_1(x\sqrt{c})\cos\frac{cx}{2}.\frac{(1-c)dc}{\sqrt{c}}=\frac{2}{x}-\frac{2}{x}\sin\frac{x}{2}I_1(x)-\frac{2}{x}\cos\frac{x}{2}I_0(x).(20)$$

De integralen van (9) en (18), (11) en (17), (13) en (19), (14) en (20) leveren nu respectievelijk weer op de volgende betrekkingen:

$$\int_0^1 I_1(x\sqrt{c})\sin\left(\frac{x-cx}{2}\right).\sqrt{c}\,dc=\frac{2}{x}I_1(x)-\frac{1}{x}\sin x.\;\ldots(21)$$

$$\int_0^1 I_1(x\sqrt{c})\cos\left(\frac{x-cx}{2}\right).\sqrt{c}\,dc=\frac{1}{x}I_0(x)-\frac{1}{x}\cos x\;\ldots(22)$$

$$\int_0^1 I_1(x\sqrt{c})\sin\frac{cx}{2}.\sqrt{c}\,dc=\frac{1}{x}\sin\frac{x}{2}I_0(x)+$$

$$+\frac{1}{x}\cos\frac{x}{2}\{\sin x-2I_1(x)\}.(23)$$

$$\int_0^1 I_1(x\sqrt{c}) \cos\frac{cx}{2} . \sqrt{c}\, dc = \frac{1}{x} \cos\frac{x}{2} I_0(x) -$$

$$- \frac{1}{x} \sin\frac{x}{2} \{\sin x - 2 I_1(x)\} \quad . \; . \; (24)$$

4°: $a_{2n} = 1$ en $a_{2n+1} = 0$, waardoor het eerste lid van (I) voor $\nu = -1$ overgaat in:

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_{2n}(x) = \tfrac{1}{2} \{1 - I_0(x)\},$$

terwijl volgens (8), zoo we ons bepalen tot $\sigma = -2$ en $\sigma = -1$ resp.:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{\Gamma(2n+2)} = \frac{2}{ix} \sin\frac{ix}{2} \text{ en } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{\Gamma(2n+1)} = \cos\frac{ix}{2}.$$

Substitueeren we deze verschillende waarden in (I), dan krijgen we, zoo we nog stellen: $x = iy$, de volgende integralen:

$$\int_0^1 I_2(iy\sqrt{c}) \sin\left(\frac{y - cy}{2}\right) . \frac{dc}{c} = \frac{1}{y} \left\{\cos\frac{y}{2} + I_0(iy) - 1\right\} - \sin\frac{y}{2} . \, (25).$$

$$\int_0^1 I_1(iy\sqrt{c}) \cos\left(\frac{y - cy}{2}\right) . \frac{dc}{\sqrt{c}} = \frac{1}{iy} \left\{2\cos\frac{y}{2} + I_0(iy) - 1\right\} \; . \; . \; . \; (26).$$

5°: $a_{2n} = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}$ en $a_{2n+1} = 0$; het eerste lid van (I) wordt dan:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} I_{\nu+2n+1}(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{4}}\, I_{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right) I_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{x}{2}\right) \text{[1]},$$

terwijl volgens (8) voor $\sigma = \nu$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n}}{\Gamma(2n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{n!\,\Gamma(2n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{2^{2n}\, n!\, n!} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} I_0\left(\frac{ix}{2}\right).$$

---

[1]) Nielsen, p. 270, (4).

Wanneer we nu deze waarden in (I) substitueeren, krijgen we:

$$\int_0^1 I_\nu(x\sqrt{c})\, I_0\left(i\,\frac{x-cx}{2}\right) c^{\frac{\nu}{2}}\, dc = \frac{\pi}{\sqrt{x}}\, I_{\frac{\nu+1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right) I_{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{x}{2}\right) -$$

$$-\frac{1}{2^\nu x}\sum_{m=0}^{-\nu-1}\frac{(-1)^m x^m}{2^{2m}\, m!}\,\frac{d^{-\nu-m-1}}{dx^{-\nu-m-1}}\, I_0\left(i\,\frac{x}{2}\right) \;\ldots\ldots\; (27).$$

Hierin moet $R(\nu) > -1$, of $\nu =$ negatief geheel, in welk laatste geval alleen de som in het rechterlid optreedt.

Door verschillende waarden aan ν toe te kennen kan men uit (27) verschillende integralen afleiden. Voor de navolgende waarden: $\nu = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1, 0$ en -1 vindt men met behulp der betrekkingen:

$$I_{-\frac{1}{2}}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}}\cos y,\quad I_{\frac{1}{2}}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}}\sin y,\ \text{en}\ I_{\frac{3}{2}}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}}\left(\frac{\sin y}{y} - \cos y\right)$$

na eenige herleiding achtereenvolgens:

$$\int_0^1 I_0\left(i\,\frac{x-cx}{2}\right)\cos x\sqrt{c}\,.\,\frac{dc}{\sqrt{c}} = \pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{2}\right) I_{-\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{2}\right) \;\ldots\; (28)$$

$$\int_0^1 I_0\left(i\,\frac{x-cx}{2}\right)\sin x\sqrt{c}\,.\,dc = \pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, I_{\frac{3}{4}}\left(\frac{x}{2}\right) I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{2}\right) \;\ldots\; (29)$$

$$\int_0^1 I_0\left(i\,\frac{x-cx}{2}\right)\cos x\sqrt{c}\cdot\sqrt{c}\,dc = \pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, I_{\frac{3}{4}}\left(\frac{x}{2}\right)\left\{\frac{1}{x}\, I_{\frac{1}{4}}\left(\frac{x}{2}\right) - I_{\frac{5}{4}}\left(\frac{x}{2}\right)\right\} (30)$$

$$\int_0^1 I_0\left(i\,\frac{x-cx}{2}\right) I_1(x\sqrt{c})\sqrt{c}\,dc = \frac{2\sqrt{\pi}}{x}\sin\frac{x}{2}\, I_1\left(\frac{x}{2}\right) \;\ldots\; (31)$$

$$\int_0^1 I_0\left(i\,\frac{x-cx}{2}\right) I_0(x\sqrt{c})\,dc = \frac{2\sqrt{\pi}}{x}\sin\frac{x}{2}\, I_0\left(\frac{x}{2}\right) \;\ldots\ldots\; (32)$$

$$\int_0^1 I_0\left(i\,\frac{x-cx}{2}\right) I_1(x\sqrt{c})\,\frac{dc}{\sqrt{c}} = \frac{2}{x}\, I_0\left(i\,\frac{x}{2}\right) - \frac{2\sqrt{\pi}}{x}\cos\frac{x}{2}\, I_0\left(\frac{x}{2}\right) \;\ldots\; (33).$$

4. Deze toepassingen van formule (I) zullen we niet met

andere vermeerderen; in de plaats van (I) zullen we nu eene andere stellen, die zich bezighoudt met reeksen van den vorm:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{x}{2}\right)^n I_{\nu+n+1}(x),$$

waarvan er ons ook eenige bekend zijn.

We vermenigvuldigen daartoe beide leden van vergelijking (6) met $b_n\left(\frac{x}{2}\right)^n$ en krijgen dan na sommatie over n van 0 tot ∞:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{x}{2}\right)^n I_{\nu+n+1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\sigma+1} \int_0^1 I_\sigma(x\sqrt{c})\, f(x\sqrt{1-c})\,(1-c)^{\nu-\sigma}\, c^{\frac{\sigma}{2}}\, dc +$$

$$+ \sum_{n=0} b_n \sum_{m=0}^{-\sigma-1} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2n+\nu+1}}{m!\,\Gamma(m+n+\nu+2)} \; \ldots\ldots \; (34)$$

in de onderstelling, dat:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\Gamma(\nu-\sigma+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \ldots\ldots (35).$$

Stellen we in de integraal van (34) voorts $c = \cos^2\phi$, dan krijgen we het volgende resultaat:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{x}{2}\right)^n I_{\nu+n+1}(x) =$$

$$= \frac{x^{\nu-\sigma+1}}{2^{\nu-\sigma}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\sigma(x\cos\phi)\, f(x\sin\phi)\, \sin^{2\nu-2\sigma+1}\phi\, \cos^{\sigma+1}\phi\, d\phi +$$

$$+ \sum_{m=0}^{-\sigma-1} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu+1}}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\Gamma(m+n+\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \ldots (II),$$

waarin, evenals bij (I), weer ν *geheel willekeurig* is, terwijl door σ aan één der volgende voorwaarden moet worden voldaan:

1°. $-1 < R(\sigma) < R(\nu+1)$, in welk geval de laatste som wegblijft,

2°. $\sigma =$ negatief geheel $< R(\nu+1)$.

5. Ook van deze formule kan men soortgelijke toepassingen

geven als van (I), hetgeen we door een paar voorbeelden zullen aantoonen. Stellen we daartoe

1°: $b^n = \frac{1}{n!}$; het eerste lid van (II) gaat dan over in:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right) I_{\nu+n+1}(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+2)}\ [1],$$

terwijl volgens (35):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(\nu-\sigma+n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{ix}\right)^{\nu-\sigma} I_{\nu-\sigma}(ix);$$

de som in het rechterlid van (II) wordt:

$$\sum_{m=0}^{-\sigma-1} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\nu+1}}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(m+n+\nu+2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n} =$$

$$= \frac{1}{i^{\nu+1}} \sum_{m=0}^{-\sigma-1} \frac{1}{m!}\left(\frac{ix}{2}\right)^m I_{m+\nu+1}(ix).$$

Deze waarden gesubstitueerd in (II) en gesteld: $\nu = \sigma + \rho$, geeft na eenige herleiding:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\sigma(x\cos\phi) I_\rho(ix\sin\phi)\cos^{\sigma+1}\phi\,\sin^{\rho+1}\phi\, d\phi = \frac{i^\rho x^{\sigma+\rho}}{2^{\sigma+\rho+1}\,\Gamma(\sigma+\rho+2)} -$$

$$- \frac{1}{i^{\sigma+1} x} \sum_{m=0}^{-\sigma-1} \frac{1}{m!}\left(\frac{ix}{2}\right)^m I_{m+\sigma+\rho+1}(ix) \quad . \quad . \quad . \ (36).$$

Hierin moet $R(\rho) > -1$ en σ voldoen aan één der voorwaarden:

1°: $R(\sigma) > -1$, in welk geval de laatste som wegblijft,

2°: σ = negatief geheel.

Ingeval $R(\sigma) > -1$ is (36) gemakkelijk te herleiden uit Nielsen, p. 181, (7). Wij kunnen echter in (34) ook

[1]) Nielsen, p. 97, (6).

negatieve geheele waarden aan σ toekennen; zoo volgt b.v. voor $\sigma = -1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\rho(ix\sin\phi)\, I_1(x\cos\phi)\sin^{\rho+1}\phi d\phi =$$

$$= \frac{1}{x} I_\rho(ix) - \frac{i^\rho x^{\rho-1}}{2^\rho \Gamma(\rho+1)}, \; (R(\rho) > -1) \; . \; . \quad (37).$$

2°: $b_n = \dfrac{\Gamma(\rho-\nu+n-1)}{n!\,\Gamma(\rho+n+1)}$, waardoor het eerste lid van (II) wordt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\rho-\nu+n-1)}{n!\,\Gamma(\rho+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^n I_{\nu+n+1}(x) = \frac{\Gamma(\rho-\nu-1)}{\Gamma(\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-\rho+1} I_\rho(x) \,^{1)},$$

terwijl volgens (35), zoo we stellen: $\rho = 2\nu - \sigma + 2$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,\Gamma(2\nu-\sigma+n+3)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} = \left(\frac{2}{ix}\right)^{2\nu-\sigma+2} I_{2\nu-\sigma+2}(ix).$$

Bepalen we ons thans tot het geval $R(\sigma) > -1$, zoodat de laatste som in het rechterlid van (II) wegblijft, dan krijgen we bij substitutie dezer waarden in (II) na eenige herleiding:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\sigma(x\cos\phi)\, I_{2\nu-\sigma+2}(ix\sin\phi)\cot^{\sigma+1}\phi d\phi =$$

$$= \frac{i^{2\nu-\sigma+2}\,\Gamma(\nu-\sigma+1)}{\Gamma(\nu+2)} \frac{x^\sigma}{2^{\sigma+1}} I_{2\nu-\sigma+2}(x),$$

$$\left(\begin{matrix} R(\nu) > -1 \\ R(\nu+1) > R(\sigma) > -1 \end{matrix}\right) \; . \; . \; . \; . \quad (38).$$

Uit deze betrekking kunnen we verschillende andere afleiden door verschillende waarden aan ν en σ toe te kennen. Maken we gebruik van de betrekkingen:

$$I_{-\frac{1}{2}}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \cos y \quad \text{en} \quad I_{\frac{1}{2}}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}} \sin y,$$

dan vinden we, zoo we nemen: $2\nu = \sigma - \frac{5}{2}$ en $2\nu = \sigma - \frac{3}{2}$ na eenige herleiding respectievelijk:

---

[1]) Nielsen, p. 268, (1).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{I}_\sigma(x\cos\phi)\cos(ix\sin\phi)\frac{\cot^{\sigma+1}\phi}{\sqrt{\sin\phi}}\,d\phi =$$

$$=\frac{\Gamma(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sigma)}{\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sigma)}\frac{x^\sigma}{2^{\sigma+1}}\cos x,\ (-\tfrac{1}{2}>\mathrm{R}(\sigma)>-1)\ .\ (39)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{I}_\sigma(x\cos\phi)\sin(ix\sin\phi)\frac{\cot^{\sigma+1}\phi}{\sqrt{\sin\phi}}\,d\phi =$$

$$=i\,\frac{\Gamma(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sigma)}{\Gamma(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sigma)}\frac{x^\sigma}{2^{\sigma+1}}\sin x,\ (\tfrac{1}{2}>\mathrm{R}(\sigma)>-1).\ \ .\ \ (40)$$

(39) $+\,i\times$ (40) geeft ons nog:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{I}_\sigma(x\cos\phi)\,e^{-\sin\phi}\,\frac{\cot^{\sigma+1}\phi}{\sqrt{\sin\phi}}\,d\phi =$$

$$=\frac{x^\sigma}{2^{\sigma+1}}\left\{\frac{\Gamma(-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sigma)}{\Gamma(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\sigma)}\cos x-\frac{\Gamma(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\sigma)}{\Gamma(\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\sigma)}\sin x\right\},(-\tfrac{1}{2}>\mathrm{R}(\sigma)>-1)\ .\ (41).$$

Zoo we in (38) nemen $\sigma=-\frac{1}{2}$, $2\nu=\rho-\frac{3}{2}$ en $\sigma=\frac{1}{2}$, $2\nu=\rho-\frac{3}{2}$, krijgen we achtereenvolgens:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{I}_\rho(ix\sin\phi)\cos(x\cos\phi)\frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi}} =$$

$$=i^\rho\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{4})\sqrt{\pi}}{2\Gamma(\frac{1}{2}\rho+\frac{3}{4})}\mathrm{I}_\rho(x),\ (\mathrm{R}(\rho)>-\tfrac{1}{2})\ .\ \ .\ \ (42)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{I}_\rho(ix\sin\phi)\sin(x\cos\phi)\frac{\cot\phi}{\sqrt{\sin\phi}}\,d\phi =$$

$$=i^\rho\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\rho-\frac{1}{4})x\sqrt{\pi}}{4\,\Gamma(\frac{1}{2}\rho+\frac{5}{4})}\mathrm{I}_\rho(x),\ (\mathrm{R}(\rho)>\tfrac{1}{2})\ .\ \ .\ \ .\ \ (43)$$

(42) $\pm$ (43) voert ons tot:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{I}_\rho(ix\sin\phi)\sin(\phi\pm x\cos\phi)\frac{d\phi}{\sqrt{\sin\phi}} =$$

$$=i^\rho\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{I}_\rho(x)\left\{\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\rho+\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}\rho+\frac{3}{4})}\pm\frac{x}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2}\rho-\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}\rho+\frac{5}{4})}\right\},\ (\mathrm{R}(\rho)>\tfrac{1}{2})\ .\ (44).$$

Uit (42) volgt nog voor $\rho = \frac{1}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(ix \sin\phi) \cos(x \cos\phi) \frac{d\phi}{\sin\phi} = \frac{i\pi}{2} \sin x \quad \ldots\ldots (45).$$

6. Niet onbelangrijk is ook de formule, die men krijgt door beide leden van (6), na vermenigvuldiging met $c_n \left(\frac{2}{x}\right)^n$, te sommeeren over n van 0 tot ∞; wanneer we dan nog stellen in de integraal: $c = \cos^2\phi$, komt er:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{2}{x}\right) I_{\nu+n+1}(x) =$$

$$= \frac{x^{\nu-\sigma+1}}{2^{\nu-\sigma}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\sigma(x\cos\phi) f(\sin\phi) \sin^{2\nu-2\sigma+1}\phi \cos^{\sigma+1}\phi d\phi +$$

$$+ \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1} \sum_{m=0}^{-\sigma-1} \frac{(-1)^m}{m!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\Gamma(m+n+\nu+2)}, \quad \ldots (\text{III}).$$

wanneer ondersteld wordt:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{\Gamma(\nu-\sigma+n+1)} x^{2n} \quad \ldots\ldots\ldots (46)$$

In (III) is weer ν *geheel willekeurig*, terwijl σ voldoen moet aan één der voorwaarden:

1°: $-1 < R(\sigma) < R(\nu+1)$, in welk geval de laatste som wegblijft,

2°: σ = negatief geheel $< R(\nu+1)$.

De toepassingen van (III) zijn van niet minder belang dan die van (I) en (II). Stellen we:

1°: $c_n = \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n}$, dan gaat het eerste lid van (III) over in:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{h}{2}\right)^{2n} \left(\frac{2}{x}\right)^n I_{\nu+n+1}(x) = \frac{x^{\nu+1}}{\sqrt{x^2+h^2}^{\,\nu+1}} I_{\nu+1}(\sqrt{x^2+h^2})\ ^{1)}.$$

[1]) Nielsen, p. 8, (8).

terwijl volgens (46):

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu-\sigma+n+1)}\left(\frac{hx}{2}\right)^{2n}=\left(\frac{2}{hx}\right)^{\nu-\sigma}\mathrm{I}_{\nu-\sigma}(hx);$$

de som in het rechterlid van (III) wordt:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+1}\sum_{m=0}^{-\sigma-1}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(m+n+\nu+2)}\left(\frac{h}{2}\right)^{2n}=$$

$$=\sum_{m=0}^{-\sigma-1}\frac{(-1)_m}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m\left(\frac{x}{h}\right)^{m+\nu+1}\cdot\mathrm{I}_{m+\nu+1}(h).$$

Substitueeren we deze waarden in (III) en stellen we $\nu=\sigma+\rho$, dan volgt na eenige herleiding:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{I}_\sigma(x\cos\phi)\,\mathrm{I}_\rho(h\sin\phi)\cos^{\sigma+1}\phi\sin^{\rho+1}\phi\,d\phi=$$

$$=\frac{x^\sigma h^\rho}{\sqrt{x^2+h^2}^{\sigma+\rho+1}}\mathrm{I}_{\sigma+\rho+1}(\sqrt{x^2+h^2})-$$

$$-\frac{x^\sigma}{h^{\sigma+1}}\sum_{m=0}^{-\sigma-1}\frac{(-1)_m}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m\left(\frac{x}{h}\right)^m\mathrm{I}_{m+\sigma+\rho+1}(h)\,.\;.\;.\quad(47).$$

Hierin is $\mathrm{R}(\rho)>-1$ en σ gebonden aan één der voorwaarden:

1°: $\mathrm{R}(\sigma)>-1$, in welk geval de laatste som wegblijft,

2°: $\sigma=$ negatief geheel.

Indien we ons bepalen tot $\mathrm{R}(\sigma)>-1$, stemt (47) volkomen overeen met NIELSEN, p. 181, (7) – zoo we daarin nl. lezen y^ν voor y^ρ —; 't eerst werd die uitdrukking gegeven door SONIN (*Mathem. Annalen*, Bd. 16, p. 36; 1880). Langs geheel anderen weg afgeleid, geeft (47) ons ook de waarde van diezelfde integraal, zoo σ *negatief geheel* is.

Voor $\rho=-\frac{1}{2}$ en $\rho=\frac{1}{2}$ gaat (47) na eenige herleiding over in:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\sigma(x\cos\phi)\cos(h\sin\phi)\cos^{\sigma+1}\phi\, d\phi =$$

$$= \frac{x^\sigma}{\sqrt{x^2+h^2}^{\,\sigma+\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, I_{\sigma+\frac{1}{2}}\left(\sqrt{x^2+h^2}\right) -$$

$$- \frac{x^\sigma}{h^{\sigma+\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{m=0}^{-\sigma-1}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m\left(\frac{x}{h}\right) I_{m+\sigma+\frac{1}{2}}(h) \quad . \quad (48)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\sigma(x\cos\phi)\sin(h\sin\phi)\cos^{\sigma+1}\sin\phi\, d\phi =$$

$$= \frac{x^\sigma h}{\sqrt{x^2+h^2}^{\,\sigma+\frac{3}{2}}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, I_{\sigma+\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x^2+h^2}\right) -$$

$$- \frac{x^\sigma}{h^{\sigma+\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{m=0}^{-\sigma-1}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m\left(\frac{x}{h}\right)^m I_{m+\sigma+\frac{3}{2}}(h) \quad . \quad (49).$$

Nemen we in (47), (48) en (49): $h = x$, dan krijgen we resp.:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\sigma(x\cos\phi)\, I_\rho(x\cos\phi)\cos^{\sigma+1}\phi\,\sin^{\rho+1}\phi\, d\phi =$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{\sigma+\rho+1}{2}}\, x}\, I_{\sigma+\rho+1}\left(x\sqrt{2}\right) -$$

$$- \frac{1}{x}\sum_{m=0}^{-\sigma-1}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m I_{m+\sigma+\rho+1}(x) \quad . \quad . \quad (50).$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\sigma(x\cos\phi)\cos(x\sin\phi)\cos^{\sigma+1}\phi\, d\phi =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left\{ I_{\sigma+\frac{1}{2}}\left(x\sqrt{2}\right) - \sum_{m=0}^{-\sigma-1}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m I_{m+\sigma+\frac{1}{2}}(x)\right\} \quad . \quad (51).$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\sigma(x\cos\phi)\sin(x\sin\phi)\cos^{\sigma+1}\phi\,\sin\phi\, d\phi =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left\{ I_{\sigma+\frac{3}{2}}\left(x\sqrt{2}\right) - \sum_{m=0}^{-\sigma-1}\frac{(-1)^m}{m!}\left(\frac{x}{2}\right)^m I_{m+\sigma+\frac{3}{2}}(x)\right\} \quad . \quad (52).$$

Voor $h = ix$ gaat (47) over in (36), terwijl (48) en (49) daardoor overgaan in:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\sigma(x\cos\phi)\cos(ix\sin\phi)\cos^{\sigma+1}\phi\, d\phi =$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left\{\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\sigma+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\sigma+\frac{3}{2})} - \frac{1}{i^{\sigma+\frac{1}{2}}}\sum_{m=0}^{-\sigma-1}\frac{1}{m!}\left(\frac{ix}{2}\right)^m I_{m+\sigma+\frac{1}{2}}(ix)\right\} \quad . \quad (53)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\sigma(x\cos\phi)\sin(ix\sin\phi)\cos^{\sigma+1}\phi\sin\phi\, d\phi =$$

$$= i\sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left\{\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\sigma+\frac{3}{2}}}{\Gamma(\sigma+\frac{5}{2})} - \frac{1}{i^{\sigma+\frac{3}{2}}}\sum_{m=0}^{-\sigma-1}\frac{1}{m!}\left(\frac{ix}{2}\right)^m I_{m+\sigma+\frac{3}{2}}(ix)\right\} \quad . \quad (54)$$

2°: $c_n = \Gamma(\nu+n)$; hierdoor wordt het eerste lid van (III):

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Gamma(\nu+n)\left(\frac{2}{x}\right)^n I_{\nu+n+1}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu-1} - \Gamma(\nu) I_{\nu-1}(x)^{1)}, (R(\nu) > 0),$$

terwijl volgens (46):

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\nu+n)}{\Gamma(\nu-\sigma+n+1)}x^{2n} = \frac{\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu-\sigma+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu^{n/1}}{(\nu-\sigma+1)^{n/1}}x^{2n}.$$

We kunnen nu de volgende gevallen onderscheiden:

a) $\sigma = \nu$, dan $f(x) = \Gamma(\nu)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\nu^{n/1}}{1^{n/1}}x^{2n} = \frac{\Gamma(\nu)}{(1-x^2)^\nu}$, $(|x| < 1)$;

b) $\nu = 1$, $\sigma = \frac{1}{2}$, dan:

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^{n/1}}{\frac{3}{2}^{n/1}}x^{2n} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2.4\ldots.2n}{3.5\ldots.(2n+2)}x^{2n} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\text{arc}\sin x}{x\sqrt{1-x^2}}, \ (|x| < 1)$$

c) $\nu = 1$, $\sigma = 0$, dan:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1^{n/1}}{2^{n/1}}x^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-2}}{n} = -\frac{1}{x^2}\lg(1-x^2), \ (|x| < 1)$$

---

[1]) *Nieuw Archief* (2) VII, p. 89, (5).

d) $\nu = \frac{1}{2}$, $\sigma = 0$, dan:

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}^{n/1}}{\frac{3}{2}^{n/1}} x^{2n} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{x} \lg \frac{1+x}{1-x}, \; (|x| < 1).$$

In alle gevallen is $\sigma > -1$, zoodat bij substitutie dezer waarden in (III) de som in het rechterlid wegblijft; stellen we nog in de integraal $\cos\phi = y$, dan krijgen we na eenige herleiding respectievelijk:

$$\int_0^1 I_\nu(xy)\, y^{1-\nu} dy = \frac{x^{\nu-2}}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} - \frac{1}{x} I_{\nu-1}(x), \; (R(\nu) > 0) \quad . \; (55),$$

$$\int_0^1 \text{arc} \cos y \,.\, \sin xy\, dy = \frac{1}{2x} \{1 - I_0(x)\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (56)$$

$$\int_0^1 I_0(xy)\, y \lg y\, dy = \frac{2}{x^2} \{I_0(x) - 1\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (57)$$

$$\int_0^1 I_0(xy)\, y\, lg \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{1-\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{2}{x^2}(1 - \cos x). \quad . \quad (58).$$

Daar $lg \dfrac{1+\sqrt{1-y^2}}{1-\sqrt{1-y^2}} = 2\{lg(1+\sqrt{1-y^2}) - lg y\}$, volgt uit (57) en (58):

$$\int_0^1 I_0(xy)\, y \lg(1+\sqrt{1-y^2})\, dy = \frac{2}{x^2}\{I_0(x) - \cos^2 \tfrac{1}{2}x\}. \quad . \quad (59).$$

En trekken we van deze integraal die uit (58) af, dan komt er:

$$\int_0^1 I_0(xy)\, y \lg(1-\sqrt{1-y^2})\, dy = \frac{2}{x^2}\{I_0(x) - \sin^2 \tfrac{1}{2}x - 1\}. \; (60).$$

SUR UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS,

PAR

C. VAN ALLER.
(Breda.)

Sous le titre ci-dessus (voir p. 38) M. W. KAPTEYN démontre qu'un déterminant, dont les éléments satisfont à certaines conditions, citées dans cette article, se réduit à zero. A cet effet l'auteur décompose le déterminant en déterminants mineurs, en appliquant sa méthode à un déterminant du septième ordre.

Je me suis posé la question si la démonstration de l'énoncé du théorème ne serait possible sans la décomposition du déterminant; celle ci exigeant toujours quelques calculs et ne pouvant être facilement exécutée que pour un déterminant d'un ordre non élévé. Après avoir réussi à trouver une démonstration simple, conforme à la condition désirée et aprés l'avoir communiquée à M. KAPTEYN, je veux bien me rendre à son invitation en publiant ici la démonstration.

Considérons d'abord un déterminant dont tous les éleménts sont zéros à l'exception des éleménts de la diagonale principale et des deux diagonales adjacentes; je dis qu'on peut multiplier les éleménts de l'une des deux dernières diagonales par un nombre quelconque m, pourvu qu'on divise les éléments de l'autre diagonale par ce nombre. En effet si l'on multiplie les règles (colonnes) consécutives par les termes de la série 1, m, $m^2 \ldots m^{k-1}$, respectivement, k étant l'ordre du déterminant, on n'a qu' à diviser les colonnes (règles) consécutives par les mêmes termes pour modifier le déterminant de la manière désignée sans que sa valeur soit changée.

Maintenant considérons le déterminant proposé par M. KAPTEYN; en vertu de la remarque précédente on peut permuter les facteurs λ et μ des élements des diagonales de part et d'autre de la diagonale principale. Ensuite on peut changer les signes de tous les termes de ces deux diagonales, ce qui revient au même

que si l'on multiplie les termes de l'une de ces diagonales par —1, et que l'on divise les termes de l'autre par —1. Après ces modifications renversons l'ordre des règles du déterminant et l'ordre des colonnes; le déterminant qui vient aura tous les éleménts égaux à ceux du déterminant proposé avec les signes contraires.

La valeur du déterminant n'a cependant pas changée; parce qu'il est d'ordre impair, il est égal à zéro.

SUR UNE FORMULE DE CAUCHY,

PAR

W. KAPTEYN.

(Utrecht).

Dans le „Festschrift zur Feier der hundertsten Wiederkehr des Geburtstages von C. G. J. JACOBI [1])" on lit que JACOBI dan un billet adressé à BESSEL lui fait part de la formule

$$\sin \operatorname{am}(u, K) = \frac{2\sqrt[4]{q}\left(\sin\frac{\pi u}{2K} - q^{1.2}\sin\frac{3\pi u}{2K} + q^{2.3}\sin\frac{5\pi u}{2K} - \ldots\right)}{\sqrt{K}\left(1 - 2q^{1.1}\cos\frac{\pi u}{2K} + 2q^{2.2}\cos\frac{2\pi u}{2K} - \ldots\right)}$$

où $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$. Il paraît que c'est ici qui l'on rencontre pour la première fois la fonction transcendante ϑ. Quand on fait attention à la date de ce billet „Mars 1828," il sera peut être digne de remarque que cette fonction se présente déjà dans un mémoire de Cauchy inséré dans ses Exercices de Mathématiques de l'année 1827. En même temps Cauchy donne une formule remarquable qui n'est autre chose qu'une transformation linéaire de la même fonction ϑ.

En effet dans l'Article „sur les fonctions réciproques" Anc. Exerc. de Math., p. 156 on trouve les deux formules suivants:

$$a^{\frac{1}{2}}\left[\tfrac{1}{2} + e^{-a^2} + e^{-4a^2} + e^{-9a^2} + \ldots\right] = b^{\frac{1}{2}}\left[\tfrac{1}{2} + e^{-b^2} + e^{-4b^2} + e^{-9b^2} + \ldots\right] \quad (89),$$

$$a^{\frac{1}{2}}\left[\tfrac{1}{2} + e^{-a^2}\cos 2au + e^{-4a^2}\cos 4au + \ldots\right] =$$

$$= \tfrac{1}{2} b^{\frac{1}{2}}\left[e^{-u^2} + e^{-(b-u)^2} + e^{-(b+u)^2} + \ldots\right] \quad \ldots \quad (90),$$

où les quantités a et b sont liées par l'équation

$$ab = \pi.$$

---

[1]) L. KÖNIGSBERGER.

La première de ces formules s'écrit dans les notations des MM. TANNERY et MOLK „Eléments de la Théorie des Fonctions elliptiques"

$$\vartheta_3(0/\tau) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} \vartheta_3\left(0 / -\frac{1}{\tau}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

où

$$\tau = \frac{\omega_3}{\omega_1}, \; q = e^{\tau\pi i}, \; \tau' = -\frac{1}{\tau} = -\frac{\omega_1}{\omega_3}, \; q' = e^{-\frac{\pi i}{\tau}}.$$

Si l'on pose, en effet

$$\tau = \frac{ia^2}{\pi},$$

on aura

$$q = e^{-a^2}, \; q' = e^{-\frac{\pi^2}{a^2}},$$

par suite

$$\vartheta_3(0/\tau) = 1 + 2e^{-a^2} + 2e^{-4a^2} + 2e^{-9a^2} + \ldots$$

$$\vartheta_3\left(0 / -\frac{1}{\tau}\right) = 1 + 2e^{-\frac{\pi^2}{a^2}} + 2e^{-\frac{4\pi^2}{a^2}} + 2e^{-\frac{9\pi^2}{a^2}} + \ldots$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation (1) celle-ci prend la forme

$$1 + 2e^{-a^2} + 2e^{-4a^2} + 2e^{-9a^2} + \ldots =$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{a}\left(1 + 2e^{-\frac{\pi^2}{a^2}} + 2e^{-\frac{4\pi^2}{a^2}} + 2e^{-\frac{9\pi^2}{a^2}} + \ldots\right),$$

qui est identique avec la formule (89) de Cauchy.

Quant à la seconde on la déduira aisément de la formule

$$\vartheta_3(v/\tau) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\tau}} e^{-\frac{\pi i v^2}{\tau}} \vartheta_3\left(\frac{v}{\tau} \,\Big|\, -\frac{1}{\tau}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

en posant

$$v = \frac{au}{\pi}, \quad \tau = \frac{ia^2}{\pi} \text{ etc.}$$

En effet on a

$$\vartheta_3(v\,/\,\tau) = 1 + 2e^{-a^2}\cos 2au + 2e^{-4a^2}\cos 4au + 2e^{-9a^2}\cos 6au + \dots$$

$$\vartheta_3\left(\frac{v}{\tau}\middle| -\frac{1}{\tau}\right) = 1 + e^{-\frac{\pi^2}{a^2}}\, e^{\frac{2\pi u}{a}} + e^{-\frac{4\pi^2}{a^2}}\, e^{\frac{4\pi u}{a}} + e^{-\frac{9\pi^2}{a^2}}\, e^{\frac{6\pi u}{a}} + \dots$$

$$+ e^{-\frac{\pi^2}{a^2}}\, e^{-\frac{2\pi u}{a}} + e^{-\frac{4\pi^2}{a^2}}\, e^{-\frac{4\pi u}{a}} + e^{-\frac{9\pi^2}{a^2}}\, e^{-\frac{6\pi u}{a}} + \dots$$

$$= e^{u^2}\Big[e^{-u^2} + e^{-\left(u-\frac{\pi}{a}\right)^2} + e^{-\left(u-\frac{2\pi}{a}\right)^2} + e^{-\left(u-\frac{3\pi}{a}\right)^2} + \dots$$

$$+ e^{-\left(u+\frac{\pi}{a}\right)^2} + e^{-\left(u+\frac{2\pi}{a}\right)^2} + e^{-\left(u+\frac{3\pi}{a}\right)^2} + \dots\Big],$$

par conséquent, d'après l'équation (2)

$$1 + 2e^{-a^2}\cos 2au + 2e^{-4a^2}\cos 4au + 2e^{-9a^2}\cos 6au + \dots =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{a}\Big[e^{-u^2} + e^{-\left(\frac{\pi}{a}-u\right)^2} + e^{-\left(\frac{2\pi}{a}-u\right)^2} + e^{-\left(\frac{3\pi}{a}-u\right)^2} + \dots$$

$$+ e^{-\left(\frac{\pi}{a}+u\right)^2} + e^{-\left(\frac{2\pi}{a}+u\right)^2} + e^{-\left(\frac{3\pi}{a}+u\right)^2} + \dots\Big].$$

qui s'accorde avec la seconde formule de Cauchy.

On lit encore dans l'article cité que les formules (89) et (90) ont attirées l'attention de Laplace et de Poisson, et que la première formule a été signalé déjà par Cauchy dans le Bulletin de la Société philomatique d'août 1817.

EENE INTEGRAAL, DIE BETREKKING HEEFT OP EENE ALGEBRAÏSCHE VERGELIJKING,

DOOR

J. C. KLUYVER.
(Leiden).

Een bekend vraagstuk der kansrekening leidt tot de berekening van eene veelvoudige integraal, die de coëfficiënten eener algebraïsche vergelijking tot veranderlijken heeft, en waarvan het integratiegebied wordt bepaald door de voorwaarde, dat alle wortels der vergelijking bestaanbaar zijn.

Als van ieder van n waarnemingsfouten de frequentie bepaald is door de vergelijking

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2},$$

kan men vragen naar de kans, dat de som der fouten gelegen is tusschen a en $a + \Delta a$. Die kans is gegeven door de integraal

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n \iiint .. dx_1\, dx_2 \ldots dx_n\, e^{-h^2 \Sigma x^2},$$

zoo geintegreerd wordt over alle waarden van x_1, $x_2, \ldots x_n$, wier som ligt tusschen a en $a + \Delta a$.

Substitueert men

$$x_k = \frac{a}{n} + z_k,$$

dan kan dezelfde kans uitgedrukt worden door de integraal,

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-\frac{h^2 a^2}{n}} \iiint dz_1\, dz_n \ldots dz_n\, e^{-\frac{2ah^2}{n}\Sigma z - h^2 \Sigma z^2},$$

indien de integratie wordt uitgestrekt over alle waarden van z_1, $z_2, \ldots z_n$, wier som ligt tusschen 0 en Δa.

De grootheden z_κ zijn de wortels der vergelijking

$$z^n + \beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} + \ldots \beta_n = 0\,,$$

en de coëfficienten β_κ dezer vergelijking kunnen als nieuwe veranderlijken worden ingevoerd. De integraal gaat daardoor over in

$$\left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-\frac{h^2a^2}{n}} \iiint \ldots \frac{d\beta_1\, d\beta_2 \ldots d\beta_n}{\Delta} \,.\, e^{\frac{2ah^2}{n}\beta_1 - h^2(\beta_1^2 - 2\beta_2)}\,,$$

waarbij met Δ is bedoeld de functionaaldeterminant

$$\pm \begin{vmatrix} \frac{\partial \beta_1}{\partial z_1} & \frac{\partial \beta_2}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial \beta_n}{\partial z_3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial \beta_1}{\partial z_n} & \frac{\partial \beta_2}{\partial z_n} & \ldots & \frac{\partial \beta_n}{\partial z_n} \end{vmatrix}.$$

De hier voorkomende gedeeltelijke differentiaalquotienten voldoen aan de betrekking

$$\frac{\partial \beta_\kappa}{\partial z_i} = - \beta_{\kappa-1} + z_i \frac{\partial \beta_{\kappa-1}}{\partial z_i}\,,$$

en met behulp daarvan kan de determinant herleid worden tot het product

$$\pm \prod_{i,\kappa} (z_i - z_\kappa)\,,$$

dat is tot den positieven vierkantswortel uit den discriminant $D(\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n)$ der vergelijking.

Ook het integratiegebied is vast te stellen. In de aanvankelijke integraal moet ieder der veranderlijken z_κ elke bestaanbare waarde kunnen aannemen. In de vervormde integraal strekt zich dus het integratiegebied uit over alle waarden der coëfficienten β_κ, voor welke de vergelijking n bestaanbare wortels heeft. Noemt men het aldus bepaalde gebied G, dan moet $n\,!$ malen over het gebied G worden geintegreerd, want ieder der n wortels moet op zijne beurt eene gegeven waarde kunnen verkrijgen. De eenige beperking, die G ondergaat, is, dat β_1 moet blijven tusschen 0 en Δa, een vak, dat met Δa oneindig klein wordt.

In deze onderstelling is de integratie naar β_1 uit te voeren, en de integraal wordt

$$\frac{h}{\sqrt{\pi n}} e^{-\frac{h^2 a^2}{n}} da \times \left(\frac{h}{\sqrt{\pi}}\right)^{n-1} n\,!\sqrt{n} \iiint_G ..d\beta_2 \ldots d\beta_n \, . \frac{e^{2h^2\beta_2}}{\sqrt{D(0,\beta_2,..\beta_n)}}.$$

Met het integratiegebied G is thans bedoeld het gebied der coëfficienten, waarin de vergelijking

$$z^n + \beta_2 z^{n-2} + \beta_3 z^{n-3} + \ldots + \beta_n = 0$$

uitsluitend bestaanbare wortels heeft.

De bovenstaande uitkomst, die aangeeft de kans, dat de som der n waarnemingsfouten ligt tusschen a en $a + da$, moet, zoo men ten opzichte van a integreert tusschen de grenzen $-\infty$ en $+\infty$, opleveren de eenheid, en daaruit volgt, dat men heeft:

$$\iiint_G ..d\beta_2 \ldots d\beta_n \, . \frac{e^{2h^2\beta_2}}{\sqrt{D(0,\beta_2,\ldots\beta_n)}} = \frac{1}{n\,!\sqrt{n}} \, . \left(\frac{\sqrt{\pi}}{h}\right)^{n-1}.$$

Voor kleine waarden van n is de juistheid dezer integraalstelling na te gaan.

Voor de vergelijking

$$z^3 + \beta_2 z + \beta_3 = 0$$

is

$$D(0, \beta_2, \beta_3) = -4\beta_2^3 - 27\beta_3^2,$$

zoodat

$$\iint_G \frac{e^{2h^2\beta_2}}{\sqrt{-4\beta_2^3 - 27\beta_3^2}} d\beta_2 d\beta_3 =$$

$$= \int_{-\infty}^{0} e^{2h^2\beta_2} d\beta_2 \int_{-\sqrt{-\frac{4}{27}\beta_2^3}}^{+\sqrt{-\frac{4}{27}\beta_2^3}} \frac{d\beta_3}{\sqrt{-4\beta_2^3 - 27\beta_3^2}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \int_{-\infty}^{0} e^{2h^2\beta_2} d\beta_2 = \frac{1}{3\sqrt{3}} \, . \frac{\pi}{h^2},$$

wat in overeenstemming is met de algemeene uitkomst.

M¹2g

DES TANGENTS VOISINES D'UNE TANGENTE D'INFLEXION.

PAR

W. A. VERSLUYS.
(Delft.)

---

§ 1. Au page 593 des *„Vorlesungen über Geometrie"* de Clebsch—Lindemann on trouve le théorème (A) suivant:

Bei fortgesetztem Tangentenziehen an eine Curve dritter Ordnung und dritter Classe von einem beliebigen Punkte aus, nähert sich der Berührungspunkt ohne Aufhören dem Wendepunkte.

Ce théorème est une conséquence immédiate de la relation

$$\lambda_1 = -\tfrac{1}{2}\lambda_0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

entre les paramètres λ_1 et λ_0 d'un point de la courbe et de son point tangentiel, l'équation de la courbe étant

$$y = ax^3,$$

ou bien

$$x = \lambda, \; y = a\lambda^3.$$

La relation (1) donne encore le théorème (B) suivant:

Si l'origine des coordonnées est un point d'inflexion et si l'axe $y = 0$ est la tangente d'inflexion, l'abscisse d'un point de la courbe est la moitié de l'abscisse de son point tangentiel, et est de signe contraire.

Dans les pages suivantes je me propose de démontrer que le théorème (B) et, par conséquent, également le théorème (A) est encore vrai pour une cubique quelconque et même pour une courbe algébrique quelconque en choissant convenablement le point tangentiel et sous la condition que le point de contact soit assez voisin du point tangentiel.

Le théorème (A) sera encore généralisé en substituant pour la tangente d'inflexion une tangente ayant en un point simple de la courbe une contact d'ordre $2p$.

§ 2. Soit l'axe $x_1 = 0$ une tangente d'inflexion d'une cubique générale et soit l'axe $x_2 = 0$ une des 3 tangentes qu'on peut encore mener à la cubique du point d'inflexion. On peut choisir l'axe $x_3 = 0$ de manière telle que les coordonnées d'un point quelconque P_0 de la cubique soient exprimées en fonction du paramètre u, par les formules suivantes:

$$rx_1 = sn^3 n, \quad rx_2 = sn\, u, \quad rx_3 = cn\, u \,.\, dn\, u.$$ [1]

Soit v le paramètre du point P_1; si l'on a

$$u = -2v$$

le point P_0 est le point tangentiel du point P_1. On trouve facilement

$$\frac{x_2}{x_3} = \frac{sn\, u}{cn u dn u} = \frac{sn - 2v}{cn - 2v dn - 2v} = - \frac{sn 2v}{cn 2v\, dn 2v} =$$

$$- \frac{2 sn\, v\, cn\, v\, dn\, v\,(1 - k^2 sn^4 v)}{(cn^2 v - dn^2 v\, sn^2 v)\,(dn^2 v - k^2 sn^2 v\, cn^2 v)} =$$

$$-2 \frac{sn\, v}{cn\, v\, dn\, v} \times \frac{(1 - k^2 sn^4 v)}{\left(1 - \frac{dn^2 v\, sn^2 v}{cn^2 v}\right)\left(1 - k^2 \frac{sn^2 v\, cn^2 v}{dn^2 v}\right)}.$$

Si v tend vers zéro, la fraction:

$$\frac{1 - k^2 sn^4 v}{\left(1 - \frac{dn^3 v\, sn^2 v}{cn^2 v}\right)\left(1 - k^2 \frac{sn^2 v\, cn^2 v}{dn^2 v}\right)}$$

aura pour limite l'unité, puisque $sn\, o = 0$, $cn\, o = dn\, o = 1$. Donc, en prenant v suffisamment petit

$$\text{module} \frac{sn\, u}{cn\, u\, dn\, u} > \text{module} \frac{sn\, v}{cn\, v\, dn\, v},$$

ou bien en désignant par y_1, y_2 et y_3 les coordonnées du point P_1

$$\text{module} \frac{x_2}{x_3} > \text{module} \frac{y_2}{y_3}$$

et les fractions $\frac{x_2}{x_3}$ et $\frac{y_2}{y_3}$ auront des signes contraires. Donc

---

[1]) Clebsch-Lindemann, loc. cit. p. 604.

les points P_0 et P_1 seront situés de part et d'autre du point d'inflexion (0, 0, 1) et le point P_1 en sera plus rapproché que son point tangentiel P_0. Le point P_1 sera de même le point tangentiel de 3 points dont l'une, P_2, se trouve dans le voisinage du point d'inflexion (0, 0, 1). Ce point P_2 sera plus rapproché du point (0, 0. 1) que le sera le point P_1. En continuant de la sorte on détermine sur la cubique une série de points P_0, P_1, $P_2 \ldots P_n \ldots$ etc., qui tendent vers le point d'inflexion (0, 0, 1). Ce point (0, 0, 1) sera la limite du point P_n, puisque nous venons de trouver

$$\lim. \frac{x_2}{x_3} : \frac{y_2}{y_3} = -2.$$

§ 3. L'équation d'une courbe algébrique C^n quelconque dont l'origine est un point d'inflexion et dont l'axe $y = 0$ est la tangente d'inflexion est de la forme suivante:

$$0 = y + a_{11}xy + a_{02}y^2 + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + \text{etc.} \quad . \quad . \quad (1)$$

L'équation de la tangente à la courbe dans un point $P_1(x_1, y_1)$ voisin de l'origine est donc:

$$\begin{aligned} 0 = x\,(a_{11}y &+ 3a_{30}x_1^2 + 4a_{40}x_1^3 + \text{etc.}) \\ &+ y\,(1 + a_{11}x_1 + 2a_{02}y + a_{21}x_1^2 + a_{31}x_1^3 + \text{etc.}) \quad . \quad . \quad (2) \\ &+ \{(n-1)\,y_1 + (n-3)\,a_{30}x^3 + \text{etc}\,\}. \end{aligned}$$

$P_1(x_1, y_1)$ étant un point de la courbe (1) on aura

$$y_1 = -a_{30}x_1^3 + \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Si donc x_1 est, par supposition, un infiniment petit du premier ordre, y_1 est infiniment petit d'ordre 3. Dans l'équation de la tangente (2) ne sont écrits que les termes de l'ordre 1, 2 et 3. En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur, l'équation de la tangente devient, en tenant compte de la relation (3):

$$y = \frac{2a_{30}x_1^3 - x\,\{3a_{30}x_1^2 + (4a_{40} - a_{11}a_{30})x_1^3\}}{1 + a_{11}x_1 + a_{21}x_1^2 + (a_{31} - 2a_{12}a_{30})x_1^3} \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Éliminant y entre (1) et (4) on obtient une équation en x, donnant les abscisses des points d'intersection de la courbe avec sa tangente en $P_1(x_1, y_1)$.

Soit le résultat de cette élimination l'équation suivante:

$$0 = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 \text{ etc.}$$

on vérifie facilement que

$$A_0 = + 2a_{30} x_1^3 + \text{termes en } x_1 \text{ d'ordre supérieur};$$

$$A_1 = - 3a_{30} x_1^2 + \text{etc.};$$

$$A_2 = - 3a_{30} x_1^2 + \text{etc.};$$

$$A_3 = + a_{30} + \text{etc.}$$

Les coefficients A_0, A_1 et A_2 sont donc des infiniments petits respectivement d'ordre 3, 2 et 2, cequi démontre que 3 racines de l'équation en x sont des infiniments petits. La partie principale du coefficient A_3 étant $+ a_{30}$, le produit des $(n - 3)$ racines finies est $\pm a_{30}$. Le produit des n racines étant $\mp A_0 = \mp 2a_{30} x_1^3$, le produit des 3 racines infiniment petits est $- 2x_1^3$. Deux des racines infiniment petits étant évidemmant x_1, la troisième est $- 2x_1$.

On obtient encore ce résultat en remarquant que A_2 est un infiniment petit d'ordre 2, cequi exige que la somme des 3 racines infiniment petits est zéro; 2 de ces racines étant x_1, la troisième doit être $- 2x_1$.

Cequi démontre le théorème:

Si l'axe des X est à l'origine une tangente d'inflexion d'une courbe algébrique, une tangente infiniment voisine rencontre la courbe dans un point d'abscisse $- 2x_1$, x_1 *étant l'abscisse du point de contact de la tangente.*

L'origine des coordonnées se trouve donc entre le point de contact $P_1(x_1, y_1)$ et le point tangentiel $P_0(- 2x_1, - 8x_1^3)$. Le point P_1 sera de même un point tangentiel du point $P_2(- \frac{1}{2}x_1, - \frac{1}{8}x_1^3)$. Le point de contact P_2 d'une des tangentes, qu'on peut mener du point P_1 à la courbe C^n, se trouve donc toujours entre le point d'inflexion (0, 0) et le pont tangentiel P_0

En négligeant les infiniment petits d'ordre supérieor on aura

$$OP_0 = 2OP_1, \quad OP_1 = 2OP_2, \text{ etc.}$$

En choisissant convenablement les points de contact et en partant d'un point, qui ne soit pas trop éloigné du point d'inflexion le théorème (A) du § 1 est donc vrai pour toute courbe algébrique.

§ 4. Au § 3 le point P_1 est, par supposition, infiniment voisin du point d'inflexion O. Supposons maintenant que le point de contact P_1 s'éloigné du point O. Le point tangentiel P_0, s'éloignera également du point O et en direction opposée. L'abscisse du point P_0 continuera de croître jusqu'au moment que cette abscisse atteint un maximum, c'est à dire, jusqu'au moment qu'on aura pour les coordonnées du point P_0 la relation $\frac{dx}{dy} = 0$, ou bien $\frac{dy}{dx} = \infty$. Le point P_1 doit donc être choisi de manière que la branche OP_0 ne possède pas de tangente ordinaire perpendiculaire à l'axe des X. Cette condition implique que la branche OP_0 ne doit pas passer par un point à l'infini. Le point P_0 en s'éloignant du point O ne deviendra imaginaire qu'en coincidant avec un autre point de rencontre de la courbe C^n avec sa tangente au point P_1. Le point P_0 coincidera avec cet autre point tangentiel du point P_1 dans les 2 cas suivants.

1°. Le point P_0 passe par un point double de la courbe.

2°. La droite P_1P_0, tangente au point P_1, devient encore tangente au point P_0 à la même branche de la courbe.

Quant le point P_0 passe par un noeud de la courbe C^n, il ne deviendra pas imaginaire, après la coïncidence, et il faut seulement choisir le point P_0 sur celle des 2 branches, laquelle passe par les points O et P_1. Si le point P_0 passe par un point de rebroussement le point P_0 y devient imaginaire. Il faut donc choisir le point P_1 de manière que la branche OP_0 ne possède pas de point de rebroussement.

La droite P_1P_0 pourra devenir tangente aux points P_1 et P_0 dans les 2 cas suivants.

1°. La tangente tourne par un angle de 180° le point de contact se déplaçant de P_1 à P_0. La tangente devrait alors passer par une position perpendiculaire à l'axe des X. Nous venons de supposer que cette position particulière ne se présente pas entre les points P_0 et P_1. De cette manière ou ne peut donc pas obtenir une tangente double.

2°. La courbe, qui à partir du point O tourne sa concavité du coté de la droite P_1P_0, change la direction de sa concavité. Alors un point d'inflexion devrait se trouver entre les points O et P_0. Si donc on suppose que l'arc OP_0 ne possède pas d'autre inflexion que celle au point O, l'arc OP_0 ne pourra posséder une tangente double.

§ 5. Supposons donc que le point P_0 se soit éloigné du point O jusqu'à une distance finie, en restant sur la branche passant par le point O, tandis que l'arc OP_0 ne présente pas un point ou une tangente stationnaire et ne possède pas de tangentes perpendiculaires à l'axe des X. Le point P_1, étant à son tour un point tangentiel d'un point P_2, supposons aussi que l'arc OP_1 soit également dénuée de ces singularités. Je démontrerai que sous ces conditions le point P_2 se trouve entre les points O et P_0 et que le théorème (A) est encore applicable aux points de l'arc P_1OP_0.

Considérons un point P_1 infiniment voisin du point d'inflexion O. Nous venons de voir au § 3 que le point P_2 se trouvera entre les points O et P_0. Si maintenant le point P_1 s'éloigne du point O jusqu'à une distance finie, les points P_0 et P_2 feront de même, et le point P_2 ne peut cesser de se trouver entre les points O et P_2 sans passer par une position, où les points P_2 et P_0 coincident. Cette position particulière ne peut se présenter, puisque les droites P_1P_0 et P_1P_2, devraient alors coincider. La droite P_1P_2 étant tangente à l'arc P_1OP_0 au point P_2 et la droite P_1P_0 étant tangente au point P_1, la droite $P_1P_0P_2$ serait une tangente double de l'arc P_1OP_0, singularité qui est exclu par les conditions à laquelle doit satifaire l'arc P_1OP_2 (voir § 4).

Supposons donc qu'on ait choisi sur la courbe C^n un point P_1 suffisamment voisin d'un point d'inflexion O pour obtenir un point tangentiel P_0, c'est à dire, supposons que l'arc P_1OP_0 satisfait aux conditions données au commencement de ce §. On détermine sur l'arc OP_0 un point P_2, ensuite sur l'arc OP_1 un point P_3 dont le point P_2 est un point tangentiel et ainsi de suite. On obtiendra une série de points $P_0, P_1, P_2, P_3 .. P_n ..$ etc., le point P_{2p} se trouvera toujours entre les points O et $P_{2(p-1)}$. Le point P_{2p} s'approche donc toujours du point O et doit donc avoir une limite, qui est le point O lui même ou un autre point. Je dis que le point d'inflexion O est cette limite. En effet, supposons qu'un point Q différent du point O serait cette limite et soit R le point de l'arc OP_1 situé sur la tangente au point Q. Le point Q étant la limite des points P_{2p}, la tangente au point R devrait rencontrer l'arc OP_0 un point Q. La droite RQ serait donc une bitangente de l'arc P_2OP_1. Par les conditions, auxquelles doit satisfaire l'arc P_1OP_0 la possibilité

de la présence d'une bitangente a été exclu, par conséquent, il n'existe pas de point limite Q different du point O. Le point O est donc bien la limite du point P_{2p}; de même pour le point P_{2p+1}. Le point O est donc la limite du point P_∞ cequi démontre le théorème (A) pour les points d'un arc d'une C^n, l'arc ne contenant d'autre singularité que le point d'inflexion O et ne possédant des tangentes perpendiculaires à la tangente d'inflexion.

§ 6. On peut généraliser les résultats précédants de la manière suivante. Supposons que l'origine des coordonnées soit un point simple de la courbe et que l'axe $y = 0$ y a avec la courbe un contact d'ordre 4. L'équation de la courbe sera:

$$0 = y(1 + a_{11}x + a_{02}y + \ldots a_{41}x^4) + a_{50}x^5 + \text{etc.} \ldots . \quad (1)$$

Soit $P_1(x_1, y_1)$ un point de la courbe (1) infiniment voisin de l'origine. On aura:

$$y_1 = -a_{50}x_1^5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

L'équation de la tangente au point $P_1(x_1, y_1)$ sera:

$$0 = x(5x_{50}x_1^4 + \text{etc.}) + y(1 + \text{etc.}) + (n-1)y_1 + (n-5)a_{50}x_1^5 + \text{etc.},$$

d'où en tenant compte de la relation (2) et négligeant les termes infinitésimaux d'ordre supérieur

$$y = 4a_{50}x_1^5 - 5a_{50}x_1^4x. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Éliminons y des équations (1) et (3), on obtiendra une équation en x, donnant les abscisses des points d'intersection de la courbe (1) avec sa tangente (3). On obtient

$$0 = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \text{etc.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

où

$$A_0 = +4a_{50}x_1^5 + \text{etc.},$$

$$A_1 = -5a_{50}x_1^4 + \text{etc.},$$

$$A_2 = -5a_{11}a_{50}x_1^4 + \text{etc.},$$

$$A_3 = -5a_{21}a_{50}x_1^4 + \text{etc.},$$

$$A_4 = -5a_{31}a_{50}x_1^4 + \text{etc.},$$

$$A_5 = +a_{50} + \text{etc.}$$

Des racines de l'équation (4) il y a donc 5 qui sont infiniment petites. Ces 5 racines sont les racines de l'équation

$$a_{30}x^5 - 5a_{30}x_1^4x + 4a_{30}x_1^5 = 0$$

ou

$$x^5 - 5x_1^4x + 4x_1^5 = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

ou

$$(x - x_1)^2(x^3 + 2x^2x_1 + 3xx_1^2 + 4x_1^3) = 0 \quad . \quad . \quad (6)$$

La racine double x_1 correspond au point de contact $P_1(x_1, y_1)$. L'équation (6) possède encore 2 racines imaginaires conjuguées et une racine réelle située entre $-x_1$ et $-2x_1$, ce qu'on vérifie immédiatement. La tangente (3) en P_1 rencontre donc la courbe (1) dans un point P_0 infiniment voisin de l'origine dont l'abscisse est $-(1+v)x_1$; v satisfaisant à la condition :

$$0 < v < 1.$$

La valeur de v étant indépendante de x_1 et des coefficients de l'équation (1) on retrouve pour la tangente singulière $y = 0$ le théorème (A) du § 1.

§ 7. L'origine des coordonnées étant un point simple de la courbe et l'axe des X y ayant avec la courbe un contact d'ordre n on trouve facilement que la tangente à la courbe au point $P_1(x_1, y_1)$, infiniment voisin de l'origine, rencontre la courbe en n points infiniment voisins de l'origine dont les abscisses sont les racines de l'équation

$$x^n - nx_1^{n-1}x + (n-1)x_1^n = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5').$$

Quant $n = 2p$ il manque dans l'équation (5') un nombre pair $(2p - 2)$ de termes consécutifs, par conséquent, $(2p - 2)$ racines s'annulent et les seules racines réelles sont les 2 racines x_1. Donc, en ce cas, il n'existe pas de point tangentiel réel infiniment voisin de l'origine, résultat facile à prévoir.

Quant $n = 2p + 1$, il manque dans l'équation (5') $(2p - 1)$ termes consécutifs entre deux termes de signe contraire et l'équation possède au moins $(2p - 2)$ racines imaginaires. En divisant par $(x - x_1)^2$ les deux membres de l'équation (5') on obtient l'équation

$$0 = x^{2p-1} + 2x_1x^{2p-2} + 3x_1^2x^{2p-3} + \ldots (2p-1)x_1^{2p-2}x + 2px_1^{2p-1} \quad (6').$$

Le second membre de cette équation étant positive pour $x = -x_1$ et négative pour $x = -2x_1$, l'équation (6'), donc

également l'équation (5'), possède une racine réelle de la forme

$$-(1+v)\,x_1\,,$$

où

$$0 < v < 1\,,$$

v étant indépendant de x_1 et des coefficients de la courbe.

On obtient donc les théorèmes:

1°. *Quant une courbe algébrique a au point simple O un contact d'ordre $2p$ avec une droite t la tangente à la courbe au point P_1 de la courbe infiniment voisin du point O, rencontre encore la courbe en un point P_0 infiniment voisin du point O.*

2°. *Le rapport des projections sur la tangente singulière t des distances OP_0 et OP_2 est* $-(1+v)$; $0 < v < 1$.

L'angle entre les droites OP_1 et t étant un infiniment petit d'ordre supérieur on peut remplacer la projection de la droite OP_1 sur la droite t par la droite OP_1 même. De même pour la droite OP_0, donc:

3°. *Les points P_0 et P_1 se trouvent de part et d'autre du point O tandis que*

$$OP_0 : OP_1 = 1 + v.$$

4°. *Parmi les points de contact des tangentes menées du point P_0 à la courbe, il y a un (le point P_1), qui se trouve plus approché du point O que le point P_1. De même, un des points de contact des tangentes menées à la courbe du point P_1, est un point P_2, qui se trouve plus approché du point O que le point P_1. En déterminant de la sorte sur la courbe une série de points P_0, P_1, $P_2 \ldots P_m \ldots$ etc., la limite du point P_m sera le point de contact O de la tangente singulière t.*

Décembre 1905.

I 11 a α

A MODIFICATION OF THE GAME OF NIM,

BY

W. A. WYTHOFF.

(Amsterdam)

1. The following arithmetical game is a modification of the game of „nim", described by C. L. BOUTON in the *Annals of Mathematics*, 2nd series, vol. 3, p. 35 – 39.

The game is played by two persons. Two piles of counters are placed on a table, the number of each pile being arbitrary. The players play alternately and either take from one of the piles an arbitrary number of counters or from both piles an *equal* number. The player who takes up the last counter or counters, wins.

2. In accordance with C. L. BOUTON I shall call a *safe combination* such a combination of two numbers as can be left safely on the table by one of the players, knowing that, if he do not make any mistake later on, the other player cannot win.

3. It is obvious, that the system of safe combinations has to satisfy the following conditions:

1°. that from a safe combination no other can be made by a move in accordance with the game-rules;

2°. that from every combination obtained from a safe combination by a move according to the game-rules, another safe combination can be made by the next move;

3°. that 0,0 is a safe combination.

4. The first condition consists of the following two:

that two safe combinations cannot have a number in common;

that the two numbers cannot have the same difference in two different safe combinations.

For the second the following more general condition may be substituted:

that from every combination not belonging to the set of safe combinations a safe combination can be obtained by a move according to the game-rules.

5. A set of combinations satisfying all these conditions is the following.

The first combination is 0,0. Of each following combination the smallest number is equal to the smallest number not occurring in one of the former combinations, while the difference of the numbers is greater by one than that of the preceding combination.

We thus find the following combinations:

0	0	9	15	19	31
1	2	11	18	21	34
3	5	12	20	22	36
4	7	14	23	24	39
6	10	16	26	etc.	
8	13	17	28		

That these combinations really satisfy all the conditions, is easily shown.

Hence they are the safe combinations.

6. If $E(x)$ denote the greatest integer not greater than x, then the combination

$$E\{\tfrac{1}{2}k(1+\sqrt{5})\} \quad , \quad E\{\tfrac{1}{2}k(3+\sqrt{5})\},$$

k being zero or a positive integer, is a safe combination, and we find all the safe combinations by successively substituting $k = 0, 1, 2$, etc.

This theorem is proved as follows.

Since the difference of the two numbers $E\{\tfrac{1}{2}k(1+\sqrt{5})\}$ and $E\{\tfrac{1}{2}k(3+\sqrt{5})\}$ is k, it is evident, that by substituting $k=0$, $1, 2$, etc. we obtain the series of differences of the combinations of numbers written down in § 5.

Hence it will be sufficient to prove, that this substitution produces once and not more than once any arbitrarily chosen positive integer.

Let n denote such an integer.

Let α and β be the smallest quantities which must be added to n to obtain multiples of $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ and of $\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$ respectively.

We then have

$$\alpha = \tfrac{1}{2}p(1+\sqrt{5}) - n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1),$$

$$\beta = \tfrac{1}{2}q(3+\sqrt{5}) - n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2),$$

p and q being integers, and

$$0 < \alpha < \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3),$$

$$0 < \beta < \tfrac{1}{2}(3+\sqrt{5}) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4).$$

Multiplying (1) by $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ and (2) by $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ and adding we find

$$\tfrac{1}{2}\alpha(-1+\sqrt{5}) + \tfrac{1}{2}\beta(3-\sqrt{5}) = p+q-n = \text{an integer.}$$

Multiplying (3) by $\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})$ and (4) by $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})$ and adding we find

$$0 < \tfrac{1}{2}\alpha(-1+\sqrt{5}) + \tfrac{1}{2}\beta(3-\sqrt{5}) < 2.$$

Hence the integer $p+q-n$ can be no other than unity, and we have

$$\tfrac{1}{2}\alpha(-1+\sqrt{5}) + \tfrac{1}{2}\beta(3-\sqrt{5}) = 1.$$

This equation is satisfied by $\alpha = \beta = 1$; but this solution has to be rejected, as the integer $n+1$ cannot be a multiple of $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ or of $\frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$. Rejecting this solution we easily see, that one of the quantities α and β must be smaller and the other greater than unity.

It is evident, that, if $\alpha < 1$ and $\beta > 1$, we have $n = \mathrm{E}\{\frac{1}{2}p(1+\sqrt{5})\}$, and reversely, if $\alpha > 1$ and $\beta < 1$, $n = \mathrm{E}\{\frac{1}{2}q(3+\sqrt{5})\}$, and that n cannot be written in the form $\mathrm{E}\{\frac{1}{2}k(3+\sqrt{5})\}$ in the former, nor in the form $\mathrm{E}\{\frac{1}{2}k(1+\sqrt{5})\}$ in the latter case.

7. The following combinations of E-functions have properties similar to those of the combination considered in § 6:

$$\mathrm{E}(k\sqrt{2}) \text{ and } \mathrm{E}\{k(2+\sqrt{2})\};$$

$$\mathrm{E}\{\tfrac{1}{2}k(-1+\sqrt{13})\} \text{ and } \mathrm{E}\{\tfrac{1}{2}k(5+\sqrt{13})\}; \text{ etc.}$$

in general

$E\{\frac{1}{2}k(-a+2+\sqrt{a^2+4})\}$ and $E\{\frac{1}{2}k(a+2+\sqrt{a^2+4})\}$, a being a positive integer.

In all these combinations the substitution $k=1, 2, \ldots$ produces once and not more than once each positive integer. The series of differences however are $2, 4, 6, \ldots$; $3, 6, 9, \ldots$; in general a, $2a$, $3a, \ldots$

By their aid modified nim-games with suitably chosen game-rules might be constituted.

A still more general combination is the following:

$$E\left\{2-\frac{a}{2b}(b+2-\sqrt{b^2+4})+\frac{1}{2}k(-b+2+\sqrt{b^2+4})\right\}$$

and

$$E\left\{2+\frac{a}{2b}(b-2+\sqrt{b^2+4})+\frac{1}{2}k(b+2+\sqrt{b^2+4})\right\},$$

a and b being positive integers satisfying the condition $b \geqq a-1$.

In this combination the substitution $k=0, 1, 2 \ldots.$ produces once and not more than once each positive integer; the successive differences form the arithmetical series a, $a+b$, $a+2b$, ...

The proof of these properties may be left to the reader.

BIBLIOGRAPHIE.

Mehrdimensionale Geometrie von Dr. P. H. SCHOUTE, Professor an der Universität zu Groningen. Zweiter Teil. Die Polytope. Preis 10 Mk. Sammlung Schubert XXXVI, Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung.

In een vorig deel van dit tijdschrift [1]) gaven we een overzicht van Prof. Schoute's belangrijk werk. De lezer herinnert zich misschien, dat daarin de indeeling der meetkunde werd vastgesteld voor de ruimte R_n en wel volgens de beginselen, die bij de meetkunde met twee en drie afmetingen proefhoudend zijn gebleken. Daaruit vloeiden dan de bewerkingen, stellingen en constructien voort, die kenmerkend zijn voor elk onderdeel.

Bij den eersten oogopslag schijnt de stof voor het tweede deel beperkter, omdat deze door een enkelen naam wordt aangeduid: „de Polytopen." Zij schijnt zich ook beter te leenen tot aanschouwelijke voorstellingen, waartoe de vele hierbij voorkomende figuren medehelpen; zelfs zou men geneigd zijn het besluit te trekken, dat dit deel der meetkunde van meer afmetingen het meest geschikt is om aan oningewijden de beteekenis van dezen tak der wetenschap duidelijk te maken. Maar bij nadere kennismaking met het werk, bemerkt men hoe dit deel, niet minder dan het eerste, voorzichtige en streng wetenschappelijke behandeling eischt; en bij deze behandeling moet de schrijver hebben gevoeld, hoe in zijne handen de stof zich gestadig uitzette; waarom het ook verklaarbaar is, dat hij met moeite en door toepassing van besnoeiing er in slaagde, het geheel binnen de voorgeschreven grens van een deel der „Sammlung Schubert" samen te persen. En de reden ligt voor de hand. Wil men, bij dit onderwerp, den grond niet onder zijne voeten voelen wegzinken, dan is men genoodzaakt eene algeheele uitbreiding te geven aan de leer der veelhoeken en veelvlakken; want de kennis, die men daarvan bij den lezer mag onderstellen, is niet voldoende om hem den weg te wijzen in de ruimte van meer dan drie afmetingen. En zoo

---

[1]) *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 2e Reeks VI, bl. 68.

is dit deel geworden, hetgeen het moest worden om volledig te zijn: een stelselmatig geordende meetkunde, onafhankelijk van het aantal afmetingen, waarin de lezer eene menigte waarheden en stellingen zal vinden, die in planimetrie of stereometrie te huis behooren, maar waarvan eerst de meetkunde met meer afmetingen de ware beteekenis in het licht stelde.

We hebben getracht den geest te kenschetsen, waarin dit deel is geschreven; we zullen nu een overzicht geven van den inhoud en op enkele plaatsen eenige hoofdstellingen aanhalen; de rijke stof dwingt tot kortheid en het is niet mogelijk in te veel bijzonderheden te treden. De eerste afdeeling bevat de algemeene stellingen en bepalingen, de plaats, die aan de beginselen moet worden toegekend, alzoo de topologie. Voorop staat de bepaling van het polytoop, een begrensd deel der ruimte R_n; dadelijk daarop volgend die van het simplex; S (3) in het platte vlak, door drie punten bepaald; S (4) in de ruimte; S $(n+1)$ in R_n. Daarna kan de behandeling volgen van de meetkundige eigenschappen, die verder dienst zullen doen; waarbij de doorsneden, het vlakke beeld, de configuratiën ter sprake komen en men alzoo tot eene indeeling komt. De stelling van Euler wordt eindelijk het onderwerp eener grondige beschouwing.

Een volgend deel behandelt de congruentie, de gelijkvormigheid en de inhouden. In dit gedeelte, in volgorde zich aansluitende aan de stereometrie, zien we met belangstelling de daaruit bekende stellingen een meer algemeenen vorm aannemen. Als voorbeelden halen we eene hoofdstelling uit elk der onderdeelen aan.

„Het simplex S $(n+1)$ van R_n is door $(n+1)_2$ van elkander onafhankelijke grootheden bepaald."

„Twee simplexen S $(n+1)$ en S′ $(n+1)$ zijn congruent, wanneer voor beide hetzelfde ondubbelzinnig bepalend stelsel is gegeven, en dit bij de constructie van beide simplexen op dezelfde wijze is toegepast."

„Gebruikt men een ondubbelzinnig bepalend stelsel van een gegeven simplex S $(n+1)$ ter constructie van een tweede, nadat men alle in dit stelsel bevatte lengten in dezelfde reden heeft vergroot of verkleind, zoo verkrijgt men een simplex S′ $(n+1)$ gelijkvormig met S $(n+1)$."

„Men verkrijgt den inhoud der loodrechte projectie van een deel T van eene ruimte R_p op eene andere ruimte R_q $(q \gtreqless p)$, die kruisend ligt ten opzichte van R_p of met R_p eene ruimte

R_r ($r \gtreqless p$) gemeen heeft, wanneer men den inhoud van T vermenigvuldigt met het product van de cosinussen der p of $p - r$ hoeken tusschen R_p en R_q."

De schrijver gaat nu over tot de regelmatige polytopen, een onderwerp, dat tot de verbeelding spreekt door den fraaien vorm der daarbij voorkomende figuren. Getrouw aan de tot nu toe gevolgde methode, doorloopt hij de regelmatige veelhoeken, daarbij de sterveelhoeken en de halfregelmatige veelhoeken opnemende, en beschouwt hij bij de regelmatige lichamen ook de stervormige en halfregelmatige, benevens de kristalvormen, om dan over te gaan tot de regelmatige cellen, den 5-cel, 8-cel, 16-cel, 24-cel, benevens de moeilijker vormen van 600-cel en 120-cel; waarbij de beschouwing van doorsneden en projectiën, gegrondvest op die der gewone regelmatige lichamen de voorstelling te hulp moet komen. Een hoofdstuk over regelmatige polytopen van hoogere afmetingen besluit deze paragraaf.

De lezer gevoelt, dat hij hier aan eene grens is gekomen, de grens der lineaire ruimten en dat, zoo hij verder wil gaan, hij naar de niet lineaire ruimten wordt gevoerd. De schrijver beschouwde zijn werk niet als voleindigd, voor hij ook bij de eerste stappen op dit gebied was voorgegaan. Volgt dus de behandeling der bolruimten, kegel- en cylinderruimten, ten slotte de omwentelingsruimten. Zij moest zich bepalen tot de eenvoudigste eigenschappen, en in dit overzicht beperken we ons tot enkele bepalingen.

Bolruimte. „Meetkundige plaats der punten van R_n, die van een gegeven punt O dezer ruimte een gegeven afstand hebben."

Kegel- en *cylinderruimte.* „Eene pyramide van de orde s en de afmeting $k + s$ wordt tot kegelruimte van de orde s en de afmeting $k + s$, zoodra de basis niet uitsluitend wordt begrensd door lineaire ruimten R_k. Overeenkomstige stelling voor de cylinderruimte, van het prisma uitgaande."

Omwentelingsruimte. „In R_n zijn twee ruimten gegeven, eene assenruimte R_a van a, en eene bewegende ruimte R_b van b afmetingen. Men denke zich R_b om R_a draaiende."

Aan het einde gekomen van dit overzicht, merken we nog op, dat de behandeling, trots de veelomvattendheid der stof, elementair is. De schrijver blijft euklidisch en maakt alleen bij de inhouden en oppervlakken van de beginselen der differentiaal- en integraalrekening gebruik. Een groot aantal vraagstukken biedt stof tot oefening en herhaling.

We willen evenwel geen afscheid nemen van dit werk, zonder

den schrijver geluk te hebben gewenscht met zijn volbrachten arbeid. Wat ons treft is niet alleen de uitgebreide voorstudie, die er voor noodig was, eene voorstudie, verbonden met oorspronkelijke onderzoekingen; niet alleen de duidelijkheid en zorgvuldigheid, waarmede alles in vorm is gebracht. Waar de bouwstoffen zoo verstrooid lagen, waar er zooveel was, dat alleen in tijdschriften, verhandelingen en speciale studiewerken kon worden opgespoord; waar die overweldigende hoeveelheid te ordenen en te schiften was; waar, ter verkrijging van een sluitend geheel, leemten moesten aangevuld worden; daar moest alle geesteskracht worden ingespannen om het doel te bereiken. En zoo iemand door dit overzicht zich aangespoord gevoelt, het werk ter hand te nemen, dan zal hij voorzeker met dien gelukwensch instemmen. J. C.

Stereometrische hoofdstukken ter uitbreiding van de elementaire leerboeken door Corneille L. Landré. Tweede verbeterde en vermeerderde druk. Utrecht, Gebr. van der Post, 1905. In 8°, 326 blz., 79 houtsneefiguren in den tekst.

Zooals uit het voorbericht blijkt, is deze tweede uitgave nog geheel door den in Februari 1905 overleden schrijver in gereedheid gebracht. Evenmin als de eerste druk bevat zij een aaneengeschakelden cursus der stereometrie, maar een aantal min of meer op zich zelf staande hoofdstukken. De aard van dit boek, dat we in veler handen wenschen, vooral van docenten en hen, die een examen Ki wenschen af te leggen, wordt het best gekend uit een korte opsomming van den inhoud.

Het eerste hoofdstuk bevat een aantal eigenschappen van het viervlak en eenige bijzondere viervlakken. In het tweede en derde wordt uitvoerig gehandeld over de wet van Euler en de convexe lichamen (daaronder de regelmatige). Het vierde bevat de meest algemeene inhoudsformule. Hier wordt de prismoïde uitvoerig besproken: men vindt daar o. a. inhoudsformules, waarin de gebruikelijke middelsnede vervangen is door een doorsnede op willekeurige hoogte.

De volgende drie hoofdstukken behandelen doorboorde lichamen, stervormige veelhoeken en stervormige lichamen (daaronder de vier regelmatige). Het achtste en laatste hoofdstuk, dat nagenoeg een derde deel van het boek inneemt, is gewijd aan de meetkunde van het zwaartepunt (punt van gemiddelden afstand. V.

Œuvres de Charles Hermite, publiées sous les auspices de l' Académie des Sciences, par Émile Picard, Tome I, 8°, 496 p. Paris, Gauthier-Villars, 1905.

Dit eerste deel der verzamelde geschriften van Hermite bevat een veertigtal stukken uit de eerste jaren van zijne werkzaamheid. Wij vinden er getallenleer, elliptische functies en algebra in. Voor de getallenleer zijn de brieven aan Jacobi merkwaardig; er zitten ideeën in bij bosjes, zooals Picard zegt, maar zij zijn zwaar om te lezen. Dit gaat beter met de verhandeling over het gebruik van doorloopende veranderlijken, die in *Crelle* 41 verscheen; daar geeft Hermite zich beter, terwijl hij in zijne brieven schroomt om Jacobi te vervelen met uitlegging van dingen, welke deze ondersteld werd van zelf te weten. Wat men hier van elliptische functies vindt, sluit zich eng bij den arbeid van Jacobi aan. Over algebra staat veel belangrijks in dit boek; de invariantentheorie vertoont zich hier in haar opkomst; men ziet haar groeien en bloeien.

Maar wat veel meer belangwekkend is in dit boek, is de ontwikkeling van een wiskundig genie, die hier is waar te nemen. In dit opzicht gevoelen wij ons allereerst gedrongen tot een woord van eerbiedige hulde aan de nagedachtenis der professoren, die zestig jaar geleden te Parijs leefden. Die mannen, ambtshalve geroepen om uitbottende genietjes in te deuken, opdat er bruikbare menschen voor de maatschappij overblijven, hebben wel hun hart vast gehouden toen zij den jongen Charles zagen werken „si loin des programmes d'examen", maar zij hebben ingezien, dat Hermite niet naar den alledaagschen regel mocht worden behandeld: zij hebben zich weten te weerhouden om de vonk van zijn genie uit te dooven door den killen adem van dictaten en compendia; zij hebben hem den weg gewezen naar betere dingen. Hermite voedde zijn geest met de lectuur van Lagrange en Gauss. Zoo zien wij het mirakel gebeuren, dat hij op negentienjarigen leeftijd de wiskundige tijdschriften kon lezen. Hermite vond dadelijk zijn weg. Slechts een enkele bladzijde met zijn eerste schrijfproef behoort niet in zijn eigenlijk werk; maar daarna heeft hij voorgoed begrepen, dat het zijn taak niet was om proefondervindelijk te bewijzen, dat eene meetkundige plaats door eene vergelijking tusschen x en y kan worden voorgesteld. Spoedig werkte hij zich op naar het voorste gelid.

Als wij zeggen, dat Hermite de wiskundige tijdschriften kon lezen, dan moeten wij echter een voorbehoud maken: hij was

een Franschman. Jacobi schreef Latijn, dat kon Hermite lezen. Maar vele andere lectuur, die hem van uit Berlijn werd aanbevolen, bleef voor hem verborgen. Een enkele maal mocht Borchardt voor hem eene verhandeling vertalen, dat ging als regel niet op. Mij komt het voor, dat deze omstandigheid voor een geest als Hermite gunstig was. Hij kon nu instemmen met dien wiskundigen-psalm, dien ik eens ergens las: Beatus ille qui, procul libris, nihil legit: omnia inveniet. De verwonderlijke eenheid in de denkbeelden, welke Hermite in geschriften over verschillende onderwerpen vertoont, zoude, dunkt mij, zich niet zoo goed hebben kunnen handhaven, als zijn aandacht door meer lectuur zooveel meer gevaar van vervloeien had geloopen. Nu zien wij telkens de geassocieërde quadratische vorm opduiken, en bewonderen wij de kracht, waarmee hij dat werktuig drijft.

Mannen als Hermite heeft de menschheid er weinige noodig. Lezers van zijne werken mochten er meer zijn. Wij besluiten deze regelen met eene opwekking aan de medeleden van ons Genootschap om zulke boeken als dit ter hand te nemen. De nood dringt ons in ons dagelijksch werk zoo licht naar beneden, dat wij gevaar loopen alle voeling met het verhevene te verliezen. Wat God verhoede! M.

Zur Klarstellung der Begriffe Masse, Gewicht, Schwere und Kraft von OLOF LINDERS, Leipzig, Jäh & Schunke, 1905, 8°, 22 blz.

Volgens den schrijver zijn de begrippen *gewicht* en *massa* als identiek te beschouwen. Als eenheid van gewicht (en massa) stelt hij voor het gewicht (de maat voor de hoeveelheid stof) van het Parijzer standaardkilogram. Als eenheid van *kracht*, in overeenstemming met een voorstel van het bestuur van den Verein deutscher Ingenieure: de *zwaarte* van het bovengenoemde standaardkilogram in het luchtledige te Parijs ($g = 980.665$ cm/sec^2). Voor de op verschillende plaatsen constante verhouding tusschen de zwaarte van een lichaam en de versnelling van de zwaartekracht (overeenkomend met de massa in het *cgs*-stelsel) wordt voorgesteld de naam: *Schwerkonstante* van het lichaam. Verder wordt voor de techniek de decimeter aangewezen als de meest geschikte eenheid van lengte. Men komt zoo tot een decimeter-kilogram-secunde-stelsel. Daarin is het kilogram zoowel eenheid van gewicht (massa) als van kracht (te onderscheiden als gewichtskilogr. en krachtkilogr.)

Het verband tusschen kracht (F) en versnelling (a) wordt dan uitgedrukt door $F = a \frac{G}{g_P}$, als G het gewicht en g_P de zwaartekrachtsversnelling te Parijs voorstelt.

Het komt den berichtgever voor dat het gebruik der woorden „gewicht" en „zwaarte" in den door den schrijver aangegeven zin wel aan te bevelen is. Overigens schijnt het hem toe, dat het bezwaar dat sommige eenheden van het *cgs*-stelsel voor de techniek te klein zijn, beter kan worden ondervangen, door voor de techniek aan te nemen eenheden die uit de *cgs*-eenheden zijn afgeleid door deze met eene macht van 10 te vermenigvuldigen. W. H. K.

Thermodynamique. II. Introduction à l'étude des Machines thermiqeus par M. L. Marchis. Grenoble, A. Gratier et J. Rey; Paris, Gauthier-Villars, 1905, 8°, 255 blz.

Dit werk, behoorende tot de „Bibliothèque de l' Elève Ingénieur" (zie *Nieuw Archief* (2) 6 (1904) p. 292), geeft de toepassingen der in het eerste deel behandelde algemeene thermodynamische stellingen op de eigenschappen van gassen en verzadigde dampen. In het bijzonder worden vraagstukken behandeld, die onmiddellijke toepassing vinden in de theorie der stoomwerktuigen en der verbrandingsmotoren. Het geheel is, behoudens enkele onvolkomenheden, duidelijk geschreven en tot inleiding in dit gebied zeer geschikt. W. H. K.

Mathematisch-Technische Kapitel zur Lebensversicherung, von Corneille L. Landré. Dritte verbesserte und vermehrte Auflage. Jena, Gustav Fischer, 1905, 8°, 504 blz.

Van dit hoofdwerk van den betreurden vroegeren Voorzitter van het Wiskundig Genootschap is thans de derde druk verschenen, zooals in de levensbeschrijving des schrijvers is medegedeeld, nog geheel door hem zelven herzien. Wel is waar valt dit boek niet binnen den kring der zuiver wiskundige wetenschap, maar toch zal eene korte bespreking hier ter plaatse niet ongepast worden geacht.

Hoewel deze derde druk niet zoo sterk verschilt van den tweeden, als deze laatste van de oorspronkelijke nederlandsche en de eerste duitsche uitgave, is toch de omvang van het boek weder niet onbelangrijk toegenomen. Met de nauwgezetheid

die den schrijver eigen was, heeft hij ook thans weder zijn werk aangevuld met alles wat zich heeft voorgedaan in den tijd tusschen de beide drukken gelegen. De vruchten van het Congres te New-York in 1903 gehouden, van de verschillende tijdschriften op actuarieel gebied en van eigen studie zijn aan den nieuwen druk ten goede gekomen.

Met recht mag dit boek als een standaardwerk op zijn gebied worden beschouwd. Nauwelijks eenig punt, behoorende tot de wiskundige theorie of tot de praktijk der levensverzekering zal men kunnen vinden, dat niet met uitvoerigheid is behandeld, met opgave van de plaatsen waar de oorspronkelijke geschriften te vinden zijn. Zonder schroom is daarbij gebruik gemaakt van hoogere wiskunde, maar toch steeds zoo, dat zij die daarmede niet vertrouwd zijn, de daarop betrekking hebbende gedeelten kunnen overslaan en in het overige een zeer uitvoerig en volledig handboek bezitten.

De beide eerste hoofdstukken behandelen renterekening en annuiteitenleer; hoofdstuk 3 is gewijd aan levens- en sterftekansen, sterftetafels en hare afronding, de formules van Gompertz, Makeham en anderen; de hoofdstukken 4—7 leeren de berekening van premiën voor nagenoeg alle voorkomende vormen van verzekering, terwijl in hoofdstuk 8 over de bepaling van brutopremiën en in hoofdstuk 9 over de premiebetaling in termijnen wordt gehandeld. Hoofdstuk 10, over premiereserve, bevat eene zeer uitvoerige verhandeling over de verschillende systemen, welke bij de bepaling der reserve eener levensverzekering-maatschappij kunnen worden gevolgd, zeker een dier onderwerpen, waarover de gevoelens zeer uiteenloopen. Ook aan de uiteenzetting van de vele wijzen waarop, bij eenzelfde aangenomen systeem, de reserve kan worden berekend en de methoden ter vergemakkelijking daarvan, is veel zorg besteed. Hoofdstuk 11 behandelt afkoop, vrije polis, verandering van premiebetaling, wijziging der verzekering enz., terwijl in hoofdstuk 12 allerlei meer bizondere punten als maximum-risico, minimum aantal verzekerden, invloed van verandering van den rentestandaard, herverzekering, winst en verlies door verschillende oorzaken, winstverdeeling enz. besproken worden. De beide laatste hoofdstukken 13 en 14 zijn in hoofdzaak gewijd aan de behandeling van de theorie der continue lijfrenten en der premiën beschouwd als analytische functies van de grootheden waarvan zij afhangen.

Geheel consequent wordt de notatie gebruikt, die thans als de internationale is vastgesteld door de commissie uit het

Comité Permanent des Congrès internationaux d' Actuaires en die in hoofdzaak gegrond is op die welke door het Institute of Actuaries was aangenomen.

Met een enkel woord zij nog vermeld, dat de korrektie van dezen druk met groote toewijding is geschied door des schrijvers dochter Mej. H. F. Landré en dat het boek prijkt met een uitstekend portret van den overledene. M. C. P.

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes publiée par les soins de B. Baillaud et de H. Bourget. Avec une préface de Émile Picard. T. II. (18 Octobre 1889—15 Décembre 1894). Paris, Gauthier-Villars, 1905, 8°, 457 blz.

Met dit deel is de uitgave van de briefwisseling tusschen Hermite en Stieltjes voltooid. Niet minder dan uit de voorafgaande brieven blijkt hoe hecht de vriendschap was, die beide geleerden aan elkaar verbond, en hoeveel prijs zij wederkeerig stelden op hunnen wetenschappelijken omgang. Als beoefenaars der wiskunde kwamen zij in hunne neigingen geheel overeen. Beide gevoelden zich steeds aangetrokken door de moeielijkste vraagstukken der analyse. Voor de meetkunde in engeren zin waren zij onverschillig. In zijn brief van 8 Mei 1890 beklaagt Hermite zich, dat hij als examinator veroordeeld is „pour comprendre quelque chose aux épures de la géométrie descriptive, que je déteste, . . ." en schrijft hij verder „Combien sont heureux ceux qui peuvent ne songer qu'à l' Analyse", welke opmerkingen door Stieltjes in zijn brief van 10 Mei met de zinsnede: „Je partage votre aversion pour la géométrie descriptive" worden beantwoord. In de eerste brieven wordt gehandeld over kettingbreukontwikkelingen, terwijl in de antwoorden van Hermite al spoedig de bolfuncties (veeltermen van Legendre) worden aangeroerd. Over deze functies gaat de briefwisseling langen tijd voort. Allerlei eigenschappen, integraalvoorstellingen, de asymptotische waarde enz. worden achtereenvolgens behandeld. Inzonderheid houdt Stieltjes zich bezig met de toegevoegde functie $Q_n(x)$ en de verspreiding van de nulpunten dezer functie. Weldra breidt hij de definitie der veeltermen van Legendre uit, en onderzoekt hij de eigenschappen dezer meer algemeene functies. Meer en meer komen bij zijne onderzoekingen de kettingbreukontwikkelingen op den voorgrond. In verschillende gevallen wijst hij op de mogelijkheid, om eene reeks met een beperkt convergentiegebied door eene kettingbreuk met eene ruimere convergentie, of ook om eene divergente

asymptotische reeks door eene convergente kettingbreuk te vervangen. Hoewel Hermite door kleinere mededeelingen en opmerkingen van allerlei aard Stieltjes noopt, om ook over andere onderwerpen zich te uiten, blijven de kettingbreuken op den voorgrond, en ziet men min of meer de „Mémoire sur les fractions continues" ontstaan. Tegelijk blijkt ook uit de correspondentie, dat de gezondheidstoestand van den nog zoo jeugdigen geleerde langzamerhand vermindert en de bezorgdheid zijner vrienden opwekt. Zijn einde zou spoedig nabij zijn. Mogen wij, zijne landgenooten, hem met eerbied blijven gedenken.

Als aanhangsel zijn aan de correspondentie toegevoegd eenige brieven van Stieltjes aan Mittag-Leffler over de ζ-functie van Riemann, die dagteekenen uit het korte tijdperk, gedurende hetwelk hij zich met de studie der ondeelbare getallen bezig hield, en een paar bladzijden van zijn handschrift. Kl.

Annuaire pour l' an 1906, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars, 712 blz.

Evenals in het jaarboek voor 1904 zijn thans weder opgenomen uitvoerige opgaven betreffende de physica en de chemie, terwijl statistische en geographische gegevens zijn weggelaten. Wat de afdeelingen sterrekunde, natuurkunde en scheikunde betreft, zijn er vergeleken met vorige jaarboeken weder nieuwe tafels ingelascht. Zoo vindt men thans b.v. eene tafel aangaande het draaiingsvermogen van verschillende stoffen, en eene tafel, die thermochemische gegevens bevat. Als aanhangsels zijn geplaatst, ten eerste eene verhandeling van den heer G. Bigourdan, getiteld: Les éclipses de soleil. Instructions sommaires sur les observations que l' on peut faire pendant ces éclipses, benevens twee kortere mededeelingen, één van denzelfden schrijver, de tweede van den heer J. Janssen, over de zonsverduistering van 30 Augustus 1905.

Eene aanbeveling van dit voor menigeen onmisbare jaarboek kan overbodig worden geacht. Kl.

Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung, als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt von Dr. Robert Fricke. Vierte Auflage. Braunschweig, Friedrich Vieweg und Sohn, 1905, 8°, 214 blz.

Volgens de mededeelingen van den schrijver onderscheidt deze vierde druk zich van den vorigen in hoofdzaak door stilistische

wijzigingen, en zijn er slechts een paar veranderingen van meer belang aangebracht. Het doel met dit werkje beoogd is onveranderd gebleven. Een in elk opzicht volledig leerboek is het niet. Steeds in de aanschouwing zijn uitgangspunt nemende, behandelt de schrijver de eerste grondbeginselen der infinitesimaal-rekening, voor zoover de studenten eener technische hoogeschool zich daarmede vertrouwd hebben te maken. Als leiddraad bij de beoefening der theorie verdient dit boekje allezins aanbeveling. KL.

Analytische Meetkunde van de kegelsneden en de oppervlakken van den tweeden graad door Dr. G. SCHOUTEN, Hoogleeraar aan de Technische Hoogeschool. Derde herziene druk. Een deel in 8°, 315 blz., 82 fig. in den tekst. In linnen band, prijs / 5,50. Delft, J. Waltman Jr., 1905.

De derde druk van bovenstaand leerboek, die de rij der wiskundige leerboeken van de technische hoogeschool waardig opent, is naar onze meening een welgeslaagde uiting van het beginsel, dat zich bij het wiskundig onderwijs aan den aanstaanden ingenieur steeds meer op den voorgrond dringt: bij groote beperking van theoretische beschouwingen op duidelijke wijs in beknopten vorm alleen te geven wat noodzakelijk is.

Gedachtig aan het dichterlijk woord: „Och waarschuw niet, maar grijp mij aan" plaatst de schrijver zich onmiddellijk midden in zijn onderwerp door de meetkundige afleiding der kegelsneden als doorsnee van omwentelingskegel en -cylinder met een plat vlak (methode Dandelin) voorop te stellen. Dit verschaft hem tevens het groote voordeel bij de nu volgende analytische behandeling van rechte lijn en cirkel naast willekeurig gekozen vraagstukken toepassingen op raaklijn en normaal, op pool en poollijn, op den orthoptischen cirkel der kegelsneden te kunnen geven. Daarmee is de behandeling van de algemeene vergelijking van den tweeden graad voldoende voorbereid en levert deze op de bekende wijs de drie kegelsneden met haar hoofdeigenschappen. Op een hoofdstuk gewijd aan de bepalende elementen der verschillende kegelsneden volgen eenige beschouwingen omtrent de voorwaarden, waaraan men een kegelsnee onderwerpen kan, en omtrent bundels en netten van kegelsneden. In het laatste hoofdstuk van de theorie der kegelsneden komt de schrijver dan tot de bijzondere vormen, die de vergelijking aannemen kan, om daarna tot zijn punt van uitgang, de theorie van brandpunten en richtlijnen, terug te keeren.

In het tweede gedeelte is de gewone volgorde hersteld. Op een drietal hoofdstukken, dat zich tot rechte lijn en platte vlak bepaalt, volgen vijf hoofdstukken aan de theorie der kwadratische oppervlakken gewijd. Daarvan bevat het eerste een grondige behandeling van de algemeene vergelijking met een door duidelijke figuren toegelichte onderscheiding der bekende vijf gevallen, het tweede de herleiding op het rechthoekig assenkruis met behulp van de derdemachtsvergelijking in S, het derde de bijzondere meetkundige eigenschappen van enkele oppervlakken en den aard hunner vlakke doorsneden met de ontaardingen van deze in twee rechte lijnen, het vierde de aan een kwadratisch oppervlak op te leggen voorwaarden en de bundels en netten dier oppervlakken, en het laatste de in verband met de S-vergelijking optredende invarianten.

De uitvoering van het leerboek laat weinig te wenschen over; we hopen en verwachten, dat het zich in een goed debiet zal mogen verheugen. S.

C. Guichard. Sur les systèmes triplement indéterminés et sur les systèmes triple-orthogonaux. Recueil „Scientia", série phys. math. fascicule n°. 25. Paris, Gauthier-Villars, 1905, klein 8°, 95 blz.

Bijdrage tot de studie der drievoudig orthogonale stelsels in de ruimte van n afmetingen. Aanwijzing eener reeks van gevallen, in welke nieuwe drievoudig orthogonale stelsels optreden en van de verschillende transformaties, welke zich daarbij voordoen. Bizonder onderzoek van een paar dezer gevallen. Z.

ERRATUM.

Op blz. 389 van Deel VI, tweede reeks, is regel 4 v. o. het woord „gauches" weggevallen. De medaille Guccia zal in de eerste plaats worden toegekend aan

> **un mémoire qui fera faire un progrès essentiel à la théorie des courbes gauches algébriques.**



NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

TWEEDE REEKS
DEEL VII
DERDE STUK

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1906

Hierbij moet niet uit het oog worden verloren, dat de differentiaal- en integraalrekening nog niet was uitgevonden; eerst tegen het eind van zijn leven werd hij hiermede door de mededeelingen van LEIBNIZ bekend, en zelfs toen nog weigerde hij de nieuwe methode toe te passen, omdat hij daaraan bij zijn onderzoekingen nimmer de behoefte had gevoeld.

Ik zal de vraagstukken meedeelen, zooals zij aan of door HUYGENS werden gesteld, zoo noodig met de door hem gegeven oplossingen. Deze heb ik alle geverifiëerd en nauwkeurig bevonden, zoodat men nooit te vergeefs naar het bewijs behoeft te zoeken. Volgens de gewoonte dier dagen ontbreekt dit bewijs nog al eens; men liet het elkander over, om de juistheid der oplossing of constructie aan te toonen.

Verder herinner ik er aan, hoe in dien tijd de eigenschappen der hoogere krommen onder de wiskundigen aan de orde van den dag waren; nog steeds zocht men de constructie van de drie beroemde vraagstukken uit de oudheid: de verdubbeling van den cubus of het zoeken van twee midden-evenredigen tusschen twee gegeven lijnen, de trisectie van een willekeurigen hoek, de quadratuur van den cirkel. Verscheidene der vraagstukken staan hiermede in verband; verder het construeeren van de wortels eener hoogere machtsvergelijking, vooral van die der derde en vierde macht door snijding van kegelsneden.

Eindelijk moet nog worden opgemerkt, dat de coördinatenleer sedert eenige jaren door DESCARTES was ingevoerd en ijverig door de wiskundigen van die dagen werd beoefend en toegepast. Ook HUYGENS had zich spoedig die methode eigen gemaakt, doch maakte daarvan aanvankelijk slechts weinig gebruik, even weinig van de trigonometrie, hoewel ook deze sedert eenige jaren door SNELLIUS tot machtig hulpmiddel voor de oplossing van meetkundige vraagstukken was verheven; de zuiver meetkundige methode der ouden: EUCLIDES, ARCHIMEDES, APOLLONIUS was bij voorkeur zijn hulpmiddel, in het gebruik waarvan hij een onovertroffen meester was. Dit werd ook door zijn tijdgenooten erkend, want zij noemden hem: den modernen ARCHIMEDES of APOLLONIUS.

Hoewel ik, zooals gezegd, zijn levensomstandigheden hier terzijde laat, mag toch voor het goed begrip eenige mededeeling omtrent hem en zijn correspondenten niet ontbreken. Ik beperk mij daarbij echter tot het onmisbare.

Christiaan Huygens, de tweede zoon van onzen welbekenden dichter en staatsman Constantijn Huygens, werd te 's Gravenhage geboren den 14den April 1629. Zijn vader gaf hem een zorgvuldige opvoeding en zond hem met zijn ouderen broeder Constantijn reeds op jeugdigen leeftijd naar de Leidsche Hoogeschool om daar in de rechten te studeeren. Hier kwam hij onder den invloed van Frans van Schooten den jongere; deze was kort te voren tot hoogleeraar in de wiskunde benoemd en een vurig aanhanger van Descartes, wiens mathematische geschriften hij uitgaf en commentariëerde. De band tusschen hem en Christiaan heeft geduurd tot zijn vroegtijdigen dood in 1661; hij is de voornaamste correspondent in de eerste deelen der briefwisseling en moedigde zijn leerling, wiens groote gaven hij erkende en waardeerde, voortdurend aan tot beoefening der mathesis. Van hem zijn verscheidene der hier te behandelen vraagstukken afkomstig. Chr. vertoefde niet lang te Leiden; zijn vader zond hem naar de illustre school te Breda, waarvan hij curator was. Doch ook hier bleef Chr. niet lang, in 1649 keerde hij naar het vaderlijk huis te 's Gravenhage terug, om zich hier verder aan de beoefening der wetenschappen te wijden. Zoowel door de vele connexies zijns vaders als door zijn reizen in België en Frankrijk, zijn eerst verblijf te Parijs in 1655 geraakte hij in briefwisseling met de geleerden in die landen. Zoo had hij aan zijn vader de kennismaking te danken met pater Mersenne, voortreffelijk fransch wiskundige, die aan Chr. voor zijn tijd (zooals hieronder zal blijken) vrij harde nooten te kraken gaf.

Gregorius a Sancto Vincentio (1584—1667), belgisch jezuit en wiskundige van beteekenis, geraakte met Chr. in briefwisseling door den strijd over de quadratuur der kegelsneden. Hoewel de laatste een werk van den eersten vrij scherp had beoordeeld, bleef toch de briefwisseling van vriendschappelijken aard en gaf aanleiding tot behandeling van enkele der hiervolgende vraagstukken.

Kinner von Löwenthurn, doctor in de theologie, philosophie en rechten, woonde te Praag en schreef aan Huygens naar aanleiding van den bovengenoemden strijd, hetgeen tot verdere briefwisseling en het wederzijdsch stellen van vraagstukken aanleiding gaf.

Onder de fransche correspondenten na het eerste verblijf te

Parijs moeten genoemd worden de eerste wiskundigen van hun tijd: DE FERMAT, DE ROBERVAL, verder DE CARCAVY, MYLON, leden van de later opgerichte fransche Academie van wetenschappen, in welke CHR. zulk een belangrijken rol zou spelen. Doch zoover gaan wij thans niet, want in dit opstel bepaal ik mij tot het eerste deel der briefwisseling, dat tot het einde van 1656 loopt.

De vraagstukken zijn even als de brieven voor het meerendeel in het latijn gesteld; de overige in het fransch. Ik geef ze hier overgebracht in onze taal, soms, om ze beter verstaanbaar te maken, met kleine wijziging in figuur en redactie. Bij elk vraagstuk zal ik aanhalen den correspondent, het jaartal waarin het vraagstuk werd gesteld of opgelost en het nummer van den brief, waarin dit geschiedt, zoodat elk lezer, die daartoe de gelegenheid heeft, de aanhaling kan verifiëeren. Waar dit mij wenschelijk voorkomt, voeg ik bij het vraagstuk een korte aanteekening of opheldering. Daar in de volgorde geen verandering is gebracht, kan men hieruit de ontwikkeling van H.'s talent nagaan. Ik twijfel niet of dit zal den belangstellenden lezer aantrekken, gelijk mij het ontleden en opstellen een waar genoegen is geweest.

I.

1. CHR. H. aan zijn broeder CONSTANTIJN 1646, n°. 11 (fig. 1).
Om een gelijkbeenigen driehoek ABE is een parabool ACBC' beschreven en in den driehoek de deelen eener parabool AFB, BF'E die door B gaan, en de basis raken in hun top; de geheele figuur wentelt om de loodlijn BD als as. Dan is de inhoud der buitenste paraboloïde anderhalf maal den inhoud van den kegel ABE (Archimedes), en de inhoud van het lichaam beschreven door de parabool AFB de helft van dien kegel (nieuw) (zoodat het geheele lichaam door de beide oppervlakken in drie gelijke deelen wordt verdeeld).

2. MERSENNE aan CHR. H. 1647, n°. 25,
Vraagstuk. Op een recht cirkelvormig cylindervlak een deel te bepalen, dat gelijk is aan het oppervlak van een gegeven vierkant.

Oplossing van MERSENNE. Neem de middellijn van het grond-

vlak gelijk aan de helft van de zijde van het vierkant. Neem een passer met kromme beenen, geef hem de opening van deze middellijn en beschrijf daarmede uit een willekeurig punt op het cylindervlak een gesloten kromme; het hierbinnen gelegen stuk zal het gevraagde zijn.

3. Idem, n°. 25.

Het zwaartepunt van een halven cirkelomtrek ligt in den top eener quadratrix, waarvan de pool ligt in het middelpunt des cirkels, de as loodrecht staat op de middellijn, en die gaat door haar uiteinden.

4. Idem, n°. 31 (vervolg op n°. 2).

Zij gegeven een scheeve cirkelvormige cylinder. Op een rechten cirkelvormigen cylinder met behulp van een passer een kromme te beschrijven, zoodanig dat het door deze kromme ingesloten oppervlak gelijk zij aan het oppervlak van den scheeven cylinder.

Oplossing van MERSENNE (getrouwelijk uit het latijn overgebracht).

Zij (fig. 2) de rechte AB gelijk aan de middellijn van den scheeven cylinder met het midden in C; de rechte CD gelijk aan zijn as, en hoek DCB de helling dezer op het vlak der basis; trek DE loodrecht op AB (zoo noodig verlengd tot E); nu denke men zich een tweeden cylinder, maar die recht is, op dezelfde basis, waarvan de middellijn is AB en de hoogte gelijk CD. Verder denke men zich een derden cylinder, evenzeer recht, waarvan de middellijn van het grondvlak zij CE en de hoogte gelijk aan dezelfde CD. Eindelijk nog een vierden evenzoo rechten cylinder, gelijkvormig met den derden, doch waarvan het oppervlak gelijk is aan de helft van het oppervlak van den tweeden. Op het oppervlak van dezen vierden cylinder (zoover als noodig is verlengd) ligt de gevraagde kromme; met een opening van den passer, gelijk aan de hoogte van dezen vierden cylinder, wordt zij geconstrueerd. Het bewijs is lang en moeilijk.

Deze vierde cylinder wordt aldus gevonden: zij de lijn F middenevenredig tusschen AC en CD; evenzoo de lijn G middenevenredig tusschen CE en CD; gelijk G tot CD zij F tot de lijn H. Gelijk G tot CE zij F tot de lijn I; zooals nu G

middenevenredig is tusschen CE en CD, is F middenevenredig tusschen H en I; de rechte cylinder waarvan H is de hoogte en I de middellijn van het grondvlak is de gezochte; dit is niet moeilijk aan te toonen.

5. Chr. Huygens aan Mersenne 1647, n°. 39 (fig. 3).
Op een parabool, waarvan de as verticaal staat, worden genomen vier punten A, B, C, D en hun middellijnen AA′, BB′, CC′, DD′. Indien nu A′B′ = B′C′ = C′D′, en P het snijpunt is van AB en DC, zal de middellijn van P de evenwijdige koorden AD en BC middendoor deelen. (Dit eenvoudige vraagstuk staat in verband met H.'s eerste onderzoekingen omtrent de kettinglijn).

6. Mersenne aan Chr. H. 1648, n°. 51 (fig. 4).
In een cirkel wordt een spiraal aldus beschreven, dat boog AQ zich verhoudt tot den geheelen cirkelomtrek, als PQ tot den straal of als de tweede macht, derde macht, *n*de macht dezer verhouding. Gevraagd het oppervlak begrepen tusschen de spiraal en den straal OA.

7. Fr. van Schooten aan Chr. H. 1648, n°. 57 (fig. 5).
Gegeven een driehoek ABC, op de zijde AC het punt D, op de zijde BC het punt E. In de basis het punt P zoodanig te bepalen, dat trekkende PD en PE, $\angle$ ADP = $\angle$ BEP.

8. Idem (fig. 6).
Van den vierhoek ABCD zijn gegeven:
de diagonaal AC, de hoeken BAC, DAC, BCD en de verhouding der zijden AB en AD, of der zijden CB en CD;
den vierhoek te construeeren.

9. Idem (fig. 7).
Gegeven een cirkel en een daarbuiten gelegen punt A. Uit A wordt de raaklijn AB getrokken. Op de as AC een punt P te vinden, zoodanig gelegen dat, trekkende de raaklijn PR en de loodlijn PQ op AC, de lijnen PR en PQ een gegeven verhouding hebben.

10. Chr. H, aan? 1649. n°. 68 (fig. 8).
Over de spiraal van Archimedes. Zij OP de straal van den

cirkel, waarin de eerste winding der spiraal is beschreven; neem OA gelijk aan den omtrek van dien cirkel, dan zal de lijn AP de spiraal raken in het punt, waar zij den cirkel snijdt.

11. CHR. H. aan F. VAN SCHOOTEN 1651, n°. 93 (fig. 9).
Gegeven een rechte lijn DB, hierin een punt C en een punt A er buiten. Gevraagd de meetkundige plaats van het punt P, zoodanig gelegen, dat, trekkende PD onder een gegeven hoek met BD, AP middenevenredig is tusschen CD en een gegeven lijn.

12. CHR. H. aan GREGORIUS A S. V. 1652, n°. 119 (fig. 10).
Gegeven een bol, waarvan de groote cirkel is ABCD, en twee lijnen R en S van gegeven lengte. Gevraagd den bol door een vlak te verdeelen in twee segmenten, waarvan de inhouden zich verhouden als R en S.

Constructie. Verleng de middellijn DB met een stuk BT gelijk aan den straal en verdeel de middellijn AC in E in reden van R/S. Beschrijf een parabool met T tot top, TD tot as en den straal des bols tot parameter. Beschrijf verder uit E als middelpunt een cirkel, die door T gaat en de parabool snijdt in P; laat uit P een loodlijn neer op AC, die haar snijdt in Q. Het vlak door Q loodrecht op AC zal den bol in de gegeven reden verdeelen.

13. KINNER V. L. aan CHR. H. 1653, n°. 160 (fig. 11).
Een cirkelboog ABC met het middelpunt in D in drie gelijke deelen te verdeelen.

Constructie. Zij AC de koorde, trek een middellijn DF zoodanig, dat CE = CF, dan zal boog CF = $\frac{1}{3}$ boog AC.

14. CHR. H. aan KINNER V. L., 1653, n°. 161 (fig. 12).
Twee middenevenredigen tusschen twee gegeven lijnen te construeeren.

Constructie. In den cirkel ACBE zijn AB als middellijn en AC als koorde de gegeven lijnen. Construeer het parallelogram ACDB, en trek door het middelpunt O een lijn zoodanig, dat, indien zij CD snijdt in L en AC verlengd in K, LD gelijk zij aan LK. Zij N het snijpunt van EK met den cirkel, dan zijn KC en KN de gezochte middenevenredigen, zoodat de betrekking bestaat:

$$AB : KC = KC : KN = KN : AC.$$

15. Idem (fig. 13), (zie n°. 12).

Een bol door een vlak in twee segmenten te verdeelen, waarvan de inhouden zich verhouden als twee gegeven lijnen.

Constructie. Zij de middellijn AB van den grooten cirkel des bols in E verdeeld in de gegeven reden. Neem koorde AK gelijk aan het verschil van AE en EB. Verdeel boog AK in drie gelijke deelen en zij AN de koorde van het derde deel. Maak OP = AN, dan zal het vlak door P loodrecht op de middellijn den bol in de gevraagde reden verdeelen.

16. CHR. H. aan F. VAN SCHOOTEN 1653, n°. 164 (fig. 14).

In de conchoïde van NICOMEDES de buigpunten te construeeren.

Constructie. Zij de conchoïde NQN′ met G tot pool, AB tot asymptoot en AQ als straal. Neem GR in G loodrecht op AG en = 2AG. Beschrijf een parabool met R tot top, RG tot as en GA tot parameter. Zij AE derde evenredige tot AG en AQ, en maak GF = GE. Beschrijf uit F als middelpunt een cirkel, die door R gaat en de parabool snijdt in O. Trek OC // AB, en zij zal de conchoïde in de buigpunten C, C′ snijden, zoodat de raaklijn LZ in C de kromme in C tevens snijdt.

(Destijds werd van de conchoïde slechts één tak beschouwd. Den aandachtigen lezer blijve het overgelaten te onderzoeken, of deze constructie ook de buigpunten in den anderen tak casu quo leert kennen).

17. CHR. H. aan F. VAN SCHOOTEN 1653, n°. 166 (fig. 15).

Vraagstuk van APOLLONIUS.

Gegeven een ruit ACGH, waarvan de zijde HG is verlengd: uit A een lijn te trekken, zoodanig dat het stuk KF, begrepen tusschen de niet in A samenkomende zijden, gelijk zij aan een gegeven lijn O.

Constructie. Trek de diagonaal AG en uit G een lijn GD naar de basis, waarvan het vierkant gelijk is aan de som der vierkanten van O en AG. Beschrijf op AD als koorde een cirkelboog, die een hoek bevat gelijk ∠H der ruit. Deze boog snijdt het verlengde van HG in F; dan zal AF de gevraagde zijn, zoodat KF = O.

(Verschillende gevallen; onderzoek van de mogelijkheid eener dubbele oplossing).

18. Chr. H. aan F. van Schooten 1654, n°. 182 (fig. 16).
(Rectificatie van den cirkel).

De middellijn AB verdeelt den cirkelomtrek in twee gelijke deelen. Verdeel de bovenste helft in C in twee, en de onderste helft in D en E in drie gelijke deelen. Trek CD en CE, die de middellijn in F en G snijden, dan zal de som van CF en FG minder dan $^1/_{4000}$ van de middellijn de lengte van het cirkelkwadrant AC overtreffen.

19. Kinner v. L. aan Chr. H. 1654, n°. 211 (fig. 17).
Een cirkelboog in drie gelijke deelen te verdeelen.

Constructie. Zij ABC de te verdeelen cirkelboog. Maak in A op AC een rechten hoek en trek een raaklijn DBE zoodanig, dat, indien B het raakpunt is, BE = BD. Dan zal boog BC een derde deel zijn van boog ABC.

20. Idem (fig. 18).
Hetzelfde vraagstuk.

Andere constructie. Zij ABCD een koordenvierhoek, zoodanig dat de diagonalen loodrecht op elkander staan. Indien nu DC + EC = AE, dan zal boog DC = $\frac{1}{3}$ boog ADC.

21. Chr. H. aan F. van Schooten 1656, n°. 317.
Gegeven zijn twee paren rechte lijnen. De meetkundige plaats te bepalen van een punt P zoodanig gelegen, dat, wanneer men uit P telkens onder een gegeven hoek lijnen trekt naar elk der gegeven lijnen, het product der lijnen naar het ééne paar gelijk zij aan het product der lijnen naar het andere paar. (Dit vraagstuk, afkomstig van Apollonius, was ook door Descartes behandeld. Zijn oplossing gaf aanleiding tot uitvoerige correspondentie met de Roberval, F. van Schooten en andere wiskundigen, vooral over de mogelijkheid van het vraagstuk voor elke ligging van P en over den aard der kegelsnede in verband met de onderlinge ligging der gegeven lijnen. Hierbij geeft de zuiver meetkundige beschouwing geen voldoende opheldering, maar de analyse lost alle moeilijkheden op).

22. Chr. H. aan Mylon 1656, n°. 365 (fig. 19).
Vraagstuk. Uit een gegeven punt naar een gegeven para-

bool een rechte lijn te trekken, die haar onder een rechten hoek snijdt.

Constructie. Zij T de top der parabool, TA haar as, TR de halve parameter en P het gegeven punt. Trek PQ $\perp$ TA en zij K het midden van RQ; trek KM $\perp$ TA en maak KM $= \frac{1}{4}$ PQ. Trek uit M als middelpunt een cirkel, die gaat door den top der parabool; zijn C, C', C'' de snijpunten van dezen cirkel met de parabool, dan voldoen de lijnen CP, C'P, C''P aan het gestelde vraagstuk.

Bewijs van HUYGENS. Beschouwen wij het punt C, dan zal CP normaal zijn in C aan de parabool, indien de subnormaal DN $=$ TR $= p$. Deze gelijkheid wordt als volgt aangetoond.

Volgens de constructie is

$$KQ = KR \text{ en } KA = KT,$$

derhalve

$$AQ = RT = p.$$

Neem

$$QB = QA = p, \text{ zoodat } AB = 2p.$$

Nu is in den cirkel:

$$DT \,.\, DA = DC \,.\, DE;$$

derhalve

$$\frac{DT}{DC} = \frac{DE}{DA}.$$

Maar volgens de vergelijking der parabool is:

$$\overline{DC}^2 = 2p \,.\, DT,$$

gevende

$$\frac{DT}{DC} = \frac{DC}{2p} = \frac{DE}{DA} = \frac{DC}{AB},$$

zoodat ook

$$\frac{DC}{DE} = \frac{AB}{DA}$$

en

$$\frac{DE - DC}{DC} = \frac{DA - AB}{AB}$$

of, F het midden zijnde van CE,

$$\frac{2DF}{DC} = \frac{DB}{AB},$$

en

$$\frac{4DF}{DC} = \frac{2DB}{AB}.$$

Maar, volgens constructie is $4DF = PQ$ en $AB = 2BQ$, derhalve

$$\frac{PQ}{DC} = \frac{DB}{QB} = \frac{NQ}{ND},$$

gevende

$$\frac{NQ + ND}{ND} = \frac{DB + QB}{QB}.$$

Maar

$$NQ + ND = DB + QB = DQ,$$

derhalve

$$ND = QB = p,$$

q. e. d.

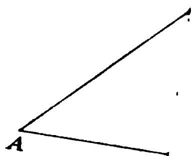
(Het vraagstuk om uit een gegeven punt normalen aan een kegelsnede te trekken werd reeds door APOLLONIUS in het vijfde boek zijner „kegelsneden" behandeld, doch tot een constructie kwam hij niet. Na de invoering der coördinaten door DESCARTES kwam het vraagstuk opnieuw aan de orde en zoo werd het ook aan HUYGENS voorgesteld. Hij gaf bovenstaande constructie voor de parabool, geheel overeenkomende met die, welke nog tegenwoordig wordt gevolgd en in vele leerboeken is opgenomen. (Zie o.a. mijn leerboek der analytische meetkunde I § 28 fig. 50).

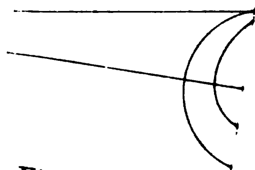
Het bewijs van HUYGENS voor de juistheid dezer constructie is hier uitvoerig meegedeeld, omdat daaruit zijn methode kan worden nagegaan. Zij is zuiver meetkundig, met terzijdestelling der analyse, onder gebruikmaking van bekende eigenschappen der parabool en van den cirkel. Het bewijs is ook merkwaardig, omdat dit de eerste schrede is op den weg, die hem later tot de leer der ontwondenen zou voeren.

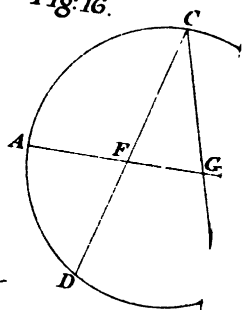
In dezen tijd toch hadden de wiskundigen nog geen begrip van de kromming der krommen en al wat daarmede samen hangt.

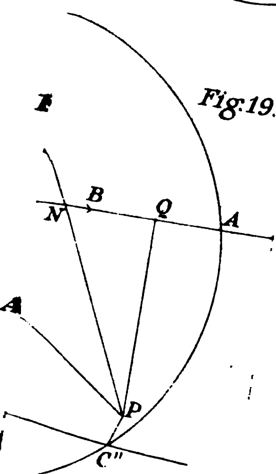
Intusschen kan ik het vermoeden niet onderdrukken, dat H. langs den weg der analyse, dat is door gebruik te maken van de vergelijkingen van parabool en cirkel, tot zijn constructie is gekomen, en daarna het hier gegeven bewijs heeft afgeleid.

Het was toch de gewoonte dier dagen om den weg, langs welken men tot oplossing of constructie van gestelde vraagstukken was gekomen, geheim te houden, en slechts die oplossing of constructie, met of zonder bewijs voor de juistheid daarvan, mee te deelen. Op gelijke wijze handelden ook NEWTON, LEIBNIZ en hun navolgers. Eerst veel later werd het gewoonte, om nauwkeurig den weg aan te wijzen, langs welken men tot de oplossing was gekomen.


Fig:
A
A


Fig: 8.


Fig: 16.
C
A
F
G
D


Fig: 19.
B
Q
N
A
A
P
C"

K 9 a

SUR UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE PLANE,

PAR

W. KAPTEYN.
(Utrecht.)

Dans la géometrie de l'espace on considère un polyèdre ayant pour bases deux polygones quelconques situés dans des plans parallèles et pour faces latérales des trapèzes ou des triangles. En démontrant que le volume de ce polyèdre est exprimé par la formule $\frac{H}{6}(B + 4B'' + B')$, dans laquelle H désigne la distance des deux plans parallèles, B la base inférieure du polyèdre, B' la base supérieure et B'' la section équidistante des deux bases, on décompose généralement le polyèdre en pyramides. Si l'on prend p. e. un point à volonté M dans la base inférieure on a d'abord un pyramide dont le sommet est situé en M et qui repose sur la face supérieure B', puis un nombre de pyramides dont les sommets coincident avec les sommets de la base supérieure et qui reposent sur les triangles qu'on obtient en joignant le point M avec tous les sommets du polygone dans lequel ce point est situé, enfin un nombre de tetraèdres limités chacun par un des cotés du polygone supérieur et une des lignes qui convergent dans le point M; ces deux cotés seront des arêtes opposées du tétraèdre correspondant.

En faisant attention à la section équidistante des deux bases on voit que la première piramide y dessine un polygone semblable à la base supérieure et dont l'aire est égal à $\frac{1}{4}$ B'; de même les pyramides qui réposent sur les triangles de la base inférieure dessinent sur la section considérée des triangles semblables à leur bases; l'aire de tous ces triangles est évidemment $\frac{1}{4}$ B. Le reste de la section se décompose en un nombre de parallélogrammes dont les cotés sont parallèles aux cotés de la

base supérieecre et aux lignes qui joignent le point M avec les sommets de la base inférieure. Si donc on change la position du point M, il faut que la somme des aires de tous ces parallélogrammes soit constante.

En faisant abstraction maintenant de toute considération empruntée à la géometrie de l'espace, le raisonnement précédent conduit à ce théorème de géometrie plane:

Soient $A_1 A_2 \ldots A_n$, $P_1 P_2 \ldots P_m$ deux polygones quelconques et soient $a_1 a_2 \ldots a_n$ les cotés du premier polygone, $u_1 u_2 \ldots u_m$ les distances d'un point arbitraire M aux différents sommets P, la somme

$$a_1 u_\alpha \sin(a_1, u_\alpha) + a_2 u_\beta \sin(a_2 u_\beta) + \ldots + a_n u_\lambda \sin(a_n, u_\lambda)$$

sera indépendante de la position du point M, α, β, $\ldots \lambda$ étant des nombres choisis à volonté parmi les nombres $1, 2, m$.

Proposons nous maintenant de démontrer ce théorème d'une manière satisfaisante et de faire voir qu'il se prête encore à une généralisation.

Soient $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{U}$ des vecteurs et rappelons qu'on distingue généralement deux produits: le produit scalaire

$$(\mathfrak{A}\,\mathfrak{U}) = |\,\mathfrak{A}\,| \,.\, |\,\mathfrak{U}\,| \cos(\mathfrak{A}, \mathfrak{U})$$

et le produit vectoriel

$$[\mathfrak{A}\,\mathfrak{U}] = |\,\mathfrak{A}\,| \,.\, |\,\mathfrak{U}\,| \sin(\mathfrak{A}, \mathfrak{U})$$

où $(\mathfrak{A}, \mathfrak{U})$ représente l'angle que le premier vecteur devra parcourir dans un sens déterminé (soit le sens positif) pour le faire coïncider avec le second. Il suit de cette définition que si l'on intervertit l'ordre des deux facteurs le produit scalaire reste invariable, tandis que le produit vectoriel change de signe. Rappelons aussi que la loi distributive qui s'exprime ainsi

$$((\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\,\mathfrak{U}) = (\mathfrak{A}\,\mathfrak{U}) + (\mathfrak{B}\,\mathfrak{U})$$

$$[(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})\,\mathfrak{U}] = [\mathfrak{A}\,\mathfrak{U}] + [\mathfrak{B}\,\mathfrak{U}]$$

à lieu également dans les deux cas.

Imaginons maintenant en premier lieu un polygone quelconque et associons à chaque coté un vecteur $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{A}_n$ dont la direction est determiné par un mobile qui parcourt la circonférence du polygone dans un sens arbitraire et considérons en second lieu les vecteurs $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2 \ldots \mathfrak{U}_m$ qui partent d'un point

M quelconque aux différents points d'un groupe de points fixes $P_1, P_2 \ldots P_m$. Cela posé on aura

$$(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{U}_\alpha) + (\mathfrak{A}_2 \mathfrak{U}_\beta) + \ldots + (\mathfrak{A}_n \mathfrak{U}_\lambda) = \text{const.}$$

et

$$[\mathfrak{A}_1 \mathfrak{U}_\alpha] + [\mathfrak{A}_2 \mathfrak{U}_\beta] + \ldots + [\mathfrak{A}_n \mathfrak{U}_\lambda] = \text{const.}$$

c'est à dire que ces sommes sont indépendantes de la position du point M.

En effet, soit M' une nouvelle position du point M et désignons par $\mathfrak{U}'_1, \mathfrak{U}'_2 \ldots \mathfrak{U}'_m$ les vecteurs qui joignent le point M' aux points fixes $P_1, P_2 \ldots P_m$, la considération des triangles $P_\alpha P_\beta M$ et $P_\alpha P_\beta M'$ conduit à l'équation

$$\mathfrak{U}_\alpha - \mathfrak{U}'_\alpha = \mathfrak{U}_\beta - \mathfrak{U}'_\beta.$$

De la même manière on deduira des triangles $P_\beta P_\gamma M$, $P_\beta P_\gamma M'$ etc. les équations

$$\mathfrak{U}_\beta - \mathfrak{U}'_\beta = \mathfrak{U}_\gamma - \mathfrak{U}'_\gamma,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\mathfrak{U}_\varkappa - \mathfrak{U}'_\varkappa = \mathfrak{U}_\lambda - \mathfrak{U}'_\lambda,$$

$$\mathfrak{U}_\lambda - \mathfrak{U}'_\lambda = \mathfrak{U}_\alpha - \mathfrak{U}'_\alpha.$$

D'après ces relations, il est évident que

$$(\mathfrak{A}_1 (\mathfrak{U}_\alpha - \mathfrak{U}'_\alpha)) + (\mathfrak{A}_2 (\mathfrak{U}_\beta - \mathfrak{U}'_\beta)) + \ldots (\mathfrak{A}_n (\mathfrak{A}_n (\mathfrak{U}_\lambda))=$$

$$= ((\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots + \mathfrak{A}_n) (\mathfrak{U}_\alpha - \mathfrak{U}'_\alpha)) = 0,$$

parce que

$$\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2 + \ldots \mathfrak{A}_n = 0.$$

On aura donc

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{U}_\alpha) + (\mathfrak{A}_2 \mathfrak{U}_\beta) + \ldots + (\mathfrak{A}_n \mathfrak{U}_\lambda) = (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{U}'_\alpha) + \mathfrak{A}_2 \mathfrak{U}'_\beta) + \ldots + (\mathfrak{A}_n \mathfrak{U}'_\lambda),$$

ou

$$(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{U}_\alpha) + (\mathfrak{A}_2 \mathfrak{U}_\beta) + \ldots + (\mathfrak{A}_n \mathfrak{U}_\lambda) = \text{const.},$$

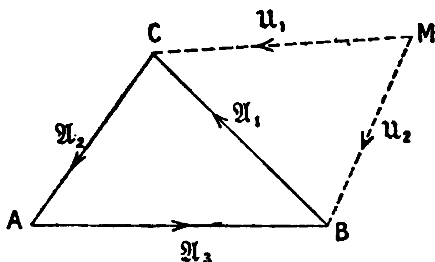
et de la même manière

$$[\mathfrak{A}_1 \mathfrak{U}_\alpha] + [\mathfrak{A}_2 \mathfrak{U}_\beta] + \ldots + [\mathfrak{A}_n \mathfrak{U}_\lambda] = \text{const.}$$

Pour donner une application du premier théorème proposons nous de démontrer cette proposition:

„Dans tout triangle, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins deux fois leur produit multiplié par le cosine de l'angle compris entre ces derniers."

D'après le premier théoreme on aura



$$(\mathfrak{A}_1\, \mathfrak{U}_1) + (\mathfrak{A}_2\, \mathfrak{U}_2) + (\mathfrak{A}_3\, \mathfrak{U}_2) = \text{const.}$$

ou

$$(BC,\ MC) + (CA,\ MB) + (AB,\ MB) = \text{const.}$$

En faisant coïncider M avec C, l'équation précédente s'écrit

$$(CA + AB,\ CB) = \text{const.}$$

ou, parce que

$$CB = CA + AB,$$

$$(\overline{CA}^2) + 2\,(CA,\ AB) + (\overline{AB}^2) = \text{const.}$$

c'est-à-dire

$$\overline{CA}^2 - 2CA\,.\,AB \cos A + \overline{AB}^2 = \text{const.}$$

En faisant coïncider M avec B, on obtient

$$(\overline{BC}^2) = \text{const.}$$

ou

$$\overline{BC}^2 = \text{const.},$$

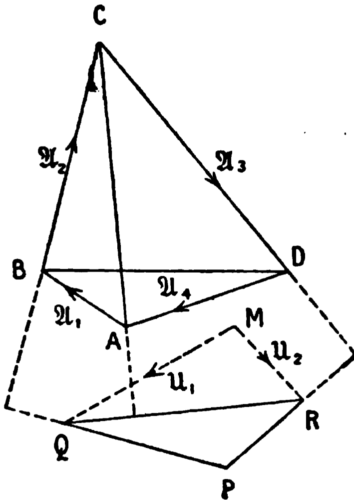
par suite

$$\overline{BC}^2 = \overline{CA}^2 - 2CA\,.\,AB \cos A + \overline{AB}^2.$$

Pour donner une application du second théorème, je prends la proposition:

„Dans tout quadrilatère inscriptible le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés."

Soit ABCD le quadrilatère donné et soit PQR un triangle congruent avec le triangle ADB dont les côtés PQ et PR sont respectivement perpendiculaires sur CB et CD; alors on aura d'après le second théorème



$$[\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{U}_1] + [\mathfrak{A}_2\,\mathfrak{U}_1] + [\mathfrak{A}_3\,\mathfrak{U}_2] + \\ + [\mathfrak{A}_4\,\mathfrak{U}_2] = \text{const.}$$

ou

$$[AB,\ MQ] + [BC,\ MQ] + \\ + [CD,\ MR] + [DA,\ MR] = \text{const.}$$

Si l'on fait coïncider M avec P, cette équation donne

$$AB \,.\, AD \sin (B - 90^\circ) + BC \,.\, AD + CD \,.\, AB + \\ + AD \,.\, AB \sin (270^\circ - D) = \text{const.}$$

ou, ayant égard à la relation donnée,

$$B + D = 180^\circ$$
$$BC \,.\, AD + CD \,.\, AB = \text{const.}$$

Si, au contraire M coïncide avec R, l'équation prend la forme

$$[AB,\ RQ] + [BC,\ RQ] = \text{const.}$$

ou

$$[AB + BC,\ RQ] = \text{const.}$$

c'est-à-dire

$$AC \,.\, BD = \text{const.},$$

par conséquent

$$BC \,.\, AD + CD \,.\, AB = AC \,.\, BD.$$

Remarque. Dans une note, insérée dans Grunert's Archiv T. 65, p. 221 (1880) nous avons donné déjà l'énoncé du second des théorèmes précédents.

A LIST OF DUTCH BOOKS ON MATHEMATICAL SCIENCES, IMPORTED FROM HOLLAND TO JAPAN BEFORE THE RESTORATION IN 1868 [1]),

BY

T. HAYASHI.

(Tōkyō, Japan.)

The Dutch books on mathematical sciences, mentioned in the following list have largely contributed to the development of science in Japan up to its present state. I have found these books in the library of Mr. Nobusane Yamamoto, member of the Tōkyō mathematico-physical society, who was one of the professors of the Kaiseijo, which was combined with the others in 1869 in order to establish the Tōkyō Imperial University. Some of these books formerly belonged to the Kaiseijo and have the signature of the institution on their pages. Mr. Yamamoto told me that several Dutch books belonging to the Kaiseijo, were sold off as books useless in future (a violent and inconsiderate proceeding); Mr. Yamamoto was able to secure some of them, but does not know, what has become of the others. I would express sincere thanks to Mr. Yamamoto for kindly showing me his library.

1. J. Badon Ghijben. — Beginselen der differentiaal- en integraalrekening, voor kadetten der artillerie en genie. K. M. A. [2]) Breda, Broese & Co. 1847.

2. J. Badon Ghijben en H. Strootman. — Beginselen der hoogere stelkunst. K. M. A. Breda, Broese & Co. 1850.

3. J. Badon Ghijben. — Beginselen der meetkunst, voor

[1]) I beg the reader to consult the previous note "A list of Dutch astronomical works imported from Holland to Japan" p. 42—47 of the present volume of the „Nieuw Archief."

[2]) The abbreviation K. M. A. stands for: Wiskundige leercursus ten gebruike der koninklijke militaire akademie.

de kadetten van alle wapenen. Derde druk. K. M. A. Breda, Broese & Co. 1852.

4. J. Badon Ghijben. — Beginselen der hoogere meetkunst. K. M. A. Breda, Broese & Co. 1862.

5. D. Bierens de Haan. — Overzigt van de differentiaalrekening. Leiden, P. Engels. 1865.

6. D. J. Brouwer. — Sterre- en zeevaartkundige tafelen benevens eene korte verklaring van hare inrigting en haar gebruik, 1 vol. Nieuwediep, J. C. de Buisonjé. 1862.

7. D. J. Brouwer. — Handleiding tot de theoretische en praktische zeevaartkunde benevens eene beknopte verhandeling over de hydrographie. Met platen en kaarten. 2 vol. Nieuwediep, J. C. de Buisonjé. 1864 en 1866.

8. P. M. Brutel de la Rivière. — See Thomas Tate.

9. A. W. de Bruyn. — Militair zakboekje ten dienste van het nederlandsche leger; doch meer bijzonder van het wapen der artillerie. 's Gravenhage, de Erven Doorman. 1839.

10. P. van der Burg. — Eerste grondbeginselen der natuurkunde. Derde druk. Gouda, G. B. van Goor. 1854.

11. Isaac Paul Delprat. — Verhandeling over den wederstand van balken en ijzeren staven. K. M. A. Breda, Broese & Co. 1832.

12. Isaac Paul Delprat. — The same. 1852.

13. Isaac Paul Delprat. — Beginselen der Mechanica. K. M. A. Tweede druk. Breda, Broese & Co. 1848.

14. Isaac Paul Delprat. — Beginselen der werktuigkunde. K. M. A. Breda, Broese & Co. 1855.

15. Th. van Doesburgh. — See A. Ganot.

16. J. C. Eger. — Beginselen der meetkunde ten vervolge van Schömilch's planimetrie, bevattende de leer der transversalen, in hare toepassing op de planimetrie, van C. Adams. Groningen, J. Oomkens. 1863.

17. W. A. Froger. — Handboek bij het bepalen der afmetingen, der voornaamste deelen van bouwkundige zamenstellingen, naar de daarop werkende krachten of belastingen. Amsterdam, Weijtingh en van der Haart 1845.

18. A. Ganot. — Handboek der natuurkunde voor den beschaafden stand. Translated into Dutch by Th. van Doesburgh. Rotterdam, H. Nijgh. 1862.

19. Jacob de Gelder. — Grondbeginselen der cijferkunst. Rotterdam, N. Cornel. 1793.

20. Jacob de Gelder. — Beginselen der meetkunst, ontworpen naar haren tegenwoordigen staat van vorderingen. 's Gravenhage en Amsterdam, Gebr. van Cleef. 1829.

21. Jacob de Gelder. — Allereerste gronden der cijferkunst. 's Gravenhage en Amsterdam, Gebr. van Cleef. 1847.

22. Jacob de Gelder. — Beschrijving van de inrigting en het gebruik van den sextant van Halley. Amsterdam, Gebr. van Cleef. 1816.

23. Jacob de Gelder. — Beginselen der stelkunst, ontworpen naar haren tegenwoordigen staat van vordering en beschaving. Amsterdam, Gebr. van Cleef. 1836.

24. Jacob de Gelder. — Hoogere meetkunst bevattende de algemeene theorie der kromme lijnen en gebogen vlakken. 's Gravenhage, Gebr. van Cleef. 1824.

25. Jacob de Gelder. — Cosmographische lessen. Een leerboek voor de nederlandsche jongelingschap. Amsterdam en Haag, Gebrs. van Cleef. 1831.

26. G. A. Hondeijker. — See J. J. Littrow.

27. Frederik Kaiser. — De sterrenhemel. 2 vol. Amsterdam, C. G. Sulpke. 1847.

28. J. C. J. Kempees. — Beginselen der meetkunst. K. M. A. Breda, Broese & Co. First part (8th edition) 1863. Second part (3rd edition) 1862.

29. G. A. van Kerkwijk. — Verhandeling over het waterpassen en het gebruik van den barometer tot het meten van hoogten. 's Gravenhage, Gebr. van Cleef. 1828.

30. G. A. van Kerkwijk. — Geodesie. Breda, Broese & Co. 1855.

31. G. A. van Kerkwijk. — Handleiding tot de versterkingskunst. Breda, Broese & Co. 1854.

32. G. Kuijper. — See J. Weisbach.

33. S. F. Lacroix. — Beginselen der stelkunst. Translated into Dutch by J. R. Schmidt. 's Gravenhage en Amsterdam, Gebr. van Cleef. 1825.

34. S. F. Lacroix. — Beginselen der goniometrie. Derde druk. Translated into Dutch by J. R. Schmidt. 's Gravenhage, Gebr. van Cleef. 1836.

35. S. F. Lacroix. — Beginselen der Meetkunst. Vierde

druk. Translated into Dutch by J. R. Schmidt. 's Gravenhage, Gebr. van Cleef. 1854.

36. J. J. de Lalande. — Astronomia of sterrekunde. 8 vol. Translated into Dutch by Arnoldus Bastiaan Strabbe and revised by Cornelis Douwes. Amsterdam, Jan Morterre. 1773.

37. Pieter Le Compte. — Praktische zeevaartkunde en theoretische kennis, voor handel en scheepvaart. 2 vol. Amsterdam, C. F. Stemler. 1844.

38. J. J. Littrow. — Het uitspansel en deszelfs werelden, of de sterrekunde. Translated into Dutch by G. A. Hondeijker. 's Gravenhage, K. Fuhri. 1848.

39. Rehuel Lobatto. — Leerboek der regtlijnige en sphaerische driehoeksmeting. Amsterdam, Gebr. van Cleef. 1844.

40. Rehuel Lobatto. — Lessen over de hoogere algebra. Amsterdam, Gebr. van Cleef. 1845.

41. Rehuel Lobatto. — Lessen over de differentiaal- en integraalrekening. 's Gravenhage, Gebr. van Cleef. 1851.

42. J. P. C. van Overstraten. — Gronden der Mechanica. K. M. A. Breda, Broese & Co. 1850.

43. J. C. Pilaar. — Handleiding tot de beschouwende en werkdadige stuurmanskunst. 2 vol. Amsterdam, 's Gravenhage en Utrecht; Wed. G. Hulst van Keulen, de Gebroeders van Cleef en C. van der Post Jr. 1837.

44. J. R. Schmidt. — Beginselen der hoogere meetkunde, bevattende de toepassing van de stelkunst op bepaalde meetkundige vraagstukken; verder de theorie van de regte lijn en den cirkel; benevens de kromme lijnen van den tweeden graad of de kegelsneden. 's Gravenhage, Gebr. van Cleef. 1822.

45. J. R. Schmidt. — Beginselen der differentiaal- en integraal-rekening. 's Gravenhage, Gebr. van Cleef. 1822.

46. J. R. Schmidt. — Beginselen der dynamica. 's Gravenhage, Gebr. van Cleef. 1825.

47. J. R. Schmidt. — Also see S. F. Lacroix whose works were translated into Dutch by J. R. Schmidt.

48. J. G. Sommer. — Tafereel van het Heel-al, of bevattelijke en onderhoudende beschouwing van het Uitspansel en van den Aardbol. 6 vol. Uit het Hoogd. vertaald. Amsterdam, Gebrs. Diederichs. 1829—1834.

49. J. S. Speijer. — Tafel van de gewone of Briggiaansche

logarithmen van 1 tot 10100. 's Gravenhage en Amsterdam, Gebr. van Cleef. 1847.

50. A. B. Strabbe. — See J. J. de Lalande.

51. H. Strootman. — Gronden der beschrijvende meetkunst. Tweede druk. K. M. A. Breda, Broese & Co. 1847.

52. H. Strootman. — Beginselen der cijferkunst. Breda, Hermans en zoon. Eerste stukje, 1864. Tweede stukje, 1862.

53. H. Strootman en J. Badon Ghijben. — See J. Badon Ghijben.

54. Jacob Swart. — Verklaring van den almanack ten dienste der zeelieden. Amsterdam, Wed. G. Hulst van Keulen. 1841.

55. Jacob Swart. — Handleiding voor de praktische zeevaartkunde. Amsterdam, Wed. G. Hulst van Keulen. 1856.

56. Thomas Tate. — Kort begrip der werktuigkunde. Tweede druk. Translated into Dutch by P. M. Brutel de la Rivière. Leiden, A. W. Sijthoff. 1855.

57. Gideon Jan Verdam. — Gronden der toegepaste werktuigkunst. 8 vols. Groningen, W. van Boekeren. 1828.

58. Gideon Jan Verdam. — Summarium der goniometrie en der regtlijnige trigonometrie. Leiden, C. C. van den Hoek. 1858.

59. J. Weisbach. — De Ingenieur. Prachtische handgids voor groot en klein, of verzameling van tafels, regels en formules uit de wis-, bouw- en werktuigkunde. Amsterdam, C. L. Brinkman. 1865.

60. Over de drukking van aarde tegen bekleedingsmuren. K. M. A. Breda, Broese en Co. 1837.

61. Verzameling van wiskundige tafelen, voor de kadetten van alle wapenen, K. M. A. Breda, Broese en Comp. 1845.

62. Verzameling van wiskundige voorstellen, door de leden van het Wiskundig Genootschap. Eerste deel. Amsterdam, F. E. Wijmans, 1820.

63. Verzameling van nieuwe wiskundige voorstellen, door de leden van het Wiskundig Genootschap. Tweede deel. Amsterdam, van der Haart. 1846.

AANTEEKENING.

Behalve deze en de voorafgaande lijst van Nederlandsche werken zond de heer Hayashi ons nog eene lijst van titels,

geschreven gedeeltelijk in het Katakanaschrift en gedeeltelijk in het Chineesch, waaruit hij de oorspronkelijke Nederlandsche titels niet meer kon terugvinden. De heer F. G. Kramp te Leiden was zoo welwillend deze titels zooveel mogelijk te vertalen. Het bleek, dat voor het grootste gedeelte de bedoelde werken reeds voorkwamen in de vorige lijsten. Van eenige andere was de aanduiding te vaag. Uit aanwijzingen als: handboek, almanak, sterrekunde, soms vergezeld van een enkel jaartal, kan niet tot een bepaald boek worden besloten. De onderstaande werken konden nog worden herkend.

1. A. Quételet. — Gronden der sterrekunde. Uit het Fransch vertaald met aanteek. door R. Lobatto. Amsterdam. 1827.

2. J. W. Karsten. — Volksmeetkunde of onderwijs tot nuttig gebruik. Uitgegeven door de Maatsch. t. Nut v. 't Alg. Amsterdam, C. de Vries, H. van Munster en Zoon, J. van der Hey en Zoon. 1824.

3. J. Kramers Jz. — Algemeene kunstwoorden-tolk, bevattende de vertaling en verklaring van alle vreemde woorden en zegswijzen, enz. Gouda, G. B. van Goor en Zoon. 1863.

4. Kramer. — Natuur en geschiedenis der aarde en harer bewoners. 2 dln.

5. Almanak en naamregister van Nederlandsch-Indië. Batavia.

J. C. Kluyver.

J 2 a, c

OVER EEN UITBREIDING VAN DEN REGEL DER TOTALE WAARSCHIJNLIJKHEID EN ENKELE TOEPASSINGEN,

DOOR

FRED. SCHUH.

(Sneek).

We beschouwen n gebeurtenissen A_1, A_2, ... , A_n, wier kansen p_1, p_2, ... , p_n zijn. Zijn die gebeurtenissen van dien aard, dat ze elkaar uitsluiten (zoodat dus geen twee of meer gebeurtenissen tot stand kunnen komen), dan is de kans op het plaats vinden van een dier gebeurtenissen

$$p = p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n.$$

Dit is de bekende regel der totale waarschijnlijkheid.

Sluiten de gebeurtenissen elkaar niet uit, dan noemen we p_{12} de kans dat A_1 en A_2 beide tot stand komen (waarbij het al of niet plaats vinden der overige gebeurtenissen onverschillig is), p_{123} de kans dat A_1, A_2 en A_3 tot stand komen, enz., terwijl we

$$\begin{array}{l}
p_1 \ + p_2 \ + p_3 \ + \ldots\ldots = S_1, \\
p_{12} + p_{13} + p_{23} + \ldots\ldots = S_2, \\
p_{123} + p_{124} + p_{234} + \ldots\ldots = S_3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
p_{12\ldots n} \qquad\qquad\qquad = S_n
\end{array}$$

stellen. De kans, dat minstens één der gebeurtenissen A_1, A_2, ... , A_n tot stand komt, is dan

$$p = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} S_n, \quad . \quad . \quad (1)$$

eveneens een bekende formule, die we als volgt bewijzen.

Zij q_1 de kans dat A_1 plaats vindt maar de overige gebeurtenissen niet, q_{12} de kans op het plaats grijpen alleen der gebeurtenissen A_1 en A_2, enz., zoodat $q_{12\ldots n} = p_{12\ldots n}$ is. Voor

$n=2$ heeft men dan volgens den regel der totale waarschijnlijkheid:

$$p_1 = q_1 + p_{12},$$
$$p_2 = q_2 + p_{12},$$
$$p = q_1 + q_2 + p_{12} = (p_1 - p_{12}) + (p_2 - p_{12}) + p_{12},$$
$$p = p_1 + p_2 - p_{12}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)'$$

waarmede de formule (1) voor $n=2$ is aangetoond.

Onderstellen we nu, dat de formule is aangetoond voor $n-1$ gebeurtenissen. De kans p' der gebeurtenis A', die bestaat in het tot stand komen van een (of meer) der gebeurtenissen A_1, $A_2, \ldots, A_{n-1}$, is dan

$$p' = S'_1 - S'_2 + S'_3 - \ldots + (-1)^{n-2} S'_{n-1}, \quad . \quad (1)''$$

waarbij het accent van S'_1, S'_2, enz. aanduidt, dat we bij de p's alleen de indices $1, 2, \ldots, n-1$ gebruiken, dus b.v. $S'_1 = p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}$. De gezochte kans p voor n gebeurtenissen is nu de kans, dat minstens één der beide gebeurtenissen A' (met kans p') en A_n (met kans p_n) tot stand komt. Men heeft dus:

$$p = p' + p_n - p'',$$

waarin p'' de kans is dat zoowel A' als A_n plaats vindt, m. a. w. de kans op een (of meer) der $n-1$ gebeurtenissen $A_{1n}, A_{2n}, A_{3n}, \ldots, A_{n-1\,n}$, waarin A_{1n} het tot stand komen van A_1 en A_n beteekent, enz. Volgens de formule (1) voor $n-1$ gebeurtenissen is dus:

$$p'' = S''_2 - S''_3 + S''_4 - \ldots + (-1)^{n-2} S''_n;$$

hierin beteekent S''_i de som van alle p's met i indices, waaronder den index n, dus b.v.:

$$S''_2 = p_{1n} + p_{2n} + p_{3n} + \ldots + p_{n-1\,n},$$

terwijl $S''_n = S_n = p_{123\ldots n}$ is. Men heeft derhalve:

$$p = S'_1 - S'_2 + S'_3 - \ldots + (-1)^{n-2} S'_{n-1} + p_n - S''_2 +$$
$$+ S''_3 - S''_4 + \ldots + (-1)^{n-1} S''_n.$$

Nu is $S'_1 + p_n = S_1$, $S'_2 + S''_2 = S_2$, enz., zoodat men vindt:

$$p = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{n-1} S_n.$$

Dit is de formule voor n gebeurtenissen, die hiermede volledig is aangetoond.

Vervolgens zoeken we de kans $q_{12\ldots i}$, dat de gebeurtenissen $A_1, A_2, \ldots, A_i$ plaats vinden maar geen der overige. Men heeft:

$$p_{12\ldots i} = q_{12\ldots i} + p''',$$

waarin p''' de kans voorstelt dat de gebeurtenissen $A_1, A_2, \ldots, A_i$ alle tot stand komen en bovendien één of meer der overige, dus de kans op één of meer der gebeurtenissen $A_{12\ldots i\, i+1}$, $A_{12\ldots i\, i+2}$, $A_{12\ldots i\, i+3}$, ..., $A_{12\ldots i\, n}$, waarin weer $A_{12\ldots i\, i+1}$ het tot stand komen der gebeurtenissen $A_1, A_2, \ldots, A_{i+1}$ beteekent, enz. Volgens de formule (1) is nu:

$$p''' = S_{i+1}^{12\ldots i} - S_{i+2}^{12\ldots i} + S_{i+3}^{12\ldots i} - \ldots\ldots + (-1)^{n-i-1} S_n^{12\ldots i},$$

waarbij de indices $12\ldots i$ aangeven, dat alleen die p's gesommeerd moeten worden, die o.a. de indices $12\ldots i$ dragen. Men vindt dus:

$$q_{12\ldots i} = p_{12\ldots i} - S_{i+1}^{12\ldots i} + S_{i+2}^{12\ldots i} - \ldots + (-1)^{n-i} S_n^{12\ldots i},$$

of meer symmetrisch geschreven:

$$q_{12\ldots i} = S_i^{12\ldots i} - S_{i+1}^{12\ldots i} + S_{i+2}^{12\ldots i} - \ldots + (-1)^{n-i} S_n^{12\ldots i}. \quad (2)$$

De kans k_i, dat er van de n gebeurtenissen i en niet meer plaats vinden, onverschillig welke, is de som van alle q's met i indices, dus:

$$k_i = \Sigma q_{12\ldots i} = \Sigma S_i^{12\ldots i} - \Sigma S_{i+1}^{12\ldots i} + \Sigma S_{i+2}^{12\ldots i} - \ldots + (-1)^{n-i} \Sigma S_n^{12\ldots i}.$$

Nu komt in $\Sigma S_{i+j}^{12\ldots i}$ iedere p met $i+j$ indices $(i+j)_j$ maal voor, waarin $(i+j)_j = \dfrac{(i+j)!}{i!\, j!}$ de j^{de} binomiaalcoëfficient der $i+j^{de}$ macht is. Men heeft dus:

$$\Sigma S_{i+j}^{12\ldots i} = (i+j)_j S_{i+j},$$

zoodat men voor k_i vindt:

$$k_i = S_i - (i+1)_1 S_{i+1} + (i+2)_2 S_{i+2} - \ldots + (-1)^{n-i} (n)_{n-i} S_n. \quad (3)$$

Deze formule gaat ook nog door voor $i = 0$, waarbij blijkens de beteekenis $S_0 = 1$ te stellen is. Daar $k_0 = 1 - p$ is gaat de formule dan in de formule (1) over.

Voor de kans l_i, dat er i of meer gebeurtenissen (onverschillig welke) plaats vinden, heeft men:

$$l_i = k_i + k_{i+1} + k_{i+2} + \ldots\ldots + k_n =$$

$$= S_i - (i+1)_1 S_{i+1} + (i+2)_2 S_{i+2} - (i+3)_3 S_{i+3} + \ldots\ldots + (-1)^{n-i} (n)_{n-i} S_n +$$
$$+ S_{i+1} - (i+2)_1 S_{i+2} + (i+3)_2 S_{i+3} - \ldots\ldots + (-1)^{n-i-1} (n)_{n-i-1} S_n +$$
$$+ S_{i+2} - (i+3)_1 S_{i+3} + \ldots\ldots + (-1)^{n-i-2} (n)_{n-i-2} S_n +$$
$$+ S_{i+3} - \ldots\ldots + (-1)^{n-i-3} (n)_{n-i-3} S_n +$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ S_n.$$

Door op ieder der hierin voorkomende binomiaalcoëfficienten de formule

$$(a)_b = (a-1)_{b-1} + (a-1)_b$$

toe te passen vindt men:

$$l_i = S_i - (i)_1 S_{i+1} + (i+1)_2 S_{i+2} -$$
$$-(i+2)_3 S_{i+3} + \ldots\ldots + (-1)^{n-i} (n-1)_{n-i} S_n \quad \ldots (4)$$

Voor $i=1$ gaat deze formule in de formule (1) over. Voor $i=0$ vindt men naar behooren $l_0 = 1$, daar $S_0 = 1$ is en de binomiaalcoëfficienten $(0)_1$, $(1)_2$, $(2)_3$ enz. alle nul zijn.

Beschouwen we nu het bijzondere geval, dat alle p's met hetzelfde aantal indices onderling gelijk zijn, dus $p_1 = p_2 = \ldots = p_n$, $p_{12} = p_{13} = p_{23} = \ldots$, enz. Men heeft dan:

$$S_i = (n)_i \; p_{12\ldots i} \;,$$
$$S_{i+1} = (n)_{i+1} p_{12\ldots i+1} \;;$$
enz.,

zoodat de formules voor k_i en l_i overgaan in:

$$k_i = \frac{n!}{i!}\left\{\frac{1}{n-i!} p_{12\ldots i} - \frac{1}{1!\,n-i-1!} p_{12\ldots i+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2!\,n-i-2!} p_{12\ldots i+2} - \ldots + (-1)^{n-i} \frac{1}{n-i!} p_{12\ldots n}\right\} =$$
$$= (n)_i \{p_{12\ldots i} - (n-i)_1 p_{12\ldots i+1} +$$
$$+ (n-i)_2 p_{12\ldots i+2} - \ldots\ldots + (-1)^{n-i} (n-i)_{n-i} p_{12\ldots n}\}, \quad \ldots (5)$$

$$l_i = \frac{n!}{i-1!}\left\{\frac{1}{n-i!\,i}p_{12\ldots i} - \frac{1}{1!\,n-i-1!\,(i+1)}p_{12\ldots i+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!\,n-i-2!\,(i+2)}p_{12\ldots i+2} - \ldots + (-1)^{n-i}\frac{1}{n-i!\,n}p_{12\ldots n}\right\} =$$

$$= (n)_i\, i\left\{\frac{1}{i}p_{12\ldots i} - \frac{(n-1)_1}{i+1}p_{12\ldots i+1} + \right.$$

$$\left. + \frac{(n-1)_2}{i+2}p_{12\ldots i+2} - \ldots + (-1)^{n-i}\frac{1}{n}p_{12\ldots n}\right\} \ldots\ldots (6)$$

Vervolgens passen we de gevonden formules op een drietal vraagstukken toe.

Als eerste toepassing kiezen we het *rencontrespel* van DE MONTMORT. Men heeft een bak met m genummerde ballen, die blindelings getrokken worden zonder ze terug te werpen. Telkens als de a^{de} getrokken bal het nummer a draagt heeft men een rencontre. We trekken n ballen ($n \leqq m$) en vragen naar de kans k_i op i en niet meer rencontres en naar de kans l_i op i of meer rencontres.

Hier doet zich de boven genoemde bijzonderheid voor, dat alle p's met hetzelfde aantal indices onderling gelijk zijn, zoodat we de formules (5) en (6) kunnen toepassen. Men heeft nu:

$$p_{12\ldots j} = \frac{1}{m(m-1)(m-2)\ldots(m-j+1)} = \frac{m-j\,!}{m\,!},$$

zoodat we voor de kans op i en niet meer onbepaalde rencontres vinden:

$$k_i = \frac{n\,!}{i\,!\,m\,!}\left\{\frac{m-i\,!}{n-i\,!} - \frac{m-i-1\,!}{1\,!\,n-i-1\,!} + \frac{m-i-2\,!}{2\,!\,n-i-2\,!} - \right.$$

$$\left. - \frac{m-i-3\,!}{3\,!\,n-i-3\,!} + \ldots + (-1)^{n-i}\frac{m-n\,!}{n-i\,!}\right\},$$

en voor de kans op i of meer onbepaalde rencontres:

$$l_i = \frac{n\,!}{i-1\,!\,m\,!}\left\{\frac{m-i\,!}{n-i\,!\,i} - \frac{m-i-1\,!}{1\,!\,n-i-1\,!\,(i+1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{m-i-2\,!}{2\,!\,n-i-2\,!\,(i+2)} - \ldots + (-1)^{n-i}\frac{m-n\,!}{n-i\,!\,n}\right\}.$$

Deze vergelijkingen vereenvoudigen zich aanzienlijk, wanneer *alle* ballen getrokken worden, dus $n = m$ is. Men vindt dan:

$$k_i = \frac{1}{i\,!}\left\{\frac{1}{2\,!} - \frac{1}{3\,!} + \frac{1}{4\,!} - \ldots + (-1)^{m-i}\frac{1}{m-i\,!}\right\},$$

$$l_i = \frac{1}{i-1\,!}\left\{\frac{1}{i} - \frac{1}{1\,!\,(i+1)} + \frac{1}{2\,!\,(i+2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{3\,!\,(i+3)} + \ldots\ldots + (-1)^{m-i}\frac{1}{m-i\,!\,m}\right\}.$$

Als tweede toepassing kiezen we het volgende bekende vraagstuk. Uit een bak, waarin zich m genummerde ballen bevinden, wordt v maal een bal getrokken, die daarna in den bak teruggeworpen wordt. Hoe groot is de kans dat a bepaalde nummers onder de getrokkene behooren, hoe groot de kans dat het aantal verschillende getrokken nummers juist a is, en hoe groot de kans dat dit aantal a of meer bedraagt?

De kans r, dat a bepaalde nummers getrokken worden, heeft tot tegenkans de waarschijnlijkheid $1 - r$, dat minstens één dier nummers niet getrokken wordt. Ook nu zijn weer (evenals bij de beide andere vragen) alle p's met hetzelfde aantal indices gelijk, en wel:

$$p_{12\ldots j} = \left(\frac{m-j}{m}\right)^{v}.$$

In de formule (1) is nu $n = a$ en $p = 1 - r$, zoodat men vindt:

$$r = 1 - (a)_1\left(\frac{m-1}{m}\right)^{v} +$$

$$+ (a)_2\left(\frac{m-2}{m}\right)^{v} - (a)_3\left(\frac{m-3}{m}\right)^{v} + \ldots\ldots + (-1)^{a}\left(\frac{m-a}{m}\right)^{v}.$$

Om de kans s te bepalen, dat er a en niet meer nummers (onverschillig welke) getrokken zijn, merken we op, dat dit gelijk staat met de kans, dat er juist $m - a$ nummers niet getrokken zijn. In verg. (5) is nu $n = m$ en $i = m - a$, terwijl $p_{12\ldots j}$ de reeds aangegeven waarde heeft. Men vindt derhalve voor de gezochte kans:

$$s = (m)_a\left\{\left(\frac{a}{m}\right)^{v} - (a)_1\left(\frac{a-1}{m}\right)^{v} + (a)_2\left(\frac{a-2}{m}\right)^{v} - \right.$$

$$\left. - (a)_3\left(\frac{a-3}{m}\right)^{v} + \ldots\ldots + (-1)^{a-1}(a)_{a-1}\left(\frac{1}{m}\right)^{v}\right\}.$$

De kans t, dat er a of meer verschillende nummers getrokken zijn of dat er $m-a$ of minder nummers niet getrokken zijn, heeft tot tegenkans de kans $1-t$, dat er $m-a+1$ of meer nummers niet getrokken zijn. In verg. (6) is dus $n=m$, $i=m-a+1$ en $l_i=1-t$, zoodat we vinden:

$$t=1-\frac{m!}{m-a!}\left\{\frac{1}{a-1!(m-a+1)}\left(\frac{a-1}{m}\right)^v-\frac{1}{1!a-2!(m-a+2)}\left(\frac{a-2}{m}\right)^v+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2!a-3!(m-a+3)}\left(\frac{a-3}{m}\right)^v-\ldots+(-1)^{a-2}\frac{1}{a-2!1!(m-1)}\left(\frac{1}{m}\right)^v\right\}=$$

$$=1-(m)_{a-1}(m-a+1)\left\{\frac{1}{m-a+1}\left(\frac{a-1}{m}\right)^v-\frac{(a-1)_1}{m-a+2}\left(\frac{a-2}{m}\right)^v+\right.$$

$$\left.+\frac{(a-1)_2}{m-a+3}\left(\frac{a-3}{m}\right)^v-\ldots+(-1)^{a-2}\frac{(a-1)_{a-2}}{m-1}\left(\frac{1}{m}\right)^v\right\}.$$

Voor $a=m$ gaat zoowel r als s als t over in de kans dat alle nummers minstens éénmaal getrokken zijn, die dus gelijk is aan:

$$1-(m)_1\left(\frac{m-1}{m}\right)^v+(m)_2\left(\frac{m-2}{m}\right)^v-(m)_3\left(\frac{m-3}{m}\right)^v+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{m-1}(m)_{m-1}\left(\frac{1}{m}\right)^v.$$

Als laatste teepassing kies ik het volgende vraagstuk, dat ik aan een persoonlijke mededeeling van Prof. P. H. SCHOUTE ontleen. In een bak bevinden zich m genummerde ballen. Er wordt v maal een bal getrokken, die teruggeworpen wordt. Hoe groot is de kans, dat de nummers 1, 2, 3, ..., a minstens éénmaal in de natuurlijke volgorde verschijnen? Hoe groot is de kans dat dit juist i maal en hoe groot de kans dat dit minstens i maal gebeurt?

Bij dit vraagstuk doet zich de bijzonderheid van de gelijkheid der p's, die een zelfde aantal indices dragen, niet voor. Wel zijn de p's met één index nog alle gelijk en wel $\left(\frac{1}{m}\right)^a$. De p's met meerdere, b.v. die met j indices ($j \geqq 2$) zijn òf nul òf $\left(\frac{1}{m}\right)^{ja}$, het laatste wanneer alle opvolgende indices a of meer verschillen, als n.l. de indices de rangnummers der trekkingen aangeven, die een reeks 1, 2, 3, ..., a openen; het optreden van

twee zulke reeksen, waarvan de eerste nummers minder dan a trekkingen uiteenliggen, is onmogelijk en heeft dus een kans 0 (dit over elkaar grijpen der reeksen is wel mogelijk als gevraagd wordt naar de kans, dat een bepaald nummer a maal achtereen verschijnt). Het aantal manieren, waarop de gebeurtenis (het verschijnen der reeks 1, 2, ..., a) zich kan voordoen (dus de n der formules), is gelijk aan $v - a + 1$, dus

$$S_1 = (v - a + 1)\left(\frac{1}{m}\right)^a.$$

Om S_2, S_3, enz. te bepalen heeft men slechts na te gaan hoeveel van nul verschillende p's met 2, 3, enz. indices er zijn. Dit aantal bedraagt voor de p's met j indices

$$(v - ja + j)_j.$$

Immers bij een van 0 verschillende p met j indices is iedere index minstens a grooter dan de voorafgaande. Door van ieder dier p's den 2^den^ index met $a - 1$, den 3^den^ index met $2(a - 1)$, enz. en eindelijk den j^{den} index met $(j - 1)(a - 1)$ te verminderen krijgt men alle p's met j verschillende indices genomen uit de getallen 1, 2, 3, ..., $v - a + 1 - (j-1)(a-1) = v - ja + j$, waarvan het aantal $(v - ja + j)_j$ bedraagt. Men heeft dus:

$$S_j = (v - ja + j)_j \frac{1}{m^{ja}}.$$

Voor de kans p, dat minstens éénmaal de reeks 1, 2, ..., a verschijnt, vindt men derhalve:

$$p = (v - a + 1)_1 \frac{1}{m^a} - (v - 2a + 2)_2 \frac{1}{m^{2a}} + \\ + (v - 3a + 3)_3 \frac{1}{m^{3a}} - (v - 4a + 4)_4 \frac{1}{m^{4a}} + \ldots,$$

welke reeks voortgezet moet worden totdat men op binomiaalcoëfficienten stuit, die nul zijn, d. w. z. van den vorm $(c)_d$ voor $d > c$. Voor de kans k_i, dat de reeks 1, 2, ..., a zich juist i maal vertoont, vindt men:

$$k_i = \frac{1}{i!}\left\{\frac{v - i(a-1)!}{v - ia!}\frac{1}{m^{ia}} - \frac{v - (i+1)(a-1)!}{1!\, v - (i+1)a!}\frac{1}{m^{(i+1)a}} + \right. \\ \left. + \frac{v - (i+2)(a-1)!}{2!\, v - (i+2)a!}\frac{1}{m^{(i+2)a}} - \ldots\right\},$$

en voor de kans l_i, dat dit i of meer maal gebeurt:

$$l_i = \frac{1}{i-1\,!}\left\{\frac{v-i(a-1)\,!}{v-ia\,!\,i}\,\frac{1}{m^{ia}} - \frac{v-(i+1)\,(a-1)\,!}{1\,!\,v-(i+1)a\,!\,(i+1)}\,\frac{1}{m^{(i+1)a}} + \right.$$

$$\left. + \frac{v-(i+2)\,(a-1)\,!}{2\,!\,v-(i+2)\,a\,!\,(i+2)}\,\frac{1}{m^{(i+2)a}} - \dots\right\}.$$

De kans b.v. om met een dobbelsteen in 1000 worpen 3- of meer maal de reeks 1, 2, 3, 4, 5 te zien verschijnen ($m=6$, $v=1000$, $a=5$, $i=3$) is:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{988\times987\times986}{3}\,\frac{1}{6^{15}} - \frac{984\times983\times982\times981}{4}\,\frac{1}{6^{20}} + \right.$$

$$\left. + \frac{980\times979\times978\times877\times976}{2\times5}\,\frac{1}{6^{25}} - \frac{976\times975\times974\times973\times972\times971}{2\times3\times6}\,\frac{1}{6^{30}} + \dots\right\} =$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(0{,}000681649 - 0{,}000063715 + 0{,}000003147 - 0{,}000000107 +$$

$$+ 0{,}000000003) = 0{,}000310488.$$

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES CUBIQUES,

PAR

F. GOMES TEIXEIRA.
(Oporto.)

[Extrait d'une lettre adressée à P. H. SCHOUTE.]

Nous allons donner dans cette Note quelques théorèmes relatifs aux cubiques qui n'ont pas encore été remarqués peut-être.

1. Considérons une cubique quelconque représentée par l'équation

$$Ax_1^3 + Bx_1^2y_1 + Cx_1y_1^2 + Dy_1^3 + Ex_1^2z_1 + Fx_1y_1z_1 + \\ + Gy_1^2z_1 + Hx_1z_1^2 + Ky_1z_1^2 + Lz_1^3 = 0,$$

et la polaire du point ($x_1 = 0$, $z_1 = 0$)

$$Bx_1^2 + 2Cx_1y_1 + 3Dy_1^2 + Fx_1z_1 + 2Gy_1z_1 + Kz_1^2 = 0.$$

On voit au moyen de ces équations que, si l'on prend pour côté des z_1 du triangle de reférence la tangente à cette cubique à un point A, pour côté des x_1 une droite qui passe par A et par deux points quelconques A_1 et A_2 de la même cubique, et pour côté des y_1 la tangente à la polaire de A au point où cette conique, dont l'équation a été écrite ci-dessus, coupe la droite A_1A_2, on a $C = 0$, $D = 0$, $F = 0$ et $K = 0$, et que par suite l'équation de la cubique considérée prend la forme

$$z_1(Gy_1^2 + Lz_1^2) + Ax_1^3 + Bx_1^2y_1 + Ex_1^2z_1 + Hx_1z_1^2 = 0.$$

Remarquons maintenant que cette équation fait voir que, si $G = 0$, le point A, où $x_1 = 0$ et $z_1 = 0$, est double, et que, si $L = 0$, les points A_1 et A_2, où la droite coupe la cubique, coïncident. Donc, si la droite AA_1A_2 coupe la cubique donnée en trois points distincts, on peut poser

$$x = \frac{y_1}{x_1},\ y = \frac{z_1}{x_1}\sqrt{\frac{L}{G}},$$

ce qui donne une équation de la forme

$$y(x^2+y^2)+H_1y^2+E_1y+B_1x+A_1=0,$$

laquelle représente une *cubique circulaire*, qui est donc une *perspective* de la cubique donnée.

Voici maintenant quelques conséquences de ce résultat.

En remarquant qu'aux points A_1 et A_2 de la cubique donnée correspondent les points circulaires de l'infini de la cubique circulaire et en se fondant sur les propriétés de cette cubique et sur les propriétés de la transformation homographique, on peut énoncer les théorèmes suivants:

Une cubique générale quelconque peut être considérée de quatre manières différentes comme l'enveloppe d'une série de coniques bitangentes qui passent par deux points fixes A_1 et A_2 de la même cubique.

Si la cubique est rationnelle, le nombre des séries de coniques bitangentes dont elle est l'enveloppe se réduit à deux si elle a un noeud, à un si elle a un point de rebroussement. Dans ce cas elle est, en outre, l'enveloppe d'une série de coniques simplement tangentes, qui passent par le point double.

Les tangentes à une cubique générale passant aux points A_1 et A_2 déterminent par leurs intersections 16 *points, situés sur quatre coniques, qui passent par A_1 et A_2, et chaque conique en contient* 4.

2. On sait que toute cubique circulaire qui passe par son *foyer singulier* est le lieu des points de contact des tangentes menées par un point fixe B aux cercles, réels ou imaginaires, qui passent par deux points donnés B_1 et B_2, que B coïncide avec ce foyer, et que la cubique passe par B_1 et B_2. Nous ajouterons que la polaire de B par rapport à la cubique est un des cercles considérés. En effet, si l'on prend le point B pour origine des coordonnées, une droite parallèle à B_1B_2 pour axe des ordonnées et une perpendiculaire à cette droite pour axe des abscisses, et si l'on représente par (α, β) les coordonnées du milieu de la corde B_1B_2 et par c sa longueur, l'équation de la cubique considérée est la suivante:

$$x(x^2+y^2)-2\alpha(x^2+y^2)+(\alpha^2-\beta^2+c^2)x+2\alpha\beta y=0,$$

et l'équation de la polaire du point (0, 0) est donc

$$\alpha(x^2+y^2)-(\alpha^2-\beta^2+c^2)x-2\alpha\beta c=0;$$

or, cette équation représente un cercle qui passe parles points $(\alpha, \beta \pm c)$.

3. Cela posé, nous allons donner un théorème générale sur les cubiques qu'on obtient au moyen des propriétés des cubiques circulaires qu'on vient de rappeler et de la théorie donnée au no. 1.

Considérons pour cela, comme au no. 1, une cubique quelconque donnée et trois points A, A_1, A_2 de cette cubique, situés sur une même droite, et supposons maintenant que les tangentes à cette cubique aux points A_1 et A_2 se coupent en un point U de la même courbe. Alors les asymptotes imaginaires de la cubique circulaire *correspondante* se coupent aussi en un point situé sur cette dernière courbe, qui en est donc le *foyer singulier*, et cette cubique appartient donc au groupe des cubiques circulaires qu'on vient de considérer. En remarquant maintenant qu'à ce foyer B correspond le point U de la cubique donnée et qu'aux points circulaires de l'infini et aux points B_1 et B_2 de la cubique circulaire correspondent les points A_1 et A_2 et les deux autres points où la polaire de U coupe la conique donnée, nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Toute cubique est le lieu des points de contact des tangentes menées par un quelconque de ses points U aux coniques qui passent par les quatre points où la cubique est coupée par la polaire du point U considéré.

DIE ZENTRISCHE ZERLEGUNG DER REGULÄREN POLYTOPE,

VON

J. A. BARRAU,
(Amsterdam).

Von der Mathematischen Gesellschaft in Amsterdam wurde als Preisaufgabe No. 5 für das Jahr 1905 gefragt nach den zentrischen Zerlegungen der regulären Polytope in Räumen von einer Dimensionenzahl bis zwanzig einschliesslich.

Nachstehender Aufsatz enthält die der Bekrönung würdig erachtete Antwort, welche zwar über die in der Aufgabe gestellte Grenze hinausgeht, jedoch die auf ganz beliebige Dimensionenzahl verallgemeinerte Frage nicht endgültig löst.

§ 1. Die regulären Polytope in R_n lassen sich in zwei Gruppen einteilen:

1°. Die *allgemeinen Polytope*, bestehend für jedes n.

Sie sind:

das *Simplex* A_n, zu sich selbst reziprok;
das *Masspolytop* B_n, und das *Kreuzpolytop* C_n, } unter sich reziprok.

2°. Die *Extrapolytope*, nur für $n = 3$ und $n = 4$.

Sie sind in R_3:

das *Dodekaeder* K_{12}, und das *Ikosaeder* K_{20}, } unter sich reziprok;

in R_4:

das *Vierundzwanzigzell* Z_{24}, zu sich selbst reziprok;
das *Sechshundertzell* Z_{600}, und das *Hundertzwanzigzell* Z_{120}, } unter sich reziprok.

Jeder Zerlegung eines Polytopes nach den Eckpunkten entspricht eine dualistische des reziproken Polytopes nach den Grenzräumen und umgekehrt; es genügt also die Zerlegungen nach den Eckpunkten zu untersuchen.

Für $n = 3$ und $n = 4$ sind diese bekannt und lauten:

I: $B_3 = 2A_3$ oder: die acht Eckpunkte des Hexaeders zerfallen in zwei Gruppen von je vier; jede Gruppe bildet die Eckpunkte eines Tetraeders.

II: $K_{12} = 5A_3$ (auf zwei Weisen ausführbar).

III: $2 \times K_{12} = 5B_3$ oder: die Eckpunkte des Dodekaeders bilden zweimal genommen die Eckpunkte von fünf Hexaedern.

IV: $B_4 = 2C_4$.
V: $Z_{24} = 3C_4$.
VI: $2 \times Z_{24} = 3 \times B_4$.
VII: $Z_{600} = 5Z_{24}$ (auf zehn Weisen).
VIII: $Z_{600} = 15C_4$ (aus VII und V).
IX: $2 \times Z_{600} = 15B_4$ (aus VII und VI).
X: $Z_{120} = 5Z_{600}$ (auf zwei Weisen).
XI: $Z_{124} = 25Z_{24}$ (aus X und VII).
XII: $Z_{120} = 75\ C_4$ (aus X und VIII).
XIII: $2 \times Z_{120} = 75B_4$ (aus X und IX).

Für die Beweise sehe man: P. H. Schoute, *Mehrdimensionale Geometrie*, *II*, §§ 6, 7; Projektionen der regulären Polytope in R_4 (Z_{120} ausgenommen), worin sich diese Zerlegungen auffinden lassen, sind gegeben von Dr. S. L. van Oss in „*Die Bewegungsgruppen der regelmässigen Gebilde von vier Dimensionen*", Utrecht, 1894 und „*Das regelmässige* 600-*Zell*" (*Verhandelingen Kon. Akad. Amsterdam*, 1899).

Für $n > 4$ ist von Prof. Dr. P. H. Schoute (*Verslagen Kon. Akad. Amsterdam* 1903, p. 605) die Zerlegbarkeit mitgeteilt von B_n in A_n, falls $n = 2^p - 1$ und von B_n in C_n, falls $n = 2^p$. Da dieser Mitteilung keine Beweise zugefügt sind und die Zerlegungen uns erscheinen als erster Fall von damit analogen Reihen, werden sie im Folgenden nochmals abgeleitet.

§ 2. Die Eckpunkte eines Kreuzpolytopes C_n weisen keine andern Abstände unter sich auf als die Kantenlänge $= 1$ und die Diagonallänge $= \sqrt{2}$. Da die Diagonalen sich alle im Zentrum schneiden, können sie nicht als Kanten eines Simplexes A_n verwendet werden; wäre ein solches vorhanden, dann müsste es also die Kantenlänge $= 1$ haben. Unter seinen $(n + 1)$ Eckpunkten dürften also keine gegenüberliegenden im C_n vorkommen, oder die $(n + 1)$ Punkte müssten Endpunkte von

ebensoviel verschiedenen Diagonalen angehörenden Hälften sein. Da aber das C_n nur n Diagonalen besitzt, haben wir:

Das Vorkommen von A_n in C_n ist für jedes n ausgeschlossen.

Zur Untersuchung, ob unter den Eckpunkten eines Masspolytopes B_n Gruppen A_n oder C_n vorkommen können, führen wir die folgende Bezeichnung ein. Ein beliebiger Eckpunkt wird als Nullpunkt 0 gewählt, die n davon ausgehenden Kantenrichtungen heissen $a, b, c \dots$ und mit denselben Buchstaben bezeichnen wir ihre Endpunkte $a, b, c \dots$ Von jedem dieser Punkte aus erreicht man $(n-1)$ neue $ab, ac \dots, bc, bd \dots$ u. s. w. So fortfahrend endet man mit dem Punkte, der alle n Indices trägt und dem Punkte 0 gegenüber liegt. Die Bezeichnung ist eindeutig, die Anzahl der gebrauchten Notationen ist $1 + \binom{1}{n} + \binom{2}{n} + \dots \binom{n}{n} = 2^n$, wie die der Eckpunkte. Hat man eine den Punkt 0 enthaltende Gruppe A_n oder C_n aufgefunden, so liefert Permutation der Indices im Allgemeinen eine neue Gruppe derselben Art.

Um aber auch die 0 nicht enthaltenden Gruppen erreichen zu können, bedienen wir uns einer Operation, die wir „*Ueberdecken*" nennen. Die Ueberdeckung eines Eckpunktes *adefk* mit *abfgl* liefert einen neuen Eckpunkt, welcher diejenigen Indices trägt, die nur in einem der vorliegenden Symbole vorkommen, also *bdeglk*. Die Operation lässt sich auch als eine Multiplication auffassen, wobei $a^2 = b^2 = c^2 = \dots = 1$ gesetzt wird. Werden nun alle Punkte einer Gruppe A_n oder C_n einer gleichen Ueberdeckung unterworfen, so entsteht immer wieder eine solche Gruppe, da die Operation die gegenseitigen Abstände der Punkte ungeändert lässt. Der Abstand zweier Punkte ist nämlich, wenn das B_n die Kantenlänge $= 1$ besitzt, gleich der Quadratwurzel aus der Zahl der Indices, die bei Ueberdeckung der zwei Punkte mit einander bestehen bleiben.

§ 3. Satz I: *Das Vorkommen von A_n in B_n ist ausgeschlossen, wenn nicht $n = 4p + 3$.*

Denn, wählt man einen der Eckpunkte des A_n als Nullpunkt 0, dann müssen die übrigen n Punkte wegen der gleichen Abstände zum Anfangspunkt, aus der gleichen Anzahl Buchstaben bestehende Bezeichnungen erhalten; diese Zahl sei x.

Die Vectorsumme der von 0 ausgehenden Kanten des A_n besteht also aus nx Kantenvectoren des B_n und der $(n+1)^{te}$ Teil dieser Summe führt vom Nullpunkte zum Zentrum des A_n.

Dieses Zentrum muss zusammenfallen mit dem des B_n, das durch Addition der Hälften von allen n Kantenvectoren des B_n erreicht wird; es müssen also erstens in der ersterwähnten Vectorsumme alle n Buchstaben, jeder x Mal, vorkommen, und zweitens muss $\frac{x}{n+1} = \frac{1}{2}$ oder $n = 2x - 1$ sein; die Zahl n muss also ungerade sein.

Nun müssen aber die, jeder mit x Indices bezeichneten, Eckpunkte unter sich Abstände $= \sqrt{x}$ aufweisen; dieses ist nur möglich, wenn von den x Buchstaben jedesmal $\frac{x}{2}$ verschieden und $\frac{x}{2}$ gemeinschaftlich sind; x ist also gerade und $n = 4p + 3$. Als Beispiel erwähnen wir die Zerlegung des Hexaeders, wo $n = 3$ und $x = 2$ ist; die mit dem Nullpunkte verbundenen Eckpunkte des ersten Tetraeders sind ab, ac und bc.

§ 4. Satz II. *Das Vorkommen von* C_n *in* B_n *ist ausgeschlossen, wenn nicht* $n = 4p$.

Denn gehört 0 zum C_n, dann muss wegen der zentrischen Lage auch der gegenüberliegende Punkt dazu gehören; die Diagonale des C_n ist also $\sqrt{n}$, die Kante $\sqrt{\frac{1}{2}}$ und jeder der übrigen Eckpunkte trägt $\frac{1}{2}n$ Buchstaben; also muss n gerade sein. Zwei solche Eckpunkte müssen wieder auf Abstand $\sqrt{\frac{1}{2}n}$ liegen, also $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}n$ Buchstaben gemeinschaftlich und ebensoviele verschieden haben, oder $n = 4p$. Zum Beispiel enthält B_4 das C_4 mit den Eckpunkten 0, ab, ac, bc, cd, bd, ad, $abcd$.

§ 5. Satz III. *Wenn* B_n *eine Gruppe* A_n *enthält, enthält* B_{n+1} *eine Gruppe* C_{n+1} *und umgekehrt.*

Denn, wählen wir einen Eckpunkt des A_n als Nullpunkt, dann lassen sich die übrigen nach dem in § 3 beschriebenen Schema anordnen; jeder Punkt trägt $\frac{n+1}{2} = m$ Buchstaben und hat davon mit jedem andern $\frac{m}{2}$ gemeinsam. Schreibt man nun das komplementäre Schema aus, so trägt jeder seiner Punkte

$\frac{n-1}{2} = m - 1$ Buchstaben; unter sich haben diese Punkte davon $\frac{m}{2} - 1$ gemeinsam, mit jedem der ersteren (den Komplementären ausgenommen) jedoch wieder $\frac{m}{2}$. Fügt man nun jedem Punkte des zweiten Schemas den Buchstaben der $(n+1)^{\text{ten}}$ Dimension zu, so wird die Anzahl der gemeinsamen Indices in der zweiten Gruppe wieder auf $\frac{m}{2}$ gebracht, übrigens in diesen Anzahlen nichts geändert. Nimmt man nun noch den gegenüberliegenden Punkt von 0 auf, so hat man $2(n+1)$ Punkte, welche unter sich, wenn nicht gegenüberliegend, den Abstand $\sqrt{m}$ haben, also ein C_n.

In dieser Weise erhält man aus dem A_3:

$$0, ab, ac, bc, \text{ das } C_4:$$

$$0, ab, ac, bc; abcd, cd, bd, ad.$$

Geometrisch bedeutet dies, dass die in einem Grenzraume B_n des B_{n+1} enthaltene Gruppe A_n mit den im B_{n+1} gegenüberliegenden Punkten ein C_{n+1} bildet.

Ist umgekehrt ein C_{n+1} gegeben so erhält man daraus durch Unterdrückung der, einen beliebigen Buchstaben enthaltenden Eckpunkte ein A_n; dieser Unterdrückung entspricht geometrisch eine orthogonale Projektion, der fortgelassenen Kantenrichtung parallel.

§ 6. Satz IV. *Wenn* B_n *ein* A_n *enthält, enthält auch* B_{2n+1} *ein* A_{2n+1}.

Denn dem, den Nullpunkt enthaltenden, Schema von A_n lässt sich nach § 5 ein zweites, komplementäres hinzufügen, das mit einer neuen Kantenrichtung ergänzt die $(n+1)$ fehlenden Eckpunkte eines C_{n+1} liefert. Bildet man nun aus den n übrigen Buchstaben wieder dasselbe Schema A_n und vereinigt jedes der beiden ersteren mit diesem, in der Weise dass die Punkte 0 zusammen den neuen Nullpunkt bilden und weiter je zwei komplementäre Punkte des C_{n+1} mit demselben des dritten Schemas ergänzt werden, so erhält man die $(2n+2)$ Eckpunkte des A_{2n+1}.

Als Beispiel geben wir den Aufbau des A_7 aus A_3.

0						
a	b			e	f	
a		c		e		g
	b	c			f	g
a	b	c	d			
		c	d	e	f	
	b		d	e		g
a			d		f	g

Auf der geometrischen Deutung dieser Synthese kommen wir noch in § 12 zurück.

§ 7. Durch Anwendung der Sätze aus § 5 und § 6 lassen sich nun die in § 7 erwähnten, von Prof. SCHOUTE mitgeteilten Zerlegungen aus der Zerlegung des Hexaeders aufbauen. Es folgt nach § 6 die Zerlegung von B in A für $n = 7, 15 \ldots$ (allgemein $2^\nu - 1$); nach § 5 die Zerlegung von B in C für $n = 4, 8, 16 \ldots 2^\nu$. Dass hierbei immer das B völlig in A oder C zerfällt, zeigen wir in § 8 durch „Ueberdeckung".

Wir können sagen: N = 3 eröffnet die Zerlegungsreihe $2^\nu - 1$ und 2^ν.

Die nächste Reihe eröffnet mit N = 11, es folgen 23, 47 ..., ebenso 12, 24, 48 .... Die Anfangsglieder der verschiedenen Reihen sind von der Form $N = 8m + 3$; ist für eine solche primäre Anzahl die Zerlegung gesichert, so folgt jedesmal die ganze Reihe nach § 5 und 6.

Im Folgenden sind die Zerlegungen für N = 3, 11, 19, 27, 35 ausgeführt; ein Beweis jedoch, dass sie für beliebiges N ausführbar seien, hat sich nicht ergeben.

§ 8. N = 3.

Nach dem oben angegebenen Verfahren sind in Tafel I für $n = 3, 4, 7, 8, 15, 16, 31$ die Eckpunkte eines im B enthaltenen A oder C gegeben. Die erste Horizontalreihe ist immer Nullpunkt, die folgenden Reihen denke man sich mit den Buchstaben versehen, deren entsprechendes Feld geschwärzt ist; sie liefern so die Bezeichnung der übrigen Eckpunkte.

Durch diese Figur erhält zugleich die Frage nach der Zerlegbarkeit des B in A oder C die Form eines *Parquetierungsproblems*, welches sich auf zwei, nach § 5 gleichbedeutende, Weisen formulieren lässt:

I *Ist es stets möglich die Felder eines Quadrates, das in jeder Seite* $n = 4p + 3$ *Felder hat, so schwarz und weiss zu malen, dass in jeder Reihe (horizontal und vertikal)* $2p + 2$ *schwarze Felder kommen, wovon bei zwei beliebigen Reihen die Hälfte auf übereinstimmender, die andere auf abweichender Stelle liegt?*

Nach Hinzufügung des Nullpunktes bezeichnet ein solches Schema dann ein A.

II *Ist es stets möglich die Felder eines Quadrates mit der Seitenlänge* $n = 4p$ *so schwarz und weiss zu malen, dass in zwei beliebigen Reihen ebensoviele Uebereinstimmungen als Abweichungen der Farbe auf entsprechenden Feldern vorkommen?*

Nach Hinzufügung des komplementären Quadrates bezeichnet ein solches Schema ein C.

Wie mich Prof. Korteweg erinnerte, haben sich mit der zweiten Frage schon einige Mathematiker beschäftigt: in Lucas, *Récréations Mathematiques*, II, p. 113 findet man dass Sylvester solche Quadrate *anallagmatisch* nannte, und dass Laisant für $n = 2^p$ ein Konstruktionsverfahren angab, das im Wesentlichen mit dem obigen übereinstimmt.

Es muss noch gezeigt werden, dasz für die Reihe $N = 3$ das B jedesmal völlig in A oder C zerfällt.

Betrachten wir hierzu das Schema für $n = 3$, also 0, ab, ac, bc, so sehen wir, dass Ueberdeckung des ganzen Schemas mit einem seiner Eckpunkte, ab z.B. das Schema in sich selbst überführt. Es folgt hieraus, dass Ueberdeckung nach allen 2^3 Eckpunkten des B nur $2^3 : 2^2 = 2$ verschiedene A liefert, wobei auch jeder Eckpunkt der B erreicht wird. Also ist schon $B_3 = 2A_3$.

Da nun aber jedes Schema für höheres n aus dem vorangehenden, also zum Schluss aus dem für $n = 3$ zusammengesetzt ist, trifft derselbe Umstand für jedes n der Reihe ein, die Ueberdeckungen nach allen 2^n Eckpunkten des B bilden Gruppen bestehend aus $(n + 1)$ Ueberdeckungen für eine Zerlegung in A, aus $2n$ für eine Zerlegung in C, sodass jede Gruppe nur ein und dasselbe neue A oder C liefert.

Da aber jeder Punkt erreicht wird, nämlich durch die Ueberdeckung mit seinem eigenen Symbole, hat man:

$$B_{2^\nu} = \frac{2^{2^\nu}}{2 \times 2^\nu} C_{2^\nu} = 2^{2^\nu - \nu - 1} C_{2^\nu}$$

$$\text{und } B_{2^\nu - 1} = \frac{2^{2^\nu - 1}}{2^\nu - 1 + 1} A_{2^\nu - 1} = 2^{2^\nu - \nu - 1} A_{2^\nu - 1}.$$

Es folgt als Beispiel, und zur weiteren Benützung in § 14, in nachstehender Tabelle die Zerlegung des B_7 in 16 A_7. Die einfachsten 16 Ueberdeckungen von verschiedener Gruppe sind hier die nach 0, *a*, *b*, ... *f* und die 8 komplementären.

I	II	III	IV
0	*a*	*b*	*c*
abcd	*bcd*	*acd*	*abd*
abef	*bef*	*aef*	*abcef*
aceg	*ceg*	*abceg*	*aeg*
adfg	*dfg*	*abdfg*	*acdfg*
bcfg	*abcfg*	*cfg*	*bfg*
bdeg	*abdeg*	*deg*	*bcdeg*
cdef	*acdef*	*bcdfe*	*def*

V	VI	VII	VIII
d	*e*	*f*	*g*
abc	*abcde*	*abcdf*	*abcdg*
abdef	*abf*	*abe*	*abefg*
acdeg	*acg*	*acefg*	*ace*
afg	*adefg*	*adg*	*adf*
bcdfg	*bcefg*	*bcg*	*bcf*
beg	*bdg*	*bdefg*	*bde*
cef	*cdf*	*cde*	*cdefg*

IX	X	XI	XII
abcdef	*abcdeg*	*abcdfg*	*abcefg*
ef	*eg*	*fg*	*defg*
cd	*cdfg*	*cdeg*	*cg*
bdfg	*bd*	*bdef*	*bf*
bceg	*bcef*	*bc*	*bcde*
adeg	*adef*	*ad*	*ae*
acfg	*ac*	*acef*	*acdf*
ab	*abfg*	*abeg*	*abdg*

XIII	XIV	XV	XVI
abdefg	*acdefg*	*bcdefg*	*abcdefg*
cefg	*befg*	*aefg*	*efg*
dg	*bcdg*	*acdg*	*cdg*
bcdf	*df*	*abdf*	*bdf*
be	*ce*	*abce*	*bce*
acde	*abde*	*de*	*ade*
af	*abcf*	*cf*	*acf*
abcg	*ag*	*bg*	*abg*

§ 9. $N = 11$.

Ein den Nullpunkt enthaltendes A_{11} ist in folgender Tabelle gegeben:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*	*k*
1											
2	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*					
3	*a*		*c*			*f*	*g*	*h*	*i*		
4	*a*	*b*		*d*			*g*	*h*			*k*
5	*a*		*c*		*e*		*g*			*j*	*k*
6	*a*			*d*		*f*			*i*	*j*	*k*
7	*a*	*b*			*e*			*h*	*i*	*j*	
8		*b*	*c*	*d*			*g*		*i*	*j*	
9		*b*	*c*			*f*		*h*		*j*	*k*
10		*b*			*e*	*f*	*g*		*i*		*k*
11				*d*	*e*	*f*	*g*	*h*		*j*	
12			*c*	*d*	*e*			*h*	*i*		*k*

Durch Ueberdeckung nach den 2^{11} Eckpunkten des B_{11} wird jeder Eckpunkt von 12 verschiedenen A_{11} erreicht, weil hier Ueberdeckung mit einem eigenen Eckpunkte ein durchaus neues Schema liefert. Es ist also schon sicher $12B_{11} = 2^{11}A_{11}$.

Es können aber diese Koeffizienten vereinfacht werden, wie folgende Ueberlegung zeigt. Führen wir die Ueberdeckung nur aus nach denjenigen Eckpunkten, welche zwei beliebig gewählte Buchstaben, zum Beispiel *a* und *b* nicht enthalten, dann bekommen wir 2^9 verschiedene A. Jeder Eckpunkt, der weder *a* noch *b* enthält, wird nun dreimal getroffen, nämlich durch Ueberdeckung mit seinem eigenen Symbole, wodurch der Nullpunkt 1 in ihn übergeht, und durch die Summe der Ueberdeckungen des eigenen Symboles mit 11 oder mit 12, wodurch 11 oder 12 in ihn übergehen. Aber auch jeder andere Eckpunkt wird dreimal erreicht, weil im Schema drei Eckpunkte mit *ab*, drei mit *a* ohne *b* und drei mit *b* ohne *a* vorkommen; es gilt also: $3B_{11} = 2^9A_{11}$.

Es ist zugleich deutlich, dass, immer von demselben am Nullpunkte gefundenen A ausgehend, die Zerlegung geschehen kann auf $\binom{2}{11} = 55$ Weisen, wenn man jedesmal ein anderes Buchstabenpaar unterdrückt.

Nach § 5 und § 6 lässt sich das Schema für $n = 12$, 23, 24 u.s.w. fortsetzen. Führt man für $n = 12$ die Ueberdeckungen aus nach den Eckpunkten des B_{12}, die a, b und den hinzugefügten Buchstaben l nicht enthalten, so wird wieder jeder Eckpunkt dreimal getroffen von verschiedenen C, oder $3B_{12} = 2^9 C_{12}$, und zwar von demselben C ausgehend auf $\binom{3}{12} = 220$ Weisen.

Die Vereinfachung der Koeffizienten bis zu 3B bleibt aber gültig in der ganzen Zerlegungsreihe. Denn die neuen Buchstaben werden immer auf derselben Weise hinzugefügt, zum Beispiel für $n = 23$ die mn wie die ab. Ueberdeckt man also nur nach den Symbolen die abm nicht enthalten, so erhält man $2^{23} : 2^3 = 2^{20}$ verschiedene A_{23} und jeder Eckpunkt wird wieder dreimal getroffen, oder $3B_{23} = 2^{20} A_{23}$.

Oder allgemein:

In der Zerlegungsreihe $N = 11$ *kann man immer die Anzahl der im* B *enthaltenen* A *oder* C *soweit vereinfachen, dass die Eckpunkte des B nur dreimal genommen zu werden brauchen.*

§ 10. $N = 19$, $N = 27$, $N = 35$.

Die den Nullpunkt enthaltenden A sind für $n = 19$ in nachstehender Tabelle, für $n = 27$ in Tafel II, für $n = 35$ in Tafel III gegeben.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s
1																			
2	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j									
3	a		c			f	g			j		l		n	o	p	q		
4	a	b		d			g	h			k		m	n	o	p			
5	a		c		e			h	i			l	m	n	o				s
6	a			d		f			i	j	k	l	m	n				r	
7	a	b			e		g			j	k	l	m				q		s
8	a	b	c			f		h			k	l				p		r	s
9	a		c	d			g		i		k				o		q	r	s
10	a			d	e			h		j				n		p	q	r	s
11	a	b			e	f			i				m		o	p	q	r	
12			c		e	f	g	h			k		m	n			q	r	
13		b		d	e	f	g					l		n	o			r	s
14			c	d	e	f				j	k		m		o	p			s
15		b	c	d	e				i		k	l		n		p	q		
16		b	c	d				h		j		l	m		o		q	r	
17		b	c				g		i	j			m	n		p		r	s
18		b				f		h	i	j	k			n	o		q		s
19					e		g	h	i	j	k	l			o	p		r	
20				d		f	g	h	i			l	m			p	q		s

Auf ganz analoge Weise wie in § 9 folgt hier:

In der Zerlegungsreihe N = 19, 27, 35 *kann man die Anzahl der im* B *enthaltenen* A *oder* C *soweit vereinfachen, dass die Eckpunkte des* B *nur* 5, 7, 9-*mal genommen zu werden brauchen.*

Also $5B_{19} = 2^{15}A_{19}$ u.s.w.

§ 11. In den vorhergehenden §§ wurde immer von einem ersten, den Nullpunkt enthaltenden A ausgegangen; wir wollen nun, wenigstens bis $n = 12$, berechnen, auf wieviel Weisen das erste A oder C gewählt werden kann; für $n = 3$ oder 4 bekanntlich nur auf eine einzige.

$n = 7$. Da zwei beliebige Buchstaben, zum Beispiel *a* und *b* immer auf dieselbe Weise vorkommen, kann man sie unberührt lassen; es bleibt für die gesuchte Anzahl die Zahl der Permutationen von 3 Elementen dividiert durch die Zahl derjenigen Permutationen, die Identität einbegriffen, welche das Schema in sich selbst überführen.

Diese Zahl ist aber 4, ausser der Identität noch $\left\{\frac{c\,d\,e\,f}{d\,c\,f\,e}\right.$, $\left\{\frac{c\,d\,e\,f}{e\,f\,c\,d}\right.$, $\left\{\frac{c\,d\,e\,f}{f\,e\,d\,c}\right.$: es enthalten also den Nullpunkt $\frac{5.4.3.2}{4} = 30$ verschiedene A; und da jedes A nur eine Zerlegung des B_7 ermöglicht, kann diese Zerlegung auf 30 Weisen geschehen.

Die 30 A am Nullpunkte sind:

1	0	*abcd*	*abef*	*aceg*	*adfg*	*bcfg*	*bdeg*	*cdef*
2	0	*abcd*	*abef*	*acfg*	*adeg*	*bceg*	*bdfg*	*cdef*
3	0	*abcd*	*abeg*	*acef*	*adfg*	*bcfg*	*bdef*	*cdeg*
4	0	*abcd*	*abeg*	*acfg*	*adef*	*bcef*	*bdfg*	*cdeg*
5	0	*abcd*	*abfg*	*acef*	*adeg*	*bceg*	*bdef*	*cdfg*
6	0	*abcd*	*abfg*	*aceg*	*adef*	*bcef*	*bdeg*	*cdfg*
7	0	*abce*	*abdf*	*acdf*	*aefg*	*bcfg*	*bdeg*	*cdef*
8	0	*abce*	*abdf*	*acfg*	*adeg*	*bcdg*	*befg*	*cdef*
9	0	*abce*	*abdg*	*acdf*	*aefg*	*bcfg*	*bdef*	*cdeg*
10	0	*abce*	*abdg*	*acfg*	*adef*	*bcdf*	*befg*	*cdeg*
11	0	*abce*	*abfg*	*acdf*	*adeg*	*bcdg*	*bdef*	*cefg*
12	0	*abce*	*abfg*	*acdg*	*adef*	*bcdf*	*bdeg*	*cefg*
13	0	*abcf*	*abde*	*acdg*	*aefg*	*bceg*	*bdfg*	*cdef*
14	0	*abcf*	*abde*	*aceg*	*adfg*	*bcdg*	*befg*	*cdef*
15	0	*abcf*	*abdg*	*acde*	*aefg*	*bceg*	*bdef*	*cdfg*
16	0	*abcf*	*abdg*	*aceg*	*adef*	*bcde*	*befg*	*cdfg*
17	0	*abcf*	*abeg*	*acde*	*adfg*	*bcdg*	*bdef*	*cefg*
18	0	*abcf*	*abeg*	*acdg*	*adef*	*bcde*	*bdfg*	*cefg*
19	0	*abcg*	*abde*	*acdf*	*aefg*	*bcef*	*bdfg*	*cdeg*
20	0	*abcg*	*abde*	*acef*	*adfg*	*bcdf*	*befg*	*cdeg*
21	0	*abcg*	*abdf*	*acde*	*aefg*	*bcef*	*bdeg*	*cdfg*
22	0	*abcg*	*abdf*	*acef*	*adeg*	*bcde*	*befg*	*cdfg*
23	0	*abcg*	*abef*	*acde*	*adfg*	*bcdf*	*bdeg*	*cefg*
24	0	*abcg*	*abef*	*acdf*	*adeg*	*bcde*	*bdfg*	*cefg*
25	0	*abde*	*abfg*	*acdf*	*aceg*	*bcdg*	*bcef*	*defg*
26	0	*abde*	*abfg*	*acde*	*acef*	*bcdf*	*bceg*	*defg*
27	0	*abdf*	*abeg*	*acde*	*acfg*	*bcdg*	*bcef*	*defg*
28	0	*abdf*	*abeg*	*acdg*	*acef*	*bcde*	*bcfg*	*defg*
29	0	*abdg*	*abef*	*acde*	*acfg*	*bcdf*	*bceg*	*defg*
30	0	*abdg*	*abef*	*acdf*	*aceg*	*bcde*	*bcfg*	*defg*

Wie wir sehen, kommt jeder vierstellige Eckpunkt sechsmal vor; also ist jede der, einen Eckpunkt des B_7 treffenden 35

Diagonalen zur Länge $\sqrt{4}$, Kante von 6A : (35 × 6 = 30 × 7).

Für $n = 8$ kann man 3 Buchstaben unberührt lassen; die Frage ist dann aber dieselbe wie für $n = 7$; das B_8 ist also auf 30 Weisen zerlegbar in C_8.

$n = 11$. Lassen wir im Schema aus § 9 die *a* und *b* unberührt, dann ist wieder die Frage, wieviel Permutationen der übrigen Buchstaben das Schema in sich selbst überführen. Nun teilt sich das Schema in 4 Gruppen, deren jede selbständig umwechslen muss, nämlich die mit *ab*, mit *a*, mit *b* und ohne *a* oder *b*. Sie sind:

1.	2.	3.	4.
c d e f	*c f g h i*	*c d g i j*	*d e f g h j*
d g h k	*c e g j k*	*c f h j k*	*c d e h i k*
e h i j	*d f i j k*	*e f g i k*	

In 1. und 4. kommen *deh* zweimal vor, *cfgkij* nur einmal, in 2. und 3. ist es umgekehrt; hieraus folgt dass *deh* nur unter sich permutiren dürfen und ebenso *cfgkij*. Man findet so 6 Permutationen, die das Schema nicht ändern, sie sind:

1. *c d e f g h i j k*
2. *g d h k c e j i f*
3. *f e d c i h g k j*
4. *i e h j f d k g c*
5. *k h d g j e c f i*
6. *j h e i k d f c g*

Es kommen also an jedem Eckpunkte des B_{11} im Ganzen $\frac{9!}{6} = 60480\ A_{11}$. Da von jedem derselben die Zerlegung auf 55 Weisen fortgesetzt werden kann, wobei aber 3 der A gebraucht werden, ist die Anzahl der verschiedenen Zerlegungsweisen:

$$60480 \times 55 : 3 = 1108800.$$

Für $n = 12$ kommen an jedem Eckpunkte ebenfalls 60480 C_{12}, die Anzahl der Zerlegungsweisen ist

$$60480 \times 220 : 3 = 4435200.$$

Für höhere Dimensionenzahlen ist die Berechnung nicht durchgeführt worden; sie würde auch, wie mir Herr Dr. W. A. Wijthoff mitteilte, nicht länger die richtige Anzahl liefern. Es lässt sich nämlich, wenigstens für $n = 15$ zuerst, und wie sich

vermuten lässt a fortiori für höheres n, nicht jedes den Nullpunkt enthaltende A in jedes andere durch Permutation der Buchstaben überführen; es müssten also jedesmal alle möglichen Typen erschöpfend aufgestellt werden. Auch in dieser Hinsicht ist diese Untersuchung nicht abgeschlossen.

§ 12. Wir wollen jetzt einige Betrachtungen anstellen über den Aufbau des Schemas eines den Nullpunkt enthaltenden A_n und knüpfen diese an das in § 10 für $n = 19$ gegebene an. Wie schon bemerkt wurde, lässt es sich teilen in 4 Gruppen, die mit ab, mit a, mit b und ohne a oder b. Von den übrigen Buchstaben kommt n einmal in Gruppe I und IV vor, viermal in II und III, $c\,d\,i\,j\,l\,o\,q\,r\,s$ erscheinen zweimal in I und IV, dreimal in II und III, $e\,f\,g\,h\,k\,m\,p$ dreimal in I und IV, zweimal in II und III. Wir wollen zeigen, dass diese Anzahlen 1, 9, 7 voraus berechnet werden können. Denn setzt man für Gruppe I die Zahl der einmal, zweimal, dreimal, viermal (und nullmal) auftretenden Buchstaben nach einander gleich x, y, z, u (und v), dann ist

$$x + y + z + u = 19 - 2 = 17 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Da aber 5 Eckpunkte, die schon ab besitzen, noch mit $5 \times (10 - 2) = 40$ Buchstaben ergänzt werden müssen, ist auch:

$$x + 2y + 3z + 4u = 40 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Gruppe IV bedingt dieselben Gleichungen. Gruppe II und III liefern:

$$(5 - 1)x + (5 - 2)y + (5 - 3)z + (5 - 4)u = 5 \times 9 = 45,$$

welche aber von (1) und (2) abhängig ist. Es bleiben also die Gleichungen (1) und (2), welchen wirklich die Werte $x = 1$, $y = 9$, $z = 7$, $u = 0$ genügen.

Es ist nun leicht nachweisbar – und dies giebt einen Wahrscheinlichkeitsgrund für die Zerlegbarkeit bei jeder primären Anzahl $N = 8p + 3$ –, dass die analogen Gleichungen für den allgemeinen Fall immer eine ganzzahlige Lösung zulassen. Denn lässt man von den übrigen $(8p + 1)$ Buchstaben in der Gruppe I eine Anzahl x $(p + 1)$-mal, y p-mal vorkommen, setzt also die anderen Unbekannten gleich Null, dann gehen die Gleichungen (1) und (2) über in:

$$x + y = 8p + 1, \quad (p + 1)x + py = (2p + 1)\,4p$$

mit der Lösung

$$x = 3p, \quad y = 5p + 1.$$

Für $n = 19$, $p = 2$ ist dies $x = 6$, $y = 11$; es lässt sich

auch wirklich ein hier nicht abgedrucktes Schema mit diesen Zahlen aufstellen.

Auch folgende Ueberlegung scheint die Allgemeingültigkeit der Zerlegung wahrscheinlich zu machen. Nach dem Verfahren zur Bildung eines Schemas für A_{2n+1} aus A_n besteht dieses immer aus drei Quadranten gleicher Füllung und einem vierten komplementären, das aber an zwei Seiten schwarz umrandet ist. Es zeigen aber auch die primären Schemas (für $n = 3, 11, 19, 27, 35$) einen ähnlichen Aufbau; der Unterschied besteht darin, dass hier nur zwei gegenüberliegende Quadrante dieselbe Füllung haben; die beiden anderen, wovon das eine umrandet, sind unter sich komplementär. In jedem Quadrante folgen die Reihen durch zyklische Verschiebung aus einander; zwei solche Quadrante können vereinigt werden, sobald die Zahlen der gemeinschaftlichen schwarzen Felder einer Reihe mit jeder folgenden sich für beide Quadrante immer zu derselben Zahl ergänzen; so sind diese Zahlen im Schema für $n = 11$ resp. 1,2,2,1 und 2,1,1,2, für $n = 19$ aber 2,2,3,3,3,3,2,2 und 3,3,2,2,2,2,3,3 u.s.w. In einem A_{2n+1} bildet nun zufolge des Bildungsverfahrens jeder der drei gleichgefüllten Quadrante für sich ein A_n, die Zahlen der Farbenpermanenz sind alle gleich und ergänzen sich selbstverständlich.

Es lässt sich aber nicht nur eine Lösung in quadrantzyklischer Form finden, doch wie Tafel IV zeigt für $n = 3, 7, 11, 15, 19$ auch in gänzlich zyklischer Form,

Das Aufsuchen dieser zyklischen Lösungen ist ziemlich zeitraubend und wird auch nicht kürzer, wenn man die Frage in algebraische Form bringt. Nimmt man z.B. für $n = 7$ sieben Unbekannten $x_1 \ldots x_7$ an (die sieben Felder einer Reihe), denen man nur die Werte 1 oder 0 (schwarz oder weiss) gestattet, so muss zuerst:

1) $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 4.$$

Die Bedingung aber der Permanenz 2 in schwarz mit jeder zyklisch verschobenen Reihe, liefert die Gleichungen:

2) $x_1x_7 + x_2x_1 + x_3x_2 + x_4x_3 + x_5x_4 + x_6x_5 + x_7x_6 = 2,$

3) $x_1x_6 + x_2x_7 + x_3x_1 + x_4x_2 + x_5x_3 + x_6x_4 + x_7x_5 = 2,$

4) $x_1x_5 + x_2x_6 + x_3x_7 + x_4x_1 + x_5x_2 + x_6x_3 + x_7y_4 = 2,$

5) $x_1x_4 + x_2x_5 + x_3x_6 + x_4x_7 + x_5x_1 + x_6x_2 + x_7x_3 = 2;$

6) $x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_5 + x_4x_6 + x_5x_7 + x_6x_1 + x_7x_2 = 2,$

7) $x_1y_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_5 + x_5x_6 + x_6x_7 + x_7x_1 = 2.$

Man kann noch hinzufügen die (von 1—7 abhängige)

8) $$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 = 4;$$

es sind aber 7, 6, 5 identisch mit 2, 3, 4, das Gleichungssystem bleibt also unbestimmt und quadratisch; könnte man für $n = 4p + 3$ allgemein die Existenz wenigstens einer Lösung mit Werten 1 oder 0 beweisen, dann wäre auch die Zerlegung in zyklischer Form sicher gestellt.

Diese zyklischen Lösungen haben eine einfache geometrische Deutung. Denn eine zyklische Permutationsgruppe *abc* .... bedeutet in der vollständigen Gruppe der Bewegungen (und Spiegelungen), welche ein B_n in sich selbst überführen, eine bestimmte Untergruppe, bestimmt eben durch die Bedingung dass zwei gegenüberliegende Eckpunkte fest bleiben, während die n von ihnen ausgehende Kanten in vorgeschriebener Reihenfolge zyklisch wechslen müssen. Es erhält dabei im Allgemeinen jeder Eckpunkt n Positionen, die ein Simplex S_{n-1} bestimmen. In besonderen Fällen ist die Anzahl Positionen ein Teiler von n; so geben für $n = 6$ die Farbenreihen 101010 und 100100 Zykeln von resp. 2 und 3 Punkten, welche dann 3 und 2 mal gezählt werden können. Ein solches S_{n-1} braucht aber nicht regulär zu sein; nur für den Zykel der n Eckpunkte die unmittelbar durch eine Kante mit einem festen Eckpunkte zusammenhängen, trifft dies immer zu. Es zeigt nun Tafel IV, dass für die Dimensionenzahlen 3 bis 19, alle von der Form $n = 4p + 3$, unter den Eckpunkten auf einem Abstande $\sqrt{2p+2}$ vom festen Eckpunkte Zykeln vorkommen, die ein reguläres S_{n-1} mit der Kantenlänge $\sqrt{2p+2}$ bilden.

Ist ein von einem Zykel in B_n gebildetes S_{n-1} nicht regulär, so hat es doch die Eigenschaft, dass seine Eckpunkte in Bezug auf die $(n-1)$ von jedem derselben ausgehenden Kanten gleichwertig sind und das Polytop eine zyklische Gruppe von n selbstdeckenden Bewegungen zulässt. (Als Beispiel in unserem Raume gestattet jedes Vierflach ABCD die Deckungen ABCD—BCDA—CDAB—DABC, wenn AB = BC = CD = DA und AC = BD. Die Seitenflächen sind also gleichschenklige Dreiecke, deren Grundlinien sich kreuzen. Der in B_4 auftretende Zykel (1100) hat aber die Kantenlängen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{4}$, bildet also als speziellen Fall eines solchen Vierflachs ein Quadrat mit seinen Diagonalen). Es ist nun auch der geometrische Sinn der quadrantalen Lösungen deutlich.

Betrachten wir z.B. Tafel III für $n = 27$. Der Quadrant rechts unten gibt in B_{13} einen Zykel von 13 Eckpunkten auf einem Abstande $\sqrt{7}$ von Nullpunkte, die Kanten sind der Reihe nach:

$\sqrt{8}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{8}, \sqrt{6}, \sqrt{6}, \sqrt{6}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{8}, \sqrt{6}, \sqrt{8}$.

Der Quadrant links unten gibt einen Zykel mit Kanten:

$\sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{6}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{8}, \sqrt{8}, \sqrt{8}, \sqrt{6}, \sqrt{6}, \sqrt{8}, \sqrt{6}$.

Lässt man nun diese beiden B_{13} mit dem Nullpunkte zusammenfallen und stelt sie übrigens in senkrechte Räume, dann sind im ergänzten B_{26} dreizehn Eckpunkte bestimmt, die sowohl unter sich, wie zum Nullpunkte den Abstand $\sqrt{14}$ aufweisen. Die 14 Eckpunkte der oberen Hälfte des Schemas sind aber ein ähnliches im B_{27} „kreuzendes" System und hiermit ist das A_{27} gebildet.

§ 13. Es lassen sich die in den Tabellen festgelegten kombinatorischen Resultate noch auf ganz andere Weise geometrisch deuten. Betrachten wir z.B. das Schema für $n = 7$, lassen jedoch den Nullpunkt daraus fort. Die Buchstaben $a, .. g$ fassen wir nicht wie bisher auf als Bezeichnung der Kantenrichtungen in einem B_7, sondern als sieben Punkte, die also ein Simplex S_6 im sechsdimensionalen Raume bilden. Es sagt dann das Schema aus, dass es möglich ist (und zwar auf 30 Weisen) sieben von den 35 begrenzenden R_3 auszuwählen, die zu zweien längs einer Kante des S_6 zusammenhangen. Ihre Schwerpunkte, denen wir die Bezeichnung $\frac{1}{4}(abcd), \ldots$ geben können, bilden ein neues S_6, dessen Schwerpunkt mit dem des ersten S_6 zusammenfällt. Ist aber das erstere regulär, dann muss das zweite dies ebenfalls sein, weil man durch geeignete Permutation der Buchstaben je zwei seiner Eckpunkte umwechslen kann; es folgt daher:

Im A_6 bilden die 35 Zentra der Grenztetraeder 30 verschiedene A_6, jedes Zentrum kommt in $6 A_6$ vor.

Dasselbe lässt sich sagen von den 35 Zentren der Grenzdreiecke efg, $cdg \ldots$, welche mit den vorigen perspektivisch liegen nach dem Zentrum des A_6 und in festem, negativem Perspektivitätsverhältniss.

Da die Beweisführung allgemein gültig ist, hat man:

Jedesmal wenn die Zerlegbarkeit von B_{4p+3} *in* A_{4p+3} *feststeht,*

ist zugleich bewiesen, dass im A_{4p+3} *unter den Zentren der begrenzenden* A_{2p+1}, *sowohl wie der begrenzenden* A_{2p}, *Gruppen vorkommen, die ein* A_{4p+3} *bilden, und zwar soviel wie im* B_{4p+3} *an jedem Eckpunkte* A_{4p+3} *kommen.*

Man kann auch sagen, dass unter den Verbindungslinien der gegenüberliegenden Zentra der A_{2p+1} und A_{2p} Gruppen vorkommen, die ein „reguläres Simplexkreuz" bilden.

Auf ganz analoge Weise folgt:

Jedesmal wenn die Zerlegbarkeit von B_{4p} *in* C_{4p} *feststeht, ist zugleich bewiesen, dass im* A_{4p-1} *unter den Zentren der begrenzenden* A_{2p-1} *Gruppen vorkommen, die ein* C_{4p-1} *bilden; und zwar soviel wie im* B_{4p} *an jedem Eckpnnkte* C_{4p} *kommen.*

Man kann auch sagen, dass unter den Verbindungslinien der Zentra von gegenüberliegenden gleichwertigen Grenzräumen Gruppen vorkommen, die ein $(4p-1)$-zähliges rechtwinkliges Achsenkreuz bilden.

Es lassen sich die in diesem § gegebenen Theoreme auch einfach beweisen mittels eines Satzes, den mir Herr G. Mannoury gelegentlich mitteilte. Dieser Satz lautet: In jedem B_n bilden die Eckpunkte auf Abstand 1 vom Nullpunkte ein A_{n-1}; die auf Abstand $\sqrt{2}$ die Mitten der Kanten eines A_{n-1}; die auf Abstand $\sqrt{3}$ die Mitten der Grenzdreiecke; auf Abstand $\sqrt{4}$ die Mitten der Grenztetraeder, u. s. w.

§ 14. Die Zerlegung des Hexaeders ist bekanntlich deshalb wichtig, weil sie die metrisch einfachste Grundform liefert der so merkwürdigen Figur der drei desmischen Tetraeder. Wir wollen darum für den nächsten Fall $n = 7$ untersuchen, wie sich die Eigenschaften dieser Figur analog fortsetzen lassen.

Bezeichnen wir die Eckpunkte eines A_7 in folgender Weise: $abcd = A$, $abef = B$, $aceg = C$, $adfg = D$, $bcfg = E$, $bdeg = F$, $cdef = G$ und Nullpunkt $= H$, und fügen wir das uneigentliche Simplex hinzu, dessen Eckpunkte gebildet werden vom Zentrum M und von den im Unendlichen liegenden Punkten A′, B′, ... der Kantenrichtungen a, b, ..., dann ist zuerst deutlich dass, wie in R_3, jeder Eckpunkt des uneigentlichen A_7 die 16 in § 8 aufgezählten eigentlichen teilt in zwei perspektivisch liegende Gruppen van 8. So sind perspektiv:

nach M:	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	;
	XVI	XV	XIV	XII	XII	XI	X	IX	

nach A':	I	III	IV	V	VI	VII	VIII	XV
	II	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XVI

und so weiter.

Ein Unterschied ist jedoch, dass in R_3 die drei Tetraeder in der Figur gleichwertig sind, und eine Konfiguration bilden, während hier das uneigentliche A_7 eine gesonderte Rolle spielt.

In R_3 schneiden sich die Kanten der 2 Tetraeder in Punkten, durch die auch die Kanten des uneigentlichen gehen; auch diese Eigenschaft hat ihre analoge in R_7. Denn es zeigt sich, dass die Zentren von sieben geeignet gewählten Grenztetraeder des Simplexes ABCDEFFH, und daher auch sieben genüberliegenden, auf dem Achsenkreuz liegen, das wir in M den Kantenrichtungen des B_7 parallel anbringen können, also auf den Kanten MA, MB u. s. w. des uneigentlichen Simplexes. Es ist nämlich

$$\tfrac{1}{4}\,(\mathrm{ABCD}) = \tfrac{1}{4}\,(4a + 2bcdefg) = \mathrm{M} + \tfrac{1}{2}a,$$
$$\tfrac{1}{4}\,(\mathrm{ABEF}) = \mathrm{M} + \tfrac{1}{2}b \text{ und so weiter},$$

was wieder mit dem zweiten Theorem aus § 13 übereinstimmt.

Da aber dasselbe für jedes der 16 Simplexe gilt, hat man: „Jedes der 16 Simplexe liefert 14 Grenzräume R_3, so dass davon jedesmal 16 zu verschiedenen Simplexen gehörigen sich schneiden in den Endpunkten des in M angebrachten Achsenkreuzes."

Diese Schnittpunkte bilden das dem B_7 dual eingeschriebene Kreuzpolytop. Auch hier zeigt sich die ungleiche Rolle des uneigentlichen Simplexes, das nicht wie die eigentlichen mit 7 seiner Grenzraume R_3, doch mit 7 seiner Kanten durch diese Schnittpunkte geht.

Dass die Punkte A', B'... in jeder Hinsicht gleichberechtigt sind mit dem Punkte M, leuchtet ein, wenn man sie durch projektive Transformation ins Endliche bringt. Es gestaltet sich dann die Figur in folgender Weise:

Man denke sich in R_7 ein beliebiges Simplex ABCDEFGH und einen allgemein zu ihm liegenden Punkt P. Man lege durch P alle Transversalen über gegenüberliegende Elemente des Simplexes, also die Verbindungslinien mit den Eckpunkten, die Transversale über die Kante AB (AC), und dem Grenzraume $R_5 \equiv$ CDEFGH (BDEFGH), und so weiter. Auf jeder Transversale konstruire man den Punkt der mit P harmonisch liegt zu den Schnittpunkten mit den Grenzelementen; in dieser Weise erhält man, P einbegriffen, eine Gruppe von 2^7 Punkten, der

man durch Wiederholung der Operation keine neue hinzufügen kann.

Bildet man nun das Simplex P, P_{abcd}, P_{abef} u. s. w. nach dem Schema eines A_7 und unterwirft dieses Simplex allen möglichen harmonischen Operationen (analog den „Ueberdeckungen" im B_7), dann entsteht die Figur von 16 Simplexen und dem ursprünglichen, welche perspectiv ist zu den 16A_7 und dem uneigentlichen, und zwar so, dass man nach Belieben A, B ... oder H dem Zentrum entsprechen lassen kann. Es kommen daher auch auf jeder der 28 Kanten des Fundamentalsimplexes zwei harmonisch liegende Punkte, durch die jedes der 16 Simplexe einen Grenzraum R_3 sendet; diese 56 Punkte sind analog den bekannten 12 in R_3, welche da von neuem ein desmisches System bestimmen, was hier wieder nicht zutrifft.

Wie in R_3 wird in jedem R_n ein zu einem Simplexe harmonisches System von 2^n Punkten gebildet durch die Mittelpunkte der Kugelräume von $(n - 1)$ Dimensionen, welche die $(n - 1)$-dimensionalen Grenzraüme des Simplexes berühren. Wie die Projektion der desmischen Figur auf eine Ebene die bekannte Konfiguration $(12_4, 16_3)$ von Hesse liefert, weist die Zerlegung des B_7 in unserem Raume oder in der Ebene auf eine Figur von 16 Achtecken, perspectiv nach den Eckpunkten eines 17ten.

Es können in einem B_n auch zentrisch gelegene, reguläre Polytope vorkommen von geringerer Dimension, also durch das Zentrum gehende Diagonalräume. Es ist deutlich, dass B_n solche B_m enthält, wenn m in n dividierbar ist. Lässt nun B_m weitere zentrische Zerlegung zu in A_m oder C_m, dann sind diese zugleich reguläre Diagonalräume des B_n. Man braucht nur die n Richtungsbuchstaben in m gleiche Gruppen zu teilen, und diese Gruppen an der Stelle zu setzen der einzelnen Buchstaben im Zerlegungsschema des B_m. Dass auch nicht durch das Zentrum gehende reguläre Diagonalräume vorkommen können, zeigt zum Beispiel die Tabelle der A_7 in § 11. Es haben Nr. 1 und 2 vier Eckpunkte gemeinschaftlich, die übrigen sind

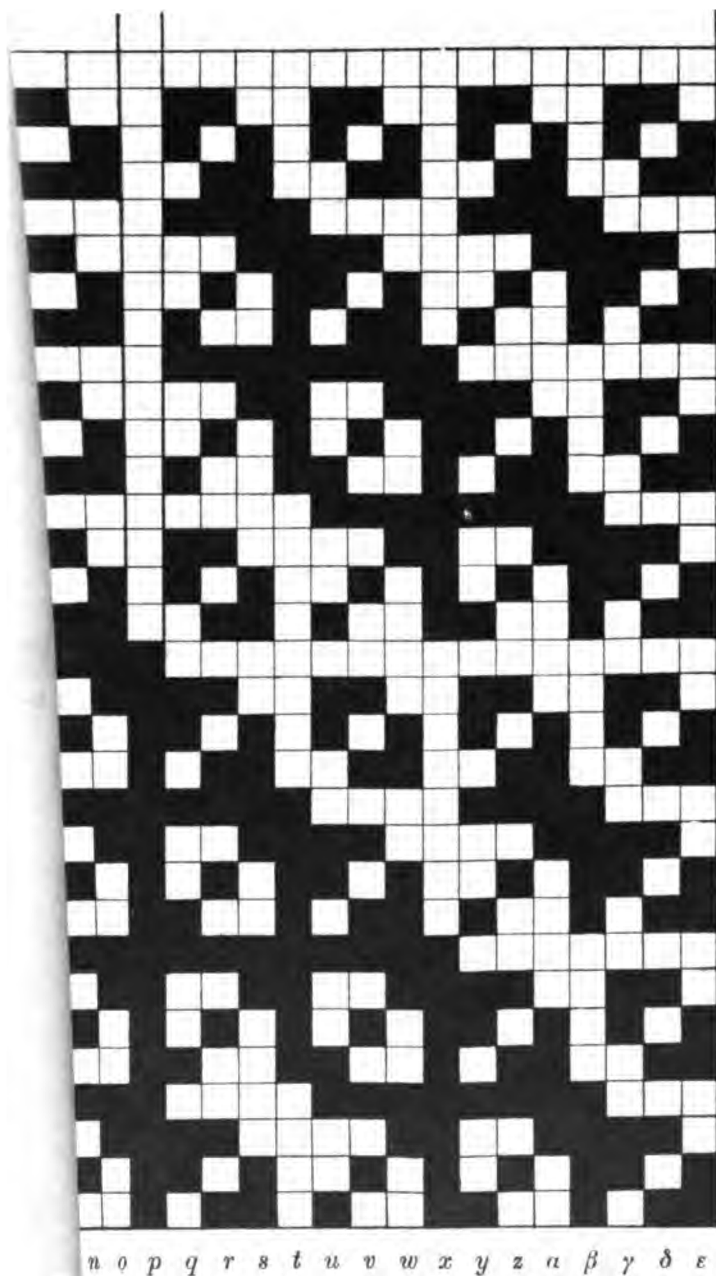
$$aceg,\ adfg,\ bcfg,\ bdeg$$

und

$$acfg,\ adeg,\ bceg,\ bdfg.$$

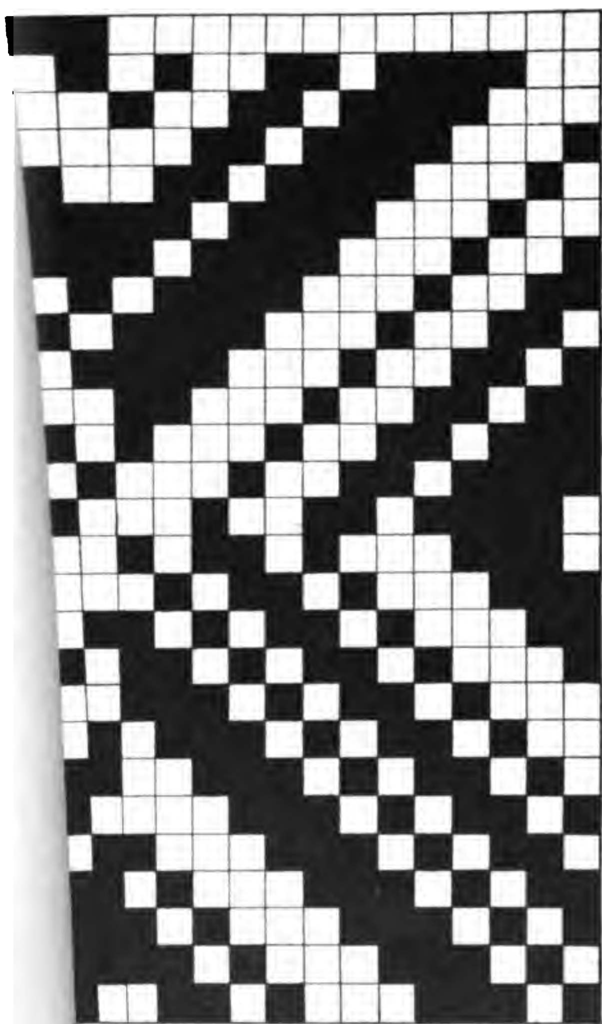
Zusammen bilden diese die 8 Eckpunkte eines nicht zentrischen Hexaeders mit Kantenlänge $\sqrt{2}$.

TAFEL I.



J. BARRAU. — Zerlegung der regulären Polytope.

ˋAFEL II.



Ĭ = 27.

ꝚAU. — Zerlegung der regulären Polytope.

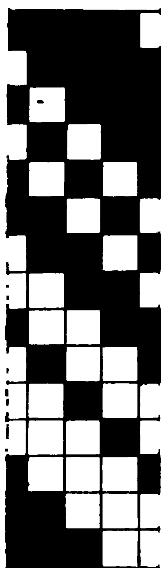


= 35.

A. BARRAU. — Zerlegung der regulären Polytope.

N





J2e

HET METEN VAN EEN CILINDER,

DOOR

J. W. RASCH,
(Amersfoort).

„Wat beteekenen waarnemingen, ook de beste, zoo niet de rede ons bij het aanwenden derzelve geleidt?"
(BUYS BALLOT, *Het karakter der Rede uitgedrukt in de Wiskunde.* Redevoering, 16 Nov. 1847, p. 12).

„Die bruikbare waarnemingen wil doen, diens geest moet goed opgevoed en in strenge tucht gehouden zijn."
(OPZOOMER, *Het Wezen der Kennis*, 1867, p. 47).

Onder denzelfden titel als hierboven werd voor 25 jaar in dit tijdschrift (Deel VII, 1881) van schrijver dezes een opstel opgenomen. Bevatte het iets goeds, toch ontbrak daarin een element van groot belang, namelijk het algemeen geldende beginsel, waarnaar in ieder voorkomend geval de voetpunten der in een cilinder te meten hoogten over de basis van willekeurig gegeven vorm zijn te verspreiden, om zoo nauwkeurig mogelijk het volumen of de middelbare hoogte des cilinders te vinden.

Dit beginsel kan toepassing vinden niet alleen bij den ijk in ons land, waar voor de inhoudsmaten met eene enkele uitzondering de cilindervorm is voorgeschreven en zeer terecht het volumen bepaald wordt, geheel vrij van eenige andere grootheid, die juist van dit volumen zou afhangen. In menig geval heeft ook zonder wiskundige formules de praktijk het vraagstuk op de gelukkigste wijze opgelost, als bij het uitpoten van zaadkorrels, het planten van boomen op een homogeen terrein, waarbij het zetten in verband (*en quinconce*) geene nieuwigheid is, even als lang voordat de variatierekening de rechte lijn deed kennen als den kortsten weg tusschen twee punten, ieder werkman eene rechte lijn wist te verkrijgen door het spannen van een koord.

Overal, waar men uit een beperkt aantal waarnemingen wil besluiten tot de middelbare gesteldheid eener ingesloten ruimte, die in twee afmetingen homogeen is, doch in de derde ongelijke uitgebreidheid bezit, hetzij van hoogte, massa, kracht of welke meetbare hoedanigheid ook, kan uit dit beginsel worden afgeleid hoe die waarnemingen het best over het veld van onderzoek zijn te verdeelen.

In het bijzonder voor het meten van een cilinder zijn door verschillende schrijvers voorschriften of voorbeelden gegeven. Wij noemen de gedenkwaardige meting in 1795 van den geelkoperen cilinder, door FORTIN vervaardigd om het gewicht van een kubieken decimeter water te bepalen (middellijn en hoogte c.a. 243,5 millimeter), beschreven in het klassieke werk van DELAMBRE: „Base du Système métrique", die nog als toonbeeld van nauwgezet onderzoek kan gelden.

In 1844 verscheen de „Verhandeling over de meetkundige inhoudsvinding der Nederlandsche maten" van Dr. F. J. STAMKART, een geschrift, dat thans nog alle waardeering verdient. Deze schrijver was echter bij de uitgaaf van zijn werk, dat ter Algemeene Landsdrukkerij gedrukt werd, door de Regeering, die oordeelde, dat in sommige gedeelten te zeer van hoogere wiskundige beschouwingen gebruik gemaakt was, uitgenoodigd daaraan een meer elementairen vorm te geven. Dit was ten minste één oorzaak, waardoor zijn arbeid minder volkomen was.

Dit tijdschrift publiceerde twee verhandelingen over hetzelfde onderwerp van den heer B. P. MOORS, de eerste in deel VI, 1880, de andere in deel II der tweede reeks, 1896.

Eene volledige kritiek van de aangehaalde geschriften zou stellig veel meer ruimte vereischen, dan hier kan worden toegestaan en misschien slechts een klein deel der lezers van dit tijdschrift interesseeren.

Alleen zouden wij willen opmerken, dat geen motief is aangegeven voor de keus van de voetpunten der hoogten bij de meting van FORTIN's cilinder onder toezicht mede van LAPLACE, LAGRANGE en LEGENDRE. Niet onwaarschijnlijk werd dat gevonden door de basis te beschouwen als een plat vlak („comme cela est permis", zooals de verslaggevers het zoo eenvoudig uitdrukken in hun rapport van 11 Prairial, an 7) en de tweede basis (het bovenoppervlak) als een parabolisch oppervlak van hoogeren graad. Zoekt men in die onderstelling de wijze, waarop de voetpunten der te meten hoogten over de basis moeten verdeeld worden,

om bij eene bepaalde te vreezen fout op elke hoogte eene zoo klein mogelijke fout op het volumen te verkrijgen, dan geeft de oplossing van dat vraagstuk eene distributie, die veel overeenkomst heeft met de door Lefèvre-Gineau gebruikte. Het komt ons echter voor, dat het aanstonds in het oog moet vallen, dat daarbij de basis al te ongelijkmatig met waarnemingsplaatsen is bedeeld.

En bij Dr. Stamkart en anderen is niet te ontkennen, dat zij een volstrekt onnoodig en ongepast gebruik hebben gemaakt van de zoogenoemde pijlmast, het instrument indertijd bedacht om de kromming der duigen van een open tonvormig vat te onderzoeken, ook geschikt om na te gaan of eene lijn recht of een oppervlak een plat vlak is, doch geenszins toe te laten bij het meten van hoogten, die zonder bezwaar *in eens* kunnen, en volgens de leer der kleinste kwadraten, om het beste resultaat te verkrijgen, dan ook *in eens* behooren gemeten te worden.

In hetgeen volgt stellen wij ons voor de vraag te beantwoorden, hoe men bij de inhoudsbepaling van een rechten cilinder met willekeurige basis de voetpunten der te meten hoogten het doelmatigst over de basis zal verspreiden.

Is de basis een cirkel, dan wordt tegelijk de kwestie opgelost voor de middellijnen. Elke meting van eene hoogte of van eene middellijn kan beschouwd worden als de bepaling van het verschil tusschen die afmeting in het te onderzoeken voorwerp en de overeenkomstige in een idealen cilinder, waar van de afmetingen door de normale lengte van het gebruikte meetinstrument vertegenwoordigd worden. Eenvoudigheidshalve denken wij ons iedere middellijn in den eersten cilinder min of meer grooter dan de normale lengte der middellijnsmaat. Dan kan men zich de ruimte tusschen de mantels der twee cilinders voorstellen als eene buigbare plaat, die volgens eene der beschrijvende lijnen wordt doorgesneden en gestrekt op een horizontaal vlak. Men heeft dan een cilinder van geringe, weinig variëerende hoogte met een rechthoek tot basis. Op de helft van dien rechthoek, zoo genomen dat de deellijn evenwijdig is aan de aangebrachte snede, heeft men slechts de meest geschikte plaatsen voor het bepalen der dikte van dit blad op te sporen, die de punten zullen aangeven, waar men het best het eene uiteinde der middellijnsmaat aanlegt.

Wij hebben dan voor ons een rechten cilinder, en wel een zoodanigen, die met zorg is bewerkt en bewaard, zoodat slechts geringe afwijkingen van de hoogte, die men daaraan heeft willen geven, voorkomen.

Het spreekt van zelf, dat elke gemeten hoogte slechts een bepaald deel van het volumen des lichaams kan vertegenwoordigen. Verdeelt men de basis in een aantal deelen en richt men langs al de rechte of gebogen deellijnen rechte cilindervlakken op, dan wordt daardoor de cilinder in even zoo vele kleinere cilinders verdeeld, en is voor elk daarvan de basis klein genoeg om zijn bovenoppervlak als een plat vlak te beschouwen, dan is het zwaartepunt dier basis het aangewezen voetpunt der in dien cilinder te meten hoogte, want dan is zijne hoogte op deze plaats de maat van zijn inhoud, (zie LOBATTO, *Verzameling van vraagstukken uit de Statica en de Hydrostatica*, 1857, p. 158).

Eene eenvoudige toepassing van de leer der kleinste kwadraten leert ons, dat hierbij de deelen der basis van gelijke grootte moeten genomen worden. Men mag toch aannemen, dat de middelbare fout op elke gemeten hoogte even groot zal zijn [1]). Noemen wij die e, en zijn B_1, $B_2 \ldots B_n$ de inhouden van de stukken der basis, dan is, als $h_1, h_2 \ldots h_n$ de verschillende hoogten voorstellen, het volumen des cilinders bepaald door de vergelijking:

$$V = B_1 h_1 + B_2 h_2 + \ldots + B_n h_n.$$

Is E de middelbare fout op V, dan geldt:

$$E^2 = e^2 (B_1^2 + B_2^2 + \ldots + B_n)^2.$$

Zal nu E een minimum zijn, dan moet, wanneer B den inhoud der geheele basis beteekent, voldaan worden aan de voorwaarde:

$$B_1 = B_2 = \ldots = B_n = \frac{1}{n} B.$$

---

[1]) Wij bedoelen hier de totale fout, die kan samengesteld zijn uit onderscheiden enkele, als vooreerst die op de bepaling van den afstand tusschen voet en top der gemeten hoogte; dan de fout, straks te bespreken, die daaruit ontstaat, dat het bovenoppervlak van elk cilinderdeel *geen* plat vlak is. Andere oorzaken van fouten, als eene minder juiste plaatsing van het meetinstrument op de bedoelde plaats, of eene afwijking van den vertikalen stand van het instrument hebben minder invloed en kunnen gemakkelijk tot zeer geringe grootte beperkt worden.

Men zou echter zonder nadere aanwijzing, alleen aan dit voorschrift voldoende, gemakkelijk verschillende manieren van verdeeling der basis kunnen aangeven, waarvan het aanstonds in het oog valt, dat zij niet rationeel zijn.

Verdeelt men b.v. eene cirkelvormige basis in even groote strooken door met den omtrek concentrische cirkels, dan zouden de zwaartepunten van al die deelen ineen vallen, en men zou slechts bij herhaling dezelfde hoogte meten.

Is het aantal te meten hoogten niet zeer gering, dan kan ook de verdeeling der cirkelvormige basis in gelijke sectoren niet in aanmerking komen, want dan vielen al de zwaartepunten op den omtrek van een cirkel, wiens straal ongeveer $^2/_3$ van dien der basis zou bedragen, dus te dichter bijeen op ééne lijn naarmate het aantal deelen grooter werd genomen. Om dergelijke reden zou ook eene verdeeling door evenwijdige koorden geene aanbeveling verdienen.

Zoolang wij vasthouden aan de onderstelling, dat het bovenoppervlak van elken gedeeltelijken cilinder een plat vlak is, blijft ons iedere aanwijzing tot eene doelmatige verspreiding van de voetpunten der hoogte ontbreken.

Geheel anders wordt het, wanneer men die oppervlakken aanziet als gebogen oppervlakken. Daarmede plaatst men zich nader aan de werkelijkheid en men wint een beginsel, waaruit eene rationeele distributie der te meten hoogten kan worden afgeleid.

Denkt men zich den gegeven cilinder door vlakken evenwijdig aan zijne as verdeeld in een zeer groot aantal zuiltjes van gelijke dwarsdoorsnede, en voor elk dier zuiltjes de hoogte gelijk gesteld aan eene der gemeten hoogten, dan kan men wel als waar aannemen, dat elk zuiltje des te beter wordt gerepresenteerd naarmate het dichter bij de naastbij gelegen hoogte is geplaatst. De afstand tusschen beide hangt nu voor een deel af van het aantal hoogten, dat men wil meten, hetwelk men naar behoefte kan vergrooten, maar ook voor een groot deel van de gedaante der stukken, waarin de basis wordt verdeeld. Den besten vorm voor alle deelen hopen wij bij eene willekeurige basis te vinden door middel van de volgende beschouwing.

Onderstellen wij, dat het bovenoppervlak van een der cilinder-

deelen een oppervlak is van den tweeden graad, en wel eene elliptische of hyperbolische paraboloïde met de vergelijking:

$$z = ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

waarbij wij den top der hoogte op het zwaartepunt tot oorsprong der coördinaten nemen, en twee elkander in O loodrecht snijdende rechten, evenwijdig aan de basis tot x-as en y-as. Deze vergelijking is homogeen, wanneer wij onder x en y verstaan de verhoudingen dier grootheden tot de aangenomen lengteëenheid of tot den straal eens cirkels, die met de basis van het cilinderdeel gelijken inhoud heeft. Dan zijn a, b, enz. lengtegrootheden, betrekkelijk zeer klein, van dezelfde orde als de verschillen, die de meting oplevert tusschen de werkelijke hoogten en de middelbare hoogte van den cilinder.

Leggen wij door O een rakend vlak aan het oppervlak (1), dan is de vergelijking hiervan:

$$z' = dx + ey \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Dit raakvlak zal zich nader aansluiten tegen het oppervlak (1) binnen den naasten omtrek van het raakpunt dan eenig ander vlak dat men door hetzelfde punt kan leggen, (zie COURNOT, *Traité des fonctions*, éd. 1857, I, p. 398). Het verschil tusschen z en z' voor hetzelfde punt der basis is in het algemeen eene grootheid van de tweede orde en in het bijzonder klein bij ons vraagstuk, omdat wij voor het bovenoppervlak slechts kleine afwijkingen van een plat vlak te verwachten hebben.

Omdat de z-as door het zwaartepunt der basis gaat, is de inhoud van den kleinen cilinder, voor zoover die begrepen is tusschen het raakvlak (2) en het vlak xy, gelijk nul.

Wij mogen daarom de fout op de middelbare hoogte, die wij begaan door de hoogte in O voor de ware te nemen, gelijk stellen aan de middelbare hoogte van den cilinder, waarvan het bovenoppervlak tot vergelijking heeft:

$$\zeta = z - z' = ax^2 + by^2 + cxy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3).$$

De doorsnede van dit oppervlak met elk vlak, dat door de as OZ gaat, is eene parabool. Maakt dit snijvlak met de as OX den hoek ϕ, en stellen wij:

$$x = r \cos \phi, \; y = r \sin \phi,$$

dan verkrijgen wij door substitutie dezer waarden in (3) de vergelijking van die parabool, nl.:

$$\zeta = r^2 (a \cos^2 \phi + b \sin^2 \phi + c \sin \phi \cos \phi). \quad . \quad . \quad (4)$$

Laat:

$$\rho = f(\phi) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

de vergelijking zijn van den omtrek der basis met O tot oorsprong der voerstralen, OX tot oorsprong der hoeken, en schrijven wij ter bekorting in plaats van (4):

$$\zeta = p \, . \, r^2, \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

dan is de inhoud van een segment F der doorsnede, begrensd door eene loodlijn op het uiteinde van ρ te vinden uit de vergelijking:

$$F = p \, . \, \frac{\rho^3}{3} \, .$$

Het zwaartepunt van dit segment ligt op den afstand $\frac{3}{4}\rho$ van de as OZ, dus is de inhoud van eene differentiaal van het volumen V des cilinders, begrepen tusschen twee doorsneden, die met OX de hoeken ϕ en $\phi + d\phi$ maken:

$$dV = p \, . \, \frac{\rho^4}{4} \, d\phi,$$

of

$$V = \int p \, . \, \frac{\rho^4}{4} \, d\phi \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Deze vergelijking bevat onder het integraalteeken de uitdrukking $\frac{\rho^4}{4} \, . \, d\phi$, die het traagheidsmoment voorstelt van de differentiaal der basis, en de grootheid p, die behalve van de constanten a, b en c, uitsluitend van ϕ afhangt.

Omdat wij ons niet voorstellen, dat een voorloopig onderzoek van het bovenoppervlak in de nabijheid van O plaats vindt, is het ons volkomen onbekend, in welke richting p grooter of kleiner, positief of negatief is. Het zou dus voor de hand liggen, die grootheid, welke steeds tusschen enge grenzen zal

begrepen zijn, als constant te beschouwen, als onafhankelijk van ϕ, hetgeen daarop neerkomt dat men voor het bovenoppervlak neemt eene omwentelingsparaboloïde.

Laten wij echter deze onderstelling niet toe, doch nemen wij aan, dat rondom en zeer nabij O eenige punten van het oppervlak (1) door opmeting zijn bepaald geworden, waardoor de coëfficienten a, b en c bekend zouden zijn, en dat de omtrek der basis door hare vergelijking $\rho = f(\phi)$ gegeven is, dan kan de middelbare waarde van p, die wij p_0 willen noemen, gevonden worden uit de vergelijking:

$$p_0 = \frac{\int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4} . p d\phi}{\int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4} . d\phi}$$

Wij verkrijgen dan:

$$V = p_0 \int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{4} . d\phi ,$$

waarbij p_0 eene kleine grootheid is van dezelfde orde als de afwijkingen der hoogten van die op het zwaartepunt. Zij kan genomen worden voor de fout op de middelbare hoogte van het beschouwde cilinderdeel, als wij diens hoogte op het zwaartepunt voor de ware in rekening brengen. De grootheid p_0 heeft geheel het karakter eener toevallige fout.

Aangezien wij het bovenoppervlak des geheelen cilinders onderstellen slechts geringe en onopzettelijke afwijkingen van een plat vlak te bezitten, is er geene reden om aan de grootheid p_0 voor één deel van dat oppervlak eene waarde toe te kennen, die aanmerkelijk van die voor een ander deel afwijkt, te minder, wanneer p_0 zou zijn opgemaakt door waarneming van punten in de nabijheid van eene gemeten hoogte.

Wij besluiten, dat de fout op elken gedeeltelijken cilinder, afgezien van het teeken, evenredig is aan het traagheidsmoment van de basis ten opzichte eener loodrechte as door haar zwaartepunt. Dit leidt ons tot de volgende stelling:

Zal van een rechten cilinder met willekeurige basis het volumen bepaald worden door het meten van een aantal hoogten, dan behoort de basis verdeeld te worden in even zoo vele deelen van

gelijken inhoud op die wijze, dat de som van de kwadraten der traagheidsmomenten dier deelen, elk genomen ten opzichte eener loodrechte as door het zwaartepunt, een minimum zij.

Op het zwaartepunt van elk deel wordt dan eene hoogte gemeten, en het gemiddelde van al die hoogten zal de middelbare hoogte des cilinders zijn, dat is de hoogte van een volkomen cilinder, die met het voorwerp van onderzoek gelijke basis en gelijk volumen bezit.

Noemen wij de traagheidsmomenten van de deelen der basis $t_1, t_2, \ldots t_n$, dan moet, als e de middelbare fout is op de hoogte van elk dier deelen, en E die op de hoogte des geheelen cilinders, voldaan worden aan de voorwaarde:

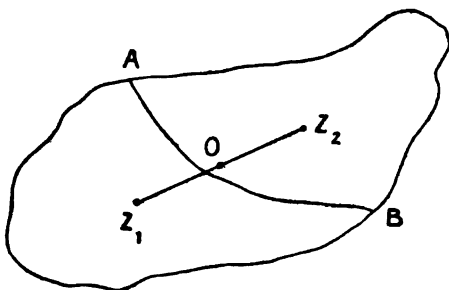
$$E^2 = e^2 (t_1^2 + t_2^2 + \ldots t_n^2) = \text{minimum}.$$

Er is echter geene enkele relatie voorhanden tusschen deze traagheidsmomenten, die ons zou in staat stellen direct uit deze vergelijking den vorm der verschillende deelen af te leiden, want op allerlei wijzen kunnen die deelen gevormd zijn, zelfs elkander omslingeren. En toch, er moet eene keus gedaan worden; die keus moet onaantastbaar kunnen gerechtvaardigd worden. „De rede wil niet dan met noodzakelijkheid voortgaan, ook de wiskunde weigert een willekeurigen tred te doen." (Buys Ballot, l. c. p. 5.) Waar beter inzicht wordt verkregen, verdwijnt de vrijheid; maar ook alleen dan geeft men haar gaarne prijs, die anders met hand en tand zou verdedigd worden.

Dien heerlijken dwang, iets hoogers dan het „moeten" van een onkundig gezaghebbende, gelooven wij bij de taak, die wij op ons namen, voldongen te vinden in de volgende overweging.

Stelling. *Indien gegeven is eene vlakke figuur besloten binnen eene in zichzelve wederkeerende gebroken of gebogen lijn zonder dubbele punten, en verlangd wordt deze figuur te verdeelen in twee stukken van gelijken inhoud, terwijl de som der traagheidsmomenten, voor elk deel genomen ten opzichte eener loodrechte as door het zwaartepunt een minimum moet zijn, dan moet de afstand tusschen de twee zwaartepunten een maximum wezen.*

Bewijs. Laat O het zwaartepunt zijn van de gegeven figuur zijn, AB de deellijn, waarvan de gedaante nog niet bepaald is, en Z_1, Z_2 de zwaartepunten van de twee stukken der figuur. De inhoud der figuur zij I.



Stellen wij verder $OZ_1 = OZ_2 = x$, en duiden wij door M, M_1 en M_2 aan de traagheidsmomenten der geheele figuur en van de beide deelen ten opzichte eener as door O, dan is:

$$M_1 + M_2 = M.$$

Zijn T_1 en T_2 de traagheidsmomenten der deelen ten opzichte van Z_1, resp. Z_2, dan hebben wij:

$$T_1 = M_1 - \tfrac{1}{2} I x^2 \text{ en } T_2 = M_2 - \tfrac{1}{2} I x^2$$

of:

$$T_1 + T_2 = M - I x^2.$$

Hierin zijn M en I gegeven constante grootheden, zoodat $T_1 + T_2$ slechts een minimum kan zijn, indien x^2 of x of $2x$ zoo groot mogelijk genomen wordt.

Ook indien de twee deelen der figuur niet onderling gelijk gegeven waren zou de stelling geldig blijven. Want, noemen wij die deelen I_1 en I_2 en den afstand der beide zwaartepunten x, dan is met behoud der zelfde notatie voor de overige elementen:

$$T_1 = M_1 - I_1 \left(\frac{I_2}{I} x\right)^2 \text{ en } T_2 = M_1 - I_2 \left(\frac{I_1}{I} x\right)^2,$$

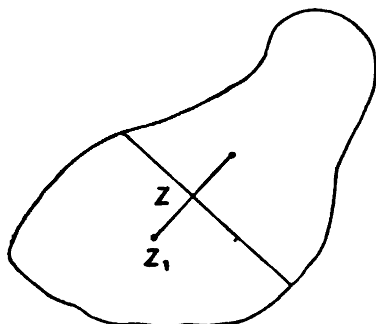
dus:

$$T_1 + T_2 = M - 2 \frac{I_1 I_2}{I} \cdot x^2,$$

zoodat ook hier x zoo groot mogelijk moet genomen worden om $T_1 + T_2$ tot een minimum te maken.

Is x een maximum, dan zijn ook OZ_1 en OZ_2 tegelijk maxima; vindt men dus voor eene van deze twee grootheden een maximum, dan is er ook een voor de andere bepaald.

Is (fig. 2) Z het zwaartepunt der gegegeven figuur, Z_1 dat van een der twee gelijke deelen, dan beweren wij dat de deellijn geene andere kan zijn dan eene rechte, die met den omtrek der figuur een inhoud = $\frac{1}{2}$ I insluit en tegelijk loodrecht staat op ZZ_1. Want, stellen wij ons de gegeven figuur voor als den bodem eener bus of doos van gelijkmatige diepte, rondom gesloten en voor de helft gevuld met eene zware vloeistof en denken wij ons verder door de zwaartepunten van bodem en deksel eene as, horizontaal geplaatst, waarom de doos, ledig zijnde in evenwicht is, dan zal de afstand ZZ_1 tusschen het zwaartepunt der ingesloten vloeistof en de as alleen dan een maximum zijn wanneer het punt Z_1 verticaal onder Z zich bevindt en de spiegel der vloeistof horizontaal ligt.



Wij besluiten, dat als van een cilinder met willekeurige basis niet meer dan twee hoogten zullen gemeten worden, de meest gegeschikte plaatsen voor de voetpunten worden gevonden door de basis in twee gelijke deelen te verdeelen door eene rechte, die loodrecht staat op de rechte, die de zwaartepunten van beide deelen vereenigt. Op het zwaartepunt van elk deel is dan eene hoogte te meten.

Hebben wij tot nu in onze beschouwing niet gedwaald, dan is theoretisch de weg gevonden om te komen tot eene rationeele verspreiding der voetpunten van een gegeven aantal hoogten in een cilinder met willekeurige basis. Want, verdeelen wij de basis op volkomen willekeurige wijze in *n* deelen van gelijken inhoud, die wij *a*, *b*, *c* .. noemen, en voegen wij twee aangrenzende deelen te zamen, b.v. *a* en *b*, dan kan men de uit de *a* en *b* zamengestelde figuur op de aangeduide wijze in tweeën verdeelen. Noemen wij die deelen a' en b'. Wij voegen dan a' te zamen met een ander aangrenzend deel b.v. met *c* en verdeelen de combinatie a' *c* op gelijke manier. Zoo voortgaande zal men eindelijk komen tot eene verdeeling,

waarbij voor geene twee aangrenzende deelen eene betere splitsing is aan te geven.

Het behoeft wel niet gezegd te worden, dat men bij de toepassing van ons beginsel juist niet zal uitgaan van eene geheel willekeurige of fantastische verdeeling. In het gevonden principe vindt men al dadelijk de aanwijzing om de deelen van den cilinder rondom elke hoogte zoo dicht mogelijk bij die hoogte te doen aansluiten.

Had men b.v. bij het nemen van een monster uit metalen platen telkens slechts ééne proef te nemen, dan is vanzelf de cirkelvorm daarvoor aangewezen. Heeft men een zeer groot aantal hoogten te bepalen, dan beveelt zich de regelmatige zeshoek aan. Bij eene nauwgezette exploratie zal het wel niet op eenige waarnemingen meer aankomen, zoodat men voor eene voorloopige verdeeling eene zoodanige zal kiezen, waarbij de basis bedekt wordt met regelmatige zeshoeken, elk gelijk aan het n^e deel der basis, en die dan zoo op de basis schikt, dat de omtrek der daardoor verkregen figuur zoo goed mogelijk met dien der basis zamenvalt. Dan blijft slechts over den vorm der deelen zoo te corrigeeren, dat aan het ontwikkelde voorschrift wordt voldaan.

Maar men verzuime niet op te letten, en ook tegen dezen regel is door vroegere leeraars gezondigd, of de oppervlakte, waarover het onderzoek gaat, als een stadig oppervlak mag beschouwd worden. Dat is misschien niet volkomen het geval bij den cilinder van FORTIN, die hol doch inwendig door een kruis versterkt is, doch zeker niet bij de inhoudsmaten, waarvan de bodem aan den buitenkant is versterkt door gekruiste metalen strooken. Van wege die kruisstrooken behoort de basis in vier deelen te worden verdeeld, en zijn in elk kwadrant de meest geschikte plaatsen voor het meten der hoogten in voldoend aantal op te sporen.

De leer der kleinste kwadraten is het kompas der waarnemers. Waar men hare voorlichting verwaarloost, is men als de zeevaarder in den ouden tijd, die vreesde den vasten wal uit het oog te verliezen. Zoo zou men zich gedragen door bij het meten van hoogten in een cilinder die hoogten te nemen tegen den wand, bij gelegenheid tegen den stijl eener maat, juist plaatsen, die een beter inzicht leert met zorg te vermijden.

Q 2, K 14 f

STERVORMIGE POLYTOPEN

DOOR

P. MULDER.

(Leiden.)

---

§ 1. In de *Marburger Sitzungsberichte* van Mei 1885 bewijst prof. EDMUND HESS op sierlijke wijze langs trigonometrischen weg het bestaan van tien stervormige regelmatige lichamen van vier dimensies. Eenige daarvan en wel de meest ingewikkelde waren vermoedelijk al veel vroeger door L. SCHLAEFLI gevonden, wiens werk evenwel eerst in 1902 gepubliceerd werd, [zie SCHOUTE, *Mehrdimensionale Geometrie*, II, pp. 235 en 63].

Er zijn verschillende andere wegen mogelijk, waarlangs men tot dezelfde resultaten kan komen. Eigenlijk is elk der methoden, die dienst doen om in drie dimensies de stervormige lichamen af te leiden, tot vier dimensies uit te breiden.

§ 2. De meest gebruikelijke methode berust op de eigenschap, dat de stervormige lichamen dezelfde hoekpunten moeten hebben als de gewone regelmatige lichamen. Reciprook hiermede is de eigenschap, dat de zijvlakken van een stervormig regelmatig lichaam dezelfde raakpunten met den ingeschreven bol moeten hebben als een niet-stervormig, en dus moeten kunnen ontstaan door verlenging van de zijvlakken daarvan.

Daarbij ontstaat uit den vijfhoek in de zijvlakken van het gewone twaalfvlak eerst een stervijfhoek, dan weder een gewone vijfhoek en ten slotte weer een stervijfhoek.

Beschouwt men bijvoorbeeld in het twaalfvlak (fig. 1) eerst de zijvlakken I en II en vergroot men nu alle zijvlakken tot stervijfhoeken, dan zullen die beide zijvlakken niet alleen de oude ribbe AB gemeen hebben, maar op die oude ribbe de nieuwe hoekpunten C en D. Maar in het nieuwe hoekpunt C zal ook de ribbe EF uitkomen, die de zijvlakken II en III gemeen

hadden; dus ook het zijvlak III komt in het punt C met de zijvlakken I en II samen. Maar ook III heeft een tweede ribbe, die in het punt C uitkomt. Zoo kan men doorgaan, tot men alle ribben van het oude lichaam gevonden heeft, die bij verlenging in C uitkomen. Dan heeft men in C een veelvlakshoek, met gelijke tweevlakshoeken, de tweevlakshoeken van het oude lichaam, en gelijke zijden, de hoeken van den stervijfhoek: een regelmatige veelvlakshoek dus. En de ver-

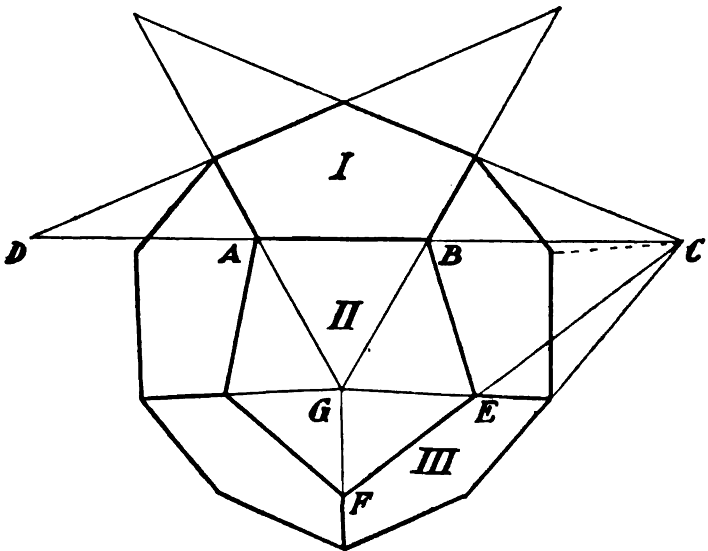


Fig. 1.

lengde zijvlakken van het twaalfvlak komen in stervijfhoeken bijeen en vormen dus een regelmatig lichaam K_3, het twaalfhoekige stertwaalfvlak. Alle zijvlakken, die een bepaald zijvlak omringen, komen nu samen in een hoekpunt gelegen op de straal van het middelpunt van dat zijvlak. Dit lichaam en het gewone twaalfvlak zijn dus de beide lichamen, die begrensd worden door vijfhoeken, gevormd door lijnen, welke op ieder zijvlak worden bepaald door de snijding met den eersten gordel van zijvlakken, die het zijvlak omringen.

Ook de tweede gordel van zijvlakken bepaalt twee vijfhoeken. Ten opzichte van het zijvlak I behoort daartoe o.a. het zijvlak III. Van de snijlijn der vlakken I en III zijn in de figuur reeds twee punten aangegeven, zooals blijken zal de hoekpunten. In het tweede twaalfvlak toch hadden I en III reeds de punten C en G gemeen, en CG is dus de snijlijn der vlakken I en III. De andere vier vlakken van den gordel waartoe III behoort zullen eveneens I snijden, elk volgens een verbindingslijn van twee hoekpunten van het stervijfhoekige zijvlak van het tweede twaalfvlak.

Zoo vindt men als eerste zijvlak, dat de gordel van vlak III van het vlak I afsnijdt: de gewone vijfhoek op de hoekpunten van den stervijfhoek van K_3.

De veelvlakshoek van dit lichaam is een stervijfvlakshoek, ontstaan door verlenging van de zijden van den vijfvlakshoek van het tweede twaalfvlak. Zoo ontstaat dus P_3, het sterhoekige twaalfvlak. Dit lichaam heeft dezelfde ribben als het gewone twintigvlak.

Door vergrooting van de zijvlakken tot stervijfhoeken, dus door verlenging der ribben, verkrijgt men een nieuw lichaam met nieuwe hoekpunten, waarbij de zijvlakken in drievlakshoeken bijeenkomen, het twintighoekige stertwaalfvlak K_7. Nu zijn in het vlak I en ook in alle andere zijvlakken alle lijnen geteekend, volgens welke de andere vlakken dit vlak snijden; dus zijn er behalve deze vier geen 12-vlakken meer mogelijk.

§ 3. Ook zonder de lichamen te onderzoeken had men al van te voren kunnen zeggen, 1°. dat het aantal lichamen begrensd door vijfhoeken even moet zijn. Immers hoedanig een lichaam ook is, dat begrensd is door vijfhoeken, steeds kan men van die vijfhoeken stervijfhoeken maken door verlenging van de ribben en in de nieuwe figuur, die dan ontstaat, zullen in de nieuwe hoekpunten twee ribben van een zijvlak elkaar ontmoeten, die eerst geen punt gemeen hadden, bijvoorbeeld AB en FE in C, en daarmede ook twee zijvlakken, die eerst door het tusschenliggend zijvlak gescheiden werden, bijvoorbeeld I en III. In de nieuwe hoekpunten ontstaat dus een veelvlakshoek met gelijke zijden, welks hoeken dezelfde zijn als die van het eerste lichaam, dus een regelmatige veelvlakshoek.

Ook geldt de reciproke eigenschap, 2°. dat het aantal lichamen

met vijfvlakshoeken tot hoek even is; want steeds kan men van één lichaam met gewone vijfvlakshoeken een lichaam afleiden met dezelfde hoekpunten en dezelfde ribben, met stervormige vijfvlakshoeken.

Het is wellicht niet overbodig hier even op te merken, dat men somtijds uit een lichaam een nieuw kan afleiden door vergrooting van een stervijfhoekig zijvlak tot een gewonen vijfhoek of door verlenging van de zijvlakken van den gewonen vijfvlakshoek tot dien van een stervijfvlakshoek, zooals bijvoorbeeld bij de afleiding van het derde uit het tweede twaalfvlak. Maar daar men hierbij nieuwe ribben verkrijgt, kan men niet in het algemeen zeggen: in het eerste geval, of die ribben tot twee zijvlakken zullen behooren, en in het tweede geval, of de nieuwe ribben juist weer in een hoekpunt zullen uitkomen.

§ 4. Beschouwt men nu de vijf gewone regelmatige lichamen, en de drie stervormige, die hier besproken zijn, dan ziet men,

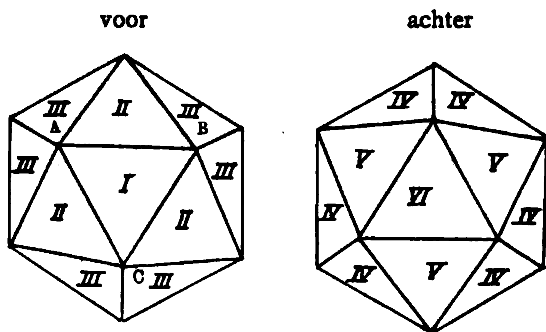
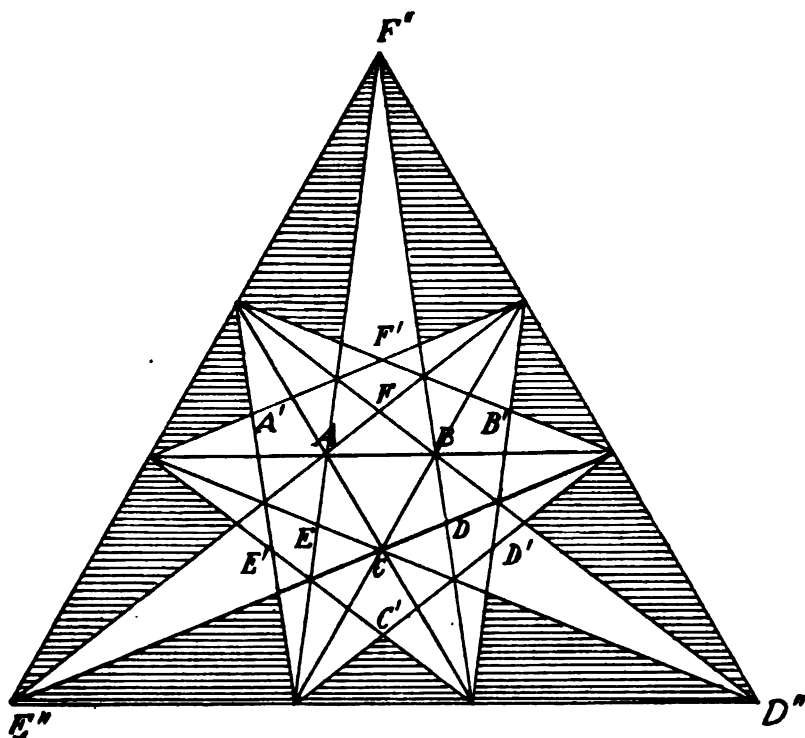


Fig. 2.

dat drie daarvan vijfvlakshoeken hebben, namelijk het twintigvlak en het tweede twaalfvlak een gewonen, en het derde twaalfvlak een stervijfvlakshoek. Derhalve moet er nog een lichaam zijn met een stervijfvlakshoek tot hoek en dit is het stervormige twintigvlak.

Ook dit kunnen we uit het gewone twintigvlak afleiden door vergrooting der zijvlakken. Men kan bij het twintigvlak (fig. 2)

zes gordels van zijvlakken onderscheiden, respectievelijk 1, 3, 6, 6, 3, 1 zijvlak tellende, die we met de cijfers I, II, III, IV, V, VI aanduiden. Tèn opzichte van het zijvlak I bepalen de eerste drie (fig. 3) het gewone zijvlak ABC, snijdt het daarop volgende eerste zestal een onregelmatigen zeshoek



(Het *zichtbare* gedeelte van het zijvlak is geschaduwd.)

Fig. 3.

AFBDCE in, en eveneens het tweede zestal een onregelmatigen zeshoek A′F′B′D′C′E′. Ten slotte doet het tweede drietal weer een gelijkzijdigen driehoek D″E″F″ ontstaan, en als men dus elk der zijvlakken tot zulk een driehoek vergroot, verkrijgt men een regelmatig twintigvlak begrensd door driehoeken. De hoeken zijn stervijfvlakshoeken, de uiterlijke vorm gelijkt op die van

het tweede twaalfvlak, waarmee het de ribben gemeen heeft.

Dat de hoeken stervijfvlakshoeken zijn, moge fig. 4 verduidelijken, waar aan het gewone twintigvlak vijf vlakken, die een vijfvlakshoek van het stervormige twintigvlak moeten vormen, zijn geschaduwd Twee ervan zijn volledig geteekend, een met alle snijlijnen, die achttien vlakken er op afteekenen [1]).

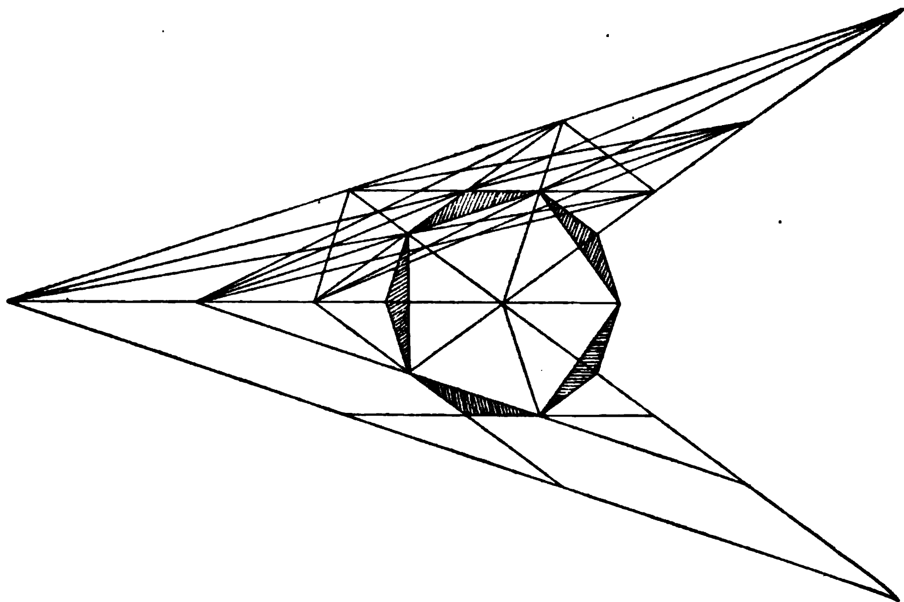


Fig. 4.

§ 5. Om een overzicht te verkrijgen van de regelmatige lichamen van drie dimensies, vereenig ik deze in een tabel, zoodanig, dat in iedere rij de lichamen komen te staan, die dezelfden veelvlakshoek hebben en in iedere kolom de lichamen, die hetzelfde zijvlak hebben.

Beschouwde ik alleen de niet-stervormige lichamen, dan zou de tabel dus, zooals bekend is, drie rijen en drie kolommen moeten tellen.

Beschouw ik ook de stervormige, dan komt er een rij bij

---

[1]) Afbeeldingen der vier stervormige lichamen vindt men o. a. in LANDRÉ, *Stereometrische hoofdstukken.*

voor den stervijfvlakshoek en een kolom voor den stervijfhoek.

Het bovenste getal in ieder hokje is het aantal zijvlakken van het lichaam, het onderste het aantal hoekpunten. Het

Tabel I.

hoek \ zijvlak	3	4	5	*5
3	IV (3, 3) 4	VI (4, 3) 8	XII D (5, 3) 20	XII K_7 (*5, 3) 20
4	VIII (3, 4) 6	—	—	—
5	XX I (3, 5) 12	—	—	XII K_3 (*5, 5) 12
*5	XX P_7 (3, *5) 12	—	XII P_3 (5, *5) 12	—

cijferpaar in het midden bevat de cijfers van kolom en rij, het kolomcijfer voorop, dus van zijvlak en veelvlakshoek, en dient om er het lichaam bij verkorting mede aan te duiden.

De notatie K_3, P_3, K_7 en P_7 is van prof. Hess en herinnert aan de ontdekkers Kepler en Poinsot. De index is het soortgetal.

Reciproke lichamen zijn in de tabel symmetrisch geplaatst ten opzichte van de hoofddiagonaal en hebben het cijferpaar in omgekeerde volgorde.

We resumeeren de punten van samenhang, die tusschen de zes lichamen bestaan, in de volgende:

Tabel Ia.

lichamen met dezelfde 12 vlakken D (5,3) K_3 (*5,5) P_3 (5,*5) K_7 (*5,3)	lichamen met dezelfde vlakken en ribben D (5,3) K_3 (*5,5)	 P_3 (5,*5) K_7 (*5,3)	lichamen met dezelfde vlakken en hoekpunten K_3 (*5,5) P_3 (5,*5)	lichamen met dezelfde 20 vlakken I (3,5) P_7 (3,*5)	lichamen met dezelfde ribben D (5,3) K_3 (*5,5) P_7 (3,*5)
lichamen met dezelfde 12 hoekpunten I (3,5) P_3 (5,*5) K_3 (*5,5) P_7 (3,*5)	lichamen met dezelfde hoekpunten en ribben I (3,5) P_3 (5,*5)	 K_3 (*5,5) P_7 (3,*5)		lichamen met dezelfde 20 hoekpunten D (5,3) K_7 (*5,3)	lichamen met dezelfde ribben I (3,5) P_3 (5,*5) K_7 (*5,3)

§ 6. Ieder regelmatig lichaam van vier dimensies moet nu tot begrenzend zijlichaam hebben een van de lichamen uit deze tabel, terwijl ook het veelkant [1]) zijn naam aan een dezer negen lichamen moet ontleenen.

De veelvlakshoek van het veelkant komt dan overeen met het zijvlak van het lichaam waarmee het verwant is, het vlak van het veelkant met de ribbe van het lichaam, en de ribbe van het veelkant met het hoekpunt van het lichaam.

[1]) Een regelmatig vierdimensionaal veelkant is een veelkant, dat geprojecteerd op een driedimensionale ruimte, die van alle ribben gelijke stukken afsnijdt, het complex van regelmatige veelvlakshoeken oplevert, dat in een regelmatig lichaam van drie dimensies wordt gevormd door de veelvlakshoeken, waaronder de zijvlakken van het middelpunt uit worden gezien. Zoo is een regelmatige driedimensionale veelvlakshoek een veelvlakshoek, die geprojecteerd op een vlak, dat van alle ribben gelijke stukken afsnijdt, het complex van gelijke hoeken oplevert, dat in een plat vlak wordt gevormd door de hoeken, waaronder de ribben van een regelmatigen veelhoek van het middelpunt uit worden gezien.

In vier dimensies wordt nu door het cijferpaar zoowel het zijlichaam als de veelkantshoek aangeduid. Evenals in drie dimensies een lichaam volkomen bepaald is, als men het zijvlak en den veelvlakshoek opgeeft — mits het bestaanbaar is —, zoo is in vier dimensies een cel volkomen bepaald door zijlichaam en veelkantshoek, derhalve door twee cijferparen.

Neemt men nu tot begrenzend lichaam bijvoorbeeld een van de lichamen uit de eerste rij, dan is dit dus een lichaam met een drievlakshoek tot hoek. De veelkantshoek van de vierdimensionale cel moet dus uit drievlakshoeken bestaan, dus te vinden zijn in de eerste kolom.

Zoo heeft men dus bijvoorbeeld een cel met de kubus (4,3) tot zijlichaam en den regelmatigen vierkantshoek (3,3) tot hoek.

Het tweede cijfer nu van het zijlichaam duidt den veelvlakshoek aan en dit zelfde cijfer moet dus steeds het eerste zijn van den veelkantshoek. Zoo komt men tot de samensmelting van twee cijferparen tot een cijferdrietal, waarmede de vierdimensionale cel wordt aangeduid. De cel met de kubus tot zijlichaam en het regelmatige vierkant tot veelkantshoek heeft dus het cijferdrietal (4,3,3).

Van een cel (m, p, q) is dan (m, p) het zijlichaam, (p, q) het veelkant, m het zijvlak, p de veelvlakshoek, q de soort van ribbe, d. w. z het aantal zijlichamen, dat aan iedere ribbe samenkomt. Is $q = {}^{*}5$, dan vormen de standhoeken van de vijf tweevlakshoeken, die aan die ribbe bijeenkomen een stervijfvlakshoek. De reciproke cel van (m, p, q) is (q, p, m).

Ten slotte kan men alle regelmatige cellen in vier tabellen rangschikken, waarvan de eerste de lichamen bevatten moet met de driedimensionale lichamen van de eerste rij van tabel I tot begrenzend zijlichaam en de lichamen van de eerste kolom tot veelkant, de tweede de lichamen van de tweede rij tot zijlichaam en de lichamen van de tweede kolom tot veelkant, enz. In ieder dier tabellen zijn de cellen vereenigd, die het zelfde middencijfer hebben, d. w. z. denzelfden veelvlakshoek.

Bij het onderzoek zal ons blijken, dat de tabellen ingevuld er aldus uitzien:

Tabel II.

zijlichaam / veelkant	(3, 3)	(4, 3)	D XII (5, 3)	K_7 XII (*5, 3)
(3, 3)	5-cel (3, 3, 3)	8-cel (4, 3, 3)	120-cel (5, 3, 3)	(*5, 3, 3)
(3, 4)	16-cel (3, 3, 4)	+	+	—
I XX (3, 5)	600-cel (3, 3, 5)	+	+	(*5, 3, 5)
P_7 XX (3, *5)	(3, 3, *5)	—	(5, 3, *5)	—

Tabel III.

zijlichaam / veelkant	(3, 4)
(4, 3)	24-cel (3, 4, 3)

INHOUD.

Title Page

NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

TWEEDE REEKS
DEEL VII
VIERDE STUK

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1907

Tabel IV.

zijlichaam / veelkant	I XX (3, 5)	K_3 III (*5, 5)
D XII (5, 3)	+	(*5, 5, 3)
P_3 XII (5, *5)	(3, 5, *5)	(*5, 5, *5)

Tabel V.

zijlichaam / veelkant	P_7 XX (3, *5)	P_3 XII (5, *5)
K_7 XII (*5, 3)	—	(5, *5, 3)
K_3 XII (*5, 5)	(3, *5, 5)	(5, *5, 5)

In deze tabellen zijn dus elf plaatsen voor niet-stervormige polytopen en veertien plaatsen voor stervormige. Van de eerste elf zijn er, zooals bekend is, vijf onbezet. Deze zijn door + aangeduid. Om nu te weten te komen, welke stervormige lichamen er zijn, zou men stuk voor stuk voor elk van de veertien plaatsen in de tabellen kunnen onderzoeken, of het lichaam bestaanbaar is. Maar dit wordt nog al omslachtig;

wij willen een korteren weg inslaan. Daarbij zal al spoedig kunnen worden uitgemaakt, dat het aantal hoogstens tien kan zijn.

§ 7. Men kan in vier dimensies twee stellingen geven analoog met de beide van § 3 in drie dimensies.

1. *Het aantal regelmatige cellen begrensd door twaalfvlakken is deelbaar door vier, het aantal regelmatige cellen begrensd door twintigvlakken is deelbaar door twee.* Als we een lichaam hebben begrensd door 12-vlakken en we vergrooten het zijlicham tot het een volgend twaalfvlak is, dan zullen bijvoorbeeld in de nieuwe hoekpunten twee vlakken elkaar ontmoeten, die eerst geen punt gemeen hadden en dus ook twee cellen, die eerst geen punt gemeen hadden. Het is duidelijk, dat in de nieuwe hoekpunten een aantal regelmatige veelvlakshoeken aan elkaar zullen sluiten en dat van deze evenveel aan iedere ribbe zullen samenkomen. Die zullen dus een regelmatige veelkantshoek vormen en het aldus beschreven lichaam zal een stervormig regelmatig lichaam zijn. Zoo kan men dus van elk lichaam begrensd door twaalfvlakken drie andere afleiden, namelijk een met elk van de drie andere twaalfvlakken tot zijlichaam.

De reciproke eigenschap luidt nu niet: „het aantal lichamen met twaalfkantshoeken is deelbaar door vier, dat met twintigkantshoeken is deelbaar door twee", maar: kan men van een lichaam met een der vier twaalfvlakken tot zijlichaam steeds een lichaam afleiden met elk der drie andere twaalfvlakken tot zijlichaam, men kan ook van een lichaam, waarvan het veelkant zijn naam ontleent aan een der vier met die twaalfvlakken reciprook polaire lichamen, beurtelings een lichaam afleiden, waarvan het veelkant zijn naam ontleent aan elk der drie andere met die twaalfvlakken reciprook polaire lichamen.

De twaalfvlakken zijn: D, K_3, P_3 en K_7, hun reciprook polaire lichamen I, P_3, K_3 en P_7, d. z. twee twintigvlakken en twee twaalfvlakken.

Van het tweede gedeelte van de stelling luidt de reciproke eigenschap: Van een polytoop, waarvan de veelkant zijn naam ontleent aan een lichaam reciprook met een twintigvlak, met een veelkant met twintig ribben dus, kan men steeds een polytoop afleiden, waarvan het veelkant zijn naam ontleent aan

het andere veelkant met twintig ribben, m. a. w. er zijn even veel lichamen met de veelkant D als met de veelkant K_{γ}.

Derhalve: *Het aantal regelmatige cellen, met twaalf ribben in ieder hoekpunt is deelbaar door vier en het aantal regelmatige cellen met twintig ribben in ieder hoekpunt is deelbaar door twee.*

Alvorens nu met behulp van deze eigenschappen alle stervormige lichamen trapsgewijze uit de gewone 120-cel en de 600-cel af te leiden, geven we eerst nog eenige regels, volgens welke die afleiding kan geschieden.

Terloops zij hier opgemerkt, dat we na het voorgaande eigenlijk al kunnen uitmaken, dat het aantal stervormige lichamen hoogstens tien kan zijn. In de tabellen zijn die plaatsen met een + gemerkt, waar een niet stervormig lichaam zou staan, wanneer het bestaanbaar was. We weten dus bijvoorbeeld, dat er in de derde kolom van tabel II, waar alle lichamen moeten vermeld zijn begrensd door gewone twaalfvlakken, hoogstens twee plaatsen bezet kunnen zijn. Derhalve kan ook elk der vier twaalfvlakken slechts van twee cellen het zijlichaam zijn, en zal dus ook in de vierde kolom van tabel II het aantal cellen twee moeten bedragen. Verder, daar in tabel IV de eerste plaats ledig is, moet ook in de eerste kolom van tabel V een plaats ledig blijven.

Dit alles geldt ook, wanneer men het woord kolom door rij vervangt en zijlichaam door veelkant, twaalfkant door twaalfbeen (dit woord is van Steiner).

En hieruit volgt dan, dat het aantal hoogstens tien kan zijn.

§ 8. Vermelden we nu in dualistischen samenhang eenige regels voor de transformatie van het eene lichaam in het andere:

a	*b*
Bij al of niet veranderen van:	veranderen al of niet in vier dimensies bij het reciproke lichaam:
α. de hoekpunten	α. de zijlichamen.
β. de ribben	β. de vlakken.
γ. de vlakken	γ. de ribben.
δ. de zijlichamen	δ. de hoekpunten.
ε. de veelvlakshoek van de cel.	ε. de veelvlakshoek van het veelkant.
ζ. de vorm van het zijvlak .	ζ. het tweevlakshoekencomplex op de ribbe.

η. een vijfvlakshoek in een stervijfvlakshoek door verlenging der zijvlakken.

η. een vijfvlakshoek in een stervijfvlakshoek door constructie der diagonaalvlakken.

In het algemeen geldt in vier dimensies,

als we een regelmatige cel uit een ander afleiden door vergrooting van een twaalf- of twintigvlakkig zijlichaam tot een ander twaalfvlak, resp. twintigvlak, met dezelfde zijvlakken:

1. De zijvlakken blijven hetzelfde in ligging.

2. Aan ieder zijvlak blijven dezelfde zijlichamen aan elkaar grenzen.

als we een regelmatige cel uit een ander afleiden door vergrooting van het twaalf- of twintigkantige veelkant met dezelfde ribben:

1. De ribben blijven hetzelfde in ligging.

2. Iedere ribbe behoudt dezelfde hoekpunten.

In het bijzonder geldt nog bovendien steeds:

3. Bij de vergrooting van het gewone twaalfvlak D tot het tweede K_3 worden de ribben alleen maar verlengd, maar de tweevlakshoeken daaraan blijven hetzelfde. Het derde cijfer q in de formule verandert dus niet. Uit $(5, 3, q_1)$ wordt afgeleid $(^*5, 5, q_1)$.

4. Bij de vergrooting van het twaalfvlak K_3 tot P_3 behoudt het zijlichaam zijn oude hoekpunten, maar krijgt zij nieuwe ribben door verlenging van de vlakken. Welk het veelkant van het nieuwe lichaam is, volgt in ieder bijzonder geval uit de formule

3. Bij de vergrooting van de veelkant I tot P_3 blijven de zijden der veelvlakshoeken hetzelfde, maar vormen zij andere veelvlakshoeken, eerst drievlakshoeken, daarna vijfvlakshoeken. Alle zijvlakken blijven dus onveranderd, aangezien alle hoeken daarvan hetzelfde en alle ribben even lang blijven, al begrenzen ze geheel andere cellen. Het eerste cijfer in de formule verandert dus niet. Uit het bestaan van $(m_1, 3, 5)$ volgt dus het bestaan van $m_1, 5, {}^*5)$.

4. Bij de vergrooting van het veelkant P_3 tot K_3 blijven dezelfde zijlichamen in een hoekpunt samenkomen, maar verkrijgen deze nieuwe zijvlakken. Daar zij dezelfde hoekpunten en ribben behouden, is het steeds gemakkelijk uit te maken, welke for-

van het oude. Uit (*5, 5, q_1) volgt dus (5, *5, q_2).

5. Bij de vergrooting van het derde twaalfvlak P_3 tot het vierde K_7 geldt hetzelfde als bij die van het eerste tot het tweede.

Zoo leidt men uit (5, *5, q_2) de cel (*5, 3, q_2) af.

6. Bij de vergrooting van het gewone twintigvlak I tot een stervormig P_7 krijgt ieder zijvlak geheel nieuwe ribben en hoekpunten. Zoo verkrijgt men uit (3, 5, q_1) de cel (3, *5, q_2). Hoe men q_2 moet vinden, is niet algemeen van te voren te zeggen.

mule de nieuwe zijlichamen hebben. Uit (m_1, 5, *5) volgt dus (m_2, *5, 5).

5. Bij de vergrooting van het veelkant K_3 tot P_7 geldt hetzelfde als onder 3 van de vergrooting van I tot P_7 gezegd is.

Zoo hangt met een cel (m_2,*5,5) een cel (m_2, 3, *5) samen.

6. Bij de vergrooting van het gewone twaalfkant D tot het stervormige twaalfkant K_1 verkrijgt ieder van de twaalf vijfvlakshoeken geheel nieuwe zijvlakken.

En als men vergelijkt: een vijfvlakshoek van het veelkant D en een van het veelkant K_7, die in de projectie op de driedimensionale ruimte die van alle ribben gelijke stukken afsnijdt, dezelfde as hebben, dan liggen bij K_7 de even lang gebleven ribben wijder uiteen dan bij D. Dus ligt bij K_7 het middelpunt van de cel op de as van den vijfvlakshoek, verder van het hoekpunt verwijderd dan bij D. In elk hoekpunt komen dus andere, grootere zijlichamen bijeen dan bij de cel, waarvan we uitgaan.

Zoo volgt uit (m_1, 5, 3) de cel (m_2, *5, 3), maar hoe m_2 bepaald moet worden, is niet van te voren te zeggen.

7. Nog dient te worden opgemerkt, dat de volgorde der afleiding onverschillig is. Kende men bijvoorbeeld een cel (*5, 5, q), dus met K_3 tot zijlichaam, dan zou men daaruit kunnen afleiden een cel met D tot zijlichaam, d. w. z. (5, 3, q).

8. Even als in drie dimensies in sommige gevallen een stervijfhoekig zijvlak tot een gewone vijfhoek kan vergroot worden, maar men niet in het algemeen kan zeggen, dat dit altijd een nieuw lichaam zal opleveren, zoo zal men hier ook in vier dimensies bij de vergrooting van zijlichamen of veelkanten in bijzondere gevallen van regels zien gebruik maken, die niet in het algemeen tot de vorming van een nieuw lichaam zullen leiden.

Dit geldt bijvoorbeeld in de volgende § van de afleiding van het veelkant van (3) uit dat van (2).

§ 9. (1). We nemen als uitgangspunt van onze beschouwingen de gewone 120-cel (5, 3, 3) en verdeelen daarvan de zijlichamen naar hun rangschikking om den straal van een celmiddelpunt (c.f. SCHOUTE, II, p. 223) in de groepen:

$$A \ 12B_{20C} \ 12D_{30E} \ 12D'_{20C'} \ 12B' \ A'.$$

(2). We kunnen nu allereerst de ribben verlengen tot elk zijvlak een stervijfhoek, elk begrenzend lichaam een twaalfhoekig stertwaalfvlak wordt. In ieder van zijn twaalf hoekpunten ontmoet nu een zijlichaam A behalve de vijf zijlichamen B, waar het de zijvlakken mede gemeen heeft, vijf zijlichamen C en een zijlichaam D. Het zijlichaam wordt van (5 . 3) (*5 . 5) en aan de ribbe blijven drie zijlichamen bijeenkomen, zooals bij (1) [§ 8, *a*, 3,], dus de cel is (*5 . 5 . 3). De 120 hoekpunten liggen op de verlengden van de stralen van de zijlichaamsmiddelpunten.

(3). Als men het zijlichaam laat groeien tot een twaalfvlakkige stertwaalfhoek P_3, dan behoudt de cel dezelfde hoekpunten [§ 8, *a*, 4]. De vlakken van iederen veelvlakshoek worden verlengd, tot ze elkaar wederom snijden. Dit komt dus voor het driedimensionale lichaam, waaraan het veelkant zijn naam ontleent, op een verlenging der ribben van ieder zijvlak neer, zoo dat de zijvlakken, waaraan de veelvlakshoeken van het veelkant beantwoorden, van vijfhoeken stervijfhoeken worden.

Het veelkant (5, 3) wordt daarbij (*5, 5) *).

---

*) Het is duidelijk, dat als het lichaam (*5 . 5) zijlichaam is, deze vergrooting der zijvlakken altijd kan plaats hebben, daar de hoekpunten van de nieuwe zijvlakken reeds in de figuur aanwezig zijn.

Uit een veelkant (5 . 3) komt dan een veelkant (*5 . 5), uit een veelkant

De cel wordt (5, *5, 5). De nieuwe ribben hebben dus ook een ander cijfer. Daar sluiten vijf tweevlakshoeken aan elkaar, waarvan de standhoeken een gewonen vijfvlakshoek vormen.

(4). Nu kan men nog met behoud van dezelfde zijvlakken een vierde 120-cel verkrijgen, de derde stervormige, door verlenging der zijvlakken tot stervijfhoeken. Hierbij blijft weer, daar de ribben eenvoudig verlengd worden, [§ 8, *a*, 5] het ribbecijfer onveranderd. De eigenschappen van deze cel zijn af te lezen uit de formule (*5 . 3 . 5).

(5). Het ligt voor de hand te beproeven het begrenzende zijlichaam van (3) te veranderen in een twintigvlak met dezelfde ribben en hoekpunten. Blijkbaar verkrijgt men dan in de ruimte van ieder zijlichaam van (3) een nieuw driedimensionaal lichaam en het is nu nog slechts de vraag of dit nieuwe lichaam dat blijkbaar in hoekpunten en ribben andere zijlichamen ontmoet, ook met zijn zijvlakken aan andere zijlichamen grenst.

Het antwoord op deze vraag hangt af van de ligging der zijlichamen van (3) dat is (5 . *5 . 5) om een hoekpunt heen. En zoo komt men vanzelf tot het inzicht, dat men zich hier bevindt op het gebied van [§ 8 *b*], want dat het hier de vraag is: Verkrijgt men een nieuw veelkant, wanneer men op de ribben van elken stervijfvlakshoek van het veelkant (*5 . 5) een gewonen vijfvlakshoek construeert?

[§ 8, *b*, 4] in omgekeerde richting toegepast, beantwoordt deze vraag bevestigend. Zoo verkrijgt men uit (5, *5 . 5) de vijfde 120-cel: (3 . 5 . *5). De ribben blijven hetzelfde in ligging en lengte, maar verkrijgen toch een ander cijfer, want de standhoeken van de vijf tweevlakshoeken vormen nu een stervijfvlakshoek, gelijk uit de formule blijkt.

Hier heeft nu het zijlichaam A een zijvlak gemeen met elk der zijlichamen C. (3), (4) en (5) hebben nu dezelfde ribben.

(5 . *5) een veelkant (*5 . 3). Dit kan men weer opmaken uit de verlenging der ribben bij het overeenkomstige veelvlak.

Als er een lichaam gevonden wordt met het gewone twintigvlak tot zijlichaam, dan zal men daar bij verlenging der zijvlakken wel het veelkant (5 . 3) of (5 . *5) dezelfde transformatie kunnen laten ondergaan, maar dit zal toch geen nieuw lichaam opleveren, omdat de nieuwe ribben door geen tweede hoekpunt zouden gaan.

De vergrooting van het veelkant (5 . 3) tot (*5 . 5) is dus weer een transformatie, die onder de rubriek § 8, 8 thuis behoort.

Alleen zijn die van (4) langer en dus heeft (4) andere hoekpunten.

(6). Het twintigvlakkig zijlichaam van (5) is voor vergrooting vatbaar. Het wordt dan een twintigvlakkige stertwaalfvlakhoek P_7, (3 . *5.) De beschouwing van een afbeelding van het begrenzende lichaam van (4) — fig. 6 — leert, dat de ribben van (*5 . 3 . 5) in de zijvlakken van het hier beschouwde lichaam liggen.

In nevenstaande figuur 5 stellen de lijnen AB, BC en CA

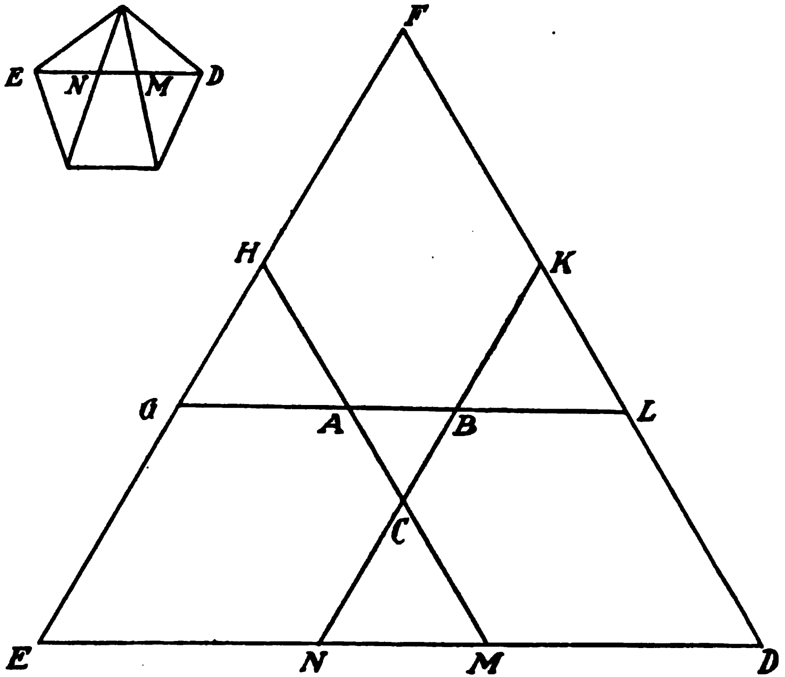


Fig. 5.

ribben voor van een zijlichaam van de 120-cel (3) en ook van de 120-cel (5).

Bij het twintigvlakkige zijlichaam van (5) zijn het de ribben van een zijvlak; bij (3) zijn het ribben van verschillende zijvlakken van het twaalfvlakkige zijlichaam. De ribben van de 120-cel (4) zijn langer in reden van $p : q$, als p voorstelt de diagonaal van een vijfhoek en q het door twee andere diagonalen daarop afgesneden stuk. De ribben van (5) worden

dan voorgesteld in de figuur door GL, KN en HM. Maar dan volgt hieruit dat, wanneer men het twintigvlak, waarvan ABC een zijvlak is, vergroot tot een stervormig twintigvlak, de ribben daarvan juist gaan door de punten G en H, K en L, M en N. De ribben toch van het stervormig twintigvlak snijden van de verlengde ribben van het gewone twintigvlak, waarmee het de zijvlakken gemeen heeft, stukken af, die zich ook verhouden tot die ribben als $p : q$.

De ribben van dit zijvlak van het stervormige twintigvlak zijn dus EF, FD en DE.

De formule van de 6de 120-cel, waarvan dit lichaam het begrenzend zijlichaam is, zal hieronder worden afgeleid.

(7). Het zijlichaam van (4), het 20-hoekig stertwaalfvlak kan men vergrooten tot een gewoon twaalfvlak met dezelfde hoekpunten. Opdat nu deze nieuwe twaalfvlakken wederom een 120-cel vormen, is het noodig en voldoende, dat in ieder hoekpunt de twintig nieuwe drievlakshoeken weder aansluiten tot een twintigkant. Aangezien bij (4) het veelkant een gewoon twintigkant is, moet dit dus een stertwintigkant zijn. Wordt het eerste twintigkant door een driedimensionale ruimte, die van alle ribben gelijke stukken afsnijdt, gesneden volgens de zijvlakken van een gewoon twintigvlak, dan moeten de twintig nieuwe drievlakshoeken diezelfde ruimte snijden volgens de twintig driehoekige zijvlakken van het stertwintigvlak, dat men verkrijgt als men de vlakken van dat gewone twintigvlak verlengt tot die van een stertwintigvlak, — want iedere drievlakshoek ligt in dezelfde driedimensionale ruimte als de oude en snijdt dus een ruimte, die van alle ribben van het veelkant gelijke stukken afsnijdt, volgens hetzelfde vlak.

Beschouwen we nu een der twintig twaalfvlakken, die in een hoekpunt O bijeen komen, en nemen we voor de ruimte, die van alle ribben van het twintigkant in O gelijke stukken afsnijdt, de ruimte, die de ribbe OA in A snijdt, dan snijdt deze ruimte de ruimte van het beschouwde zijlichaam volgens het vlak ABC. ABC is dus het zijvlak van het gewone twintigvlak, en dan is het driehoekig zijvlak van het stertwintigvlak, dat we gedefinieerd hebben, juist de driehoek DEF.

Snijdt nu in de ruimte van het beschouwde zijlichaam de drievlakshoek van het nieuwe gewone twaalfvlak dit vlak

volgens dien driehoek, dan zal deze drievlakshoek in de vierdimensionale ruimte met de drievlakshoeken van de andere 19 twaalfvlakken, die in O samen komen, een stertwintigkant vormen. Is dit niet het geval, dan blijven de drievlakshoeken afzonderlijk

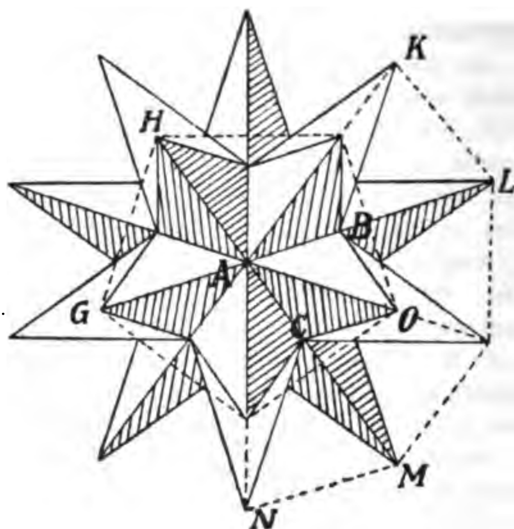


Fig. 6.

staan en hebben alleen het hoekpunt gemeen en zal het gedefinieerde gewone twaalfvlak niet het zijlichaam van een 120-cel zijn. Maar nu vindt men op elk van de ribben van den driehoek DEF twee hoekpunten van het twaalfvlak, — van beide twaalfvlakken, want deze hebben dezelfde hoekpunten, — en die twee hoekpunten behooren tot een zelfde zijvlak van het gewone twaalfvlak en wel tot een zijvlak, dat ook O tot hoekpunt heeft. De groote drievlakshoek in O van het gewone twaalfvlak snijdt dus van het vlak ABC werkelijk de driehoek DEF af. En het gewone twaalfvlak is dus het zijlichaam van onze zevende 120-cel (5 . 3 . *5).

Dit lichaam heeft nu dezelfdo ribben, maar niet dezelfde hoekpunten als (6). Dit blijkt ook uit de figuren 5 en 6. De ribben van (6) zijn DE, EF en FD, die van (7) GH, KL en MN.

(8) (9) en (10). Evenals uit (1) (2), uit (2) (3) en uit (3) (4) is afgeleid kan men nu achtereenvolgens wederom volgens

§ 8, *a*, 3, 4 en 5 uit deze 7de een 8ste, uit de 8ste een 9de en uit de 9de een 10de 120-cel afleiden.

(8). Vergroot men het zijlichaam (5 . 3) tot (*5 . 5), dan blijft het ribbecijfer hetzelfde. De achtste 120-cel is dus (*5 . 5 . *5). Dit lichaam heeft dezelfde ribben en hoekpunten als (6).

(9). Bij de vergrooting van het zijlichaam (*5 . 5) tot (5 . *5) verkrijgt men andere ribben. Hier moet weer evenals bij de afleiding van (3) uit (2) het nieuwe ribbegetal uit de vergrooting van het veelkant door verlenging der zijvlakken worden afgeleid. De veelkant (5 . *5) wordt dan blijkbaar (*5 . 3). De 9de 120-cel is dus (5 . *5 . 3).

(10). Bij de vergrooting van het zijlichaam van (5 . *5 . 3) tot (*5 . 3) blijven de ribben weer behouden en het lichaam wordt dus (*5 . 3 . 3).

(6). De formule van (6) is nog onbepaald gebleven. Maar we weten, dat (7) dezelfde ribben heeft, (8) dezelfde ribben en hoekpunten als (6). De veelvlakshoek van (6) is een stervijfvlakshoek, die van (8) een gewone vijfvlakshoek. Het veelkant van (8) is (5 . *5). Derhalve is volgens § 8, *b*, 4 het veelkant van (6) (*5 . 5).

(6) heeft tot zijlichaam (3 . *5), dus de formule van (6) is (3 . *5 . 5).

Nu kan men wel weer op de hoekpunten van het twintighoekige zijlichaam van dit lichaam een gewoon twaalfvlak construeeren, evenals bij de afleiding van (7) uit (4) is geschied, maar het veelkant (3 . 3) zal daarbij nooit door de vergrooting van zijn veelvlakshoeken een stervormig veelkant kunnen opleveren, want bij (10) komen vier zijlichamen in ieder hoekpunt bijeen en deze zouden dus bij vergrooting van de cel een stervormig vierkant moeten vormen. Dit bestaat niet en de 120 twaalfvlakken vormen dus geen nieuwe 120-cel.

Ook het twintigvlak op de ribben van (9) kan niet als begrenzend lichaam van een 120-cel dienst doen.

(11). Als men uitgaat van de 600-cel en daarop toepast de methoden van [§ 8; *b*] dan verkrijgt men van elk dezer negen 120-cellen het reciproke lichaam. Daar echter sommige van die negen stervormige 120-cellen reciprook zijn aan zich zelf en andere aan elkaar, verkrijgt men op die wijze slechts één nieuw lichaam: het reciproke lichaam van de laatste 120-cel.

(12). Hiervan luidt dus de formule (3 . 3 *5). Dit lichaam heeft dus het viervlak tot zijlichaam en het stertwintigkant als veelkant. Het aantal zijlichamen is dus evengroot als het aantal hoekpunten van de tiende 120-cel. Ieder zijlichaam heeft daar 20 hoekpunten en er komen vier zijlichamen in ieder hoekpunt samen, dus het aantal hoekpunten is 120 × 20 : 4 = 600. Dit nieuwe lichaam is dus weer eens een 600-cel, de eenige stervormige 600-cel.

Verdere pogingen om met behulp van de gebruikte of nieuwe methoden nog meer stervormige lichamen te vinden blijken vruchteloos. Er bestaan dus in vier dimensies tien stervormige lichamen: negen 120-cellen en een 600-cel. Dit is dus in overeenstemming met pag. 295 waar bewezen is, dat er hoogstens tien konden bestaan.

Onze afleiding van de negen 120-cellen, zooals die is geschied in deze paragraaf, is overzichtelijk voorgesteld in de eerste vier rijen van de volgende tabel. Gelijke nummering beteekent, dat twee lichamen hetzelfde stel zijruimten, vlakken, ribben of hoekpunten hebben. De beide 600-cellen konden we in dit verband ook opnemen, als we de eerste denken afgeleid uit (5) met behulp van de regel van § 8, *b*, 3 en de tweede uit (6) met behulp van de regel van § 8, *b*, 5. Echter hebben deze dan niet met de andere tien lichamen de ingeschreven hyperspheer gemeen.

In de vijfde rij staat de letter k voor $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Rangnummer. Naam. Notatie E. Hess.	(1) (5.3.3) —	(2) ('5.5.3) 1	(3) (5.'5.5) 3=3',	(4) ('5.3.5) 5	(5) (3.5.'5) 1',	(6) (3.'5.5) 4',	(7) (5.3.'5) 5',	(8) ('5.5.'5) 2=2',	(9) (5.'5.3) 4	(10) ('5.3.3) 6	(11) (3.3.5) —	(12) (3.3.'5) 6',
Z Zijlichamen.	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2
V Vlakken.	1	1	1	1	2	2	3	3	3	3	2	2
R Ribben.	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	2	3
H Hoekpunten.	1	2	2	3	2	4	3	4	4	5	2	4
Lengte der ribbe.	a	k^8a	k^2a	k^5a	k^2a	k^6a	k^3a	k^6a	k^5a	k^8a		
h hoekpunten per zijlichaam.	20	12	12	20	12	12	20	12	12	20	4	4
z zijlichamen per hoekpunt.	4	12	12	20	12	12	20	12	12	4	20	20
$H = 120 \times h : z$	600	120	120	120	120	120	120	120	120	600	$600 \times h : z = 120$	
$R = 120 \times 30 : q$	1200	1200	720	720	720	720	720	720	1200	1200	$600 \times 6 : 5 = 120$	
V	$120 \times 12 : 2 = 720$				$120 \times 20 : 2 = 1200$		$120 \times 12 : 2 = 720$				$600 \times 4 : 2 = 1200$	
Z	120										600	

De geheele figuur, waarin men de twaalf lichamen kan vinden, bestaat uit:

$$600 + 120 = 720 \text{ ruimten.}$$

$$720 + 1200 + 720 = 2640 \text{ vlakken.}$$

$$1200 + 720 + 720 + 1200 = 3840 \text{ ribben.}$$

$$600 + 120 + 120 + 120 + 600 = 1560 \text{ hoekpunten.}$$

Dat de 720 ruimten elkaar nog wel in meer vlakken, lijnen en punten snijden, dan de hier genoemde, zal in de volgende paragraaf blijken.

§ 10. Hiermede zijn dus de tien stervormige polytopen volledig besproken. In de vorige paragraaf is aannemelijk gemaakt, wat reeds in § 7 was bewezen, dat hun aantal tot tien beperkt blijft. Toch zou men op andere gronden kunnen vermoeden, dat er nog meer moesten zijn.

Als men namelijk bij een van de negen groepen van zijlichamen in § 9 (1) vermeld, de driedimensionale ruimte van elk zijlichaam uitbreidt, tot ze de driedimensionale ruimte van het zijlichaam A snijdt, dan zullen deze ruimten in A elk een vlak bepalen en deze vlakken zullen samen een regelmatig of halfregelmatig lichaam bepalen. Halfregelmatig is het lichaam, als we van de groep E uitgaan, die uit dertig zijlichamen bestaat; regelmatig is het, als we met een der andere groepen te werk gingen. De keuze van het lichaam is dan nog open tusschen vier twaalfvlakken, of tusschen twee twintigvlakken. Zoo vormen de snijvlakken van de twaalf ruimten van de groep B met A vier regelmatige twaalfvlakken, een gewoon en drie stervormige, en geven deze aldus aanleiding tot de vorming van een niet-stervormige en drie stervormige 120-cellen. Zoo heeft de snijding van A met de ruimten der twintig zijlichamen C het twintigvlakkige zijlichaam van de vijfde en zesde 120-cel doen ontstaan. Men zou meenen, dat als men op dezelfde wijze door de snijding der ruimte van A met de 12 ruimten der zijlichamen D een twaalfvlak, bijvoorbeeld het gewone dodekaeder liet ontstaan en zoo in elk van de 120 ruimten van zijcellen op dezelfde wijze een dodekaeder bepaalde, deze 120 dodekaeders, wier zijvlakken toch twee aan twee hun vlak gemeen hebben, een nieuwe 120-cel moesten vormen. En aldus zou men dan hebben:

vier 120-cellen met vlakken AD *)

vier 120-cellen met vlakken AD′,

twee 120-cellen met vlakken AC′,

en vier 120-cellen met vlakken AB′,

tezamen 19 stervormige 120-cellen.

Dit evenwel is niet het geval. Wel liggen de vijfhoekige zijvlakken van de hier gedefinieerde dodekaeders A en D in hetzelfde vlak, en hebben zelfs die vijfhoeken gemeenschappelijke middelpunten, maar de hoekpunten vallen niet samen, maar liggen als de hoekpunten van een tienhoek, waarvan beurtelings een punt behoort tot het dodekaeder A_D *) en een tot een zijvlak DA van een dodekaeder D.

Als men in de ruimte van het zijlichaam A achtereenvolgens beschrijft: het gewone twaalfvlak gevormd door de vlakken volgens welke de twaalf ruimten der zijlichamen B de ruimte van het zijlichaam A snijden, dat van de twaalf zijlichamen D, dat van de twaalf zijlichamen D′ en dat van de twaalf zijlichamen B′, kan men bewijzen, dat al deze twaalfvlakken gelijkstandig zijn, d. w. z. dat de vier maal twaalf vlakken, vier aan vier evenwijdig zijn, en de hoekpunten vier aan vier liggen op denzelfden straal uit het middelpunt van A getrokken. Men kan namelijk in de 120-cel een vlak aanbrengen door het middelpunt M, het middelpunt m_A van het eerste zijlichaam en het middelpunt m_{B_1} van een zijlichaam van de tweede zone.

Dit vlak zal ook gaan door de middelpunten der zijlichamen D_1, D'_1, B'_1 en A′. De vlakken, volgens welke elkaar snijden de ruimten A en B_1, A en D_1, A en D'_1 en A en B'_1 zullen *geheel loodrecht* staan op het vlak $Mm_Am_{B_1}$ en dus evenwijdig zijn.

We construeeren nu de volgende zes vijfhoeken in de drie vlakken AD_1, AD'_1 en AB'_1: 1°. de drie vijfhoeken ontstaan door

*) Het zal wel duidelijk zijn, dat hier bedoeld is met vlakken AD: vlakken ontstaan door snijding van de ruimte van het zijlichaam A met een der ruimten D, en wel al de vlakken, die men verkrijgt door beurtelings elk der 120 zijlichamen als het zijlichaam A te beschouwen.

Met het dodekaeder A_D wordt dan bedoeld het dodekaeder in de ruimte van het zijlichaam A gevormd door de snijding van die ruimte met elk der twaalf ruimten D.

verlenging der stralen uit het middelpunt van het zijlichaam A naar de vijf hoekpunten van AB_1 in de vlakken AD_1, AD'_1 en AB'_1; hebben we het zijlichaam A in onze ruimte zoo geplaatst, dat we van het beschouwde zijvlak de onderste zijde horizontaal zien en een hoekpunt naar boven, dan is dit ook met de drie andere vijfhoeken het geval. Verder 2°. de drie vijfhoeken, wier hoekpunten in de ruimte van het zijlichaam A, en wel in diezelfde vlakken worden gevormd, als men de stralen uit het middelpunt van het zijlichaam D_1 naar de hoekpunten van het zijvlak B_1D_1 trekt en deze door het hoekpunt

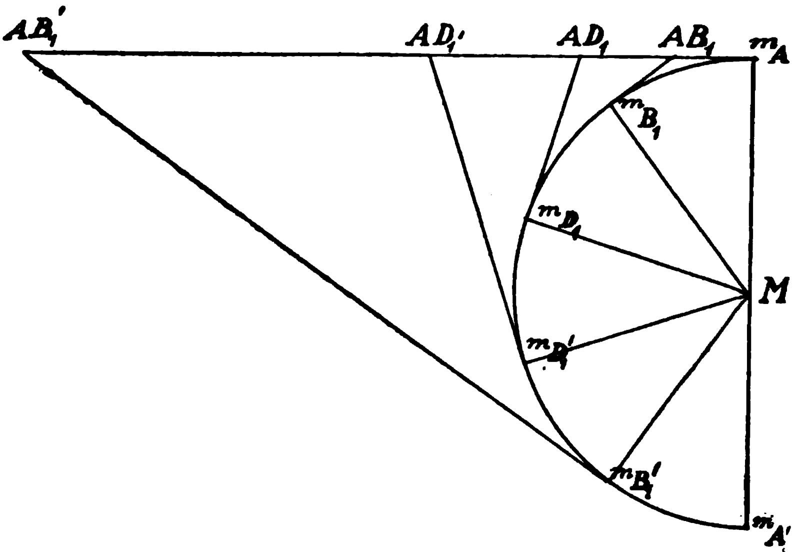


Fig. 7.

heen verlengt, tot ze de ruimte van A snijden, en ditzelfde doet met de stralen uit het middelpunt van het zijlichaam D'_1 naar de hoekpunten van het zijvlak D'_1D_1 en ten slotte met de stralen uit het middelpunt van het zijlichaam B'_1 naar de hoekpunten van het zijvlak $D'_1B'_1$. Nu zullen deze vijfhoeken beurtelings een hoekpunt naar beneden en een naar boven hebben. Naar boven zal het hoekpunt gericht zijn, als het aantal der tusschenliggende zijlichamen in de oorspronkelijke 120-cel even is. Bij B is dit aantal 0, bij D 1 nml. B_1, bij D′ 2 nml. B_1 en D_1 en bij B′ 3 nml. B_1, D_1 en D'_1. Bij AD′ valt dus de vijfhoek samen met den anderen vijfhoek in het-

zelfde vlak en vormen de 120 twaalfvlakken dus een stervormige regelmatige 120-cel.

In de vlakken AD en AB′ vallen de vijfhoeken niet samen en de 120 twaalfvlakken sluiten dus niet aaneen tot een 120-cel. Hiermede zijn de uitkomsten der vorige paragraaf verklaard en bevestigd.

Op dezelfde wijze kan men de 600-cel onderzoeken:

Zijn bij de 120-cel de zijlichamen in negen zonen te verdeelen, bij de 600-cel onderscheidt men 31 zonen, evenals men op de 120-cel 31 zonen van hoekpunten kan opmerken, — zie SCHOUTE, II, fig. 77, pag. 230. Men kan namelijk de 600-cel beschouwen, waarvan de middelpunten der zijlichamen de hoekpunten zijn der daar beschreven 120-cel en die dus de omgeschreven hyperspheer van die 120-cel tot ingeschreven hyperspheer heeft. In die figuur vindt men ook vermeld het aantal der hoekpunten van iedere zone, dat dus gelijk is aan het aantal der zijlichamen van iedere zone in onze beschouwingen. Verlengt men nu de driedimensionale ruimten van alle zijlichamen van een zone tot ze de driedimensionale ruimte van het eerste zijlichaam snijden, dan bepalen de snijvlakken in die ruimte van dat eerste zijlichaam een halfregelmatig of een regelmatig lichaam. Opdat het lichaam regelmatig zij, moet in de eerste plaats het aantal zijlichamen van de beschouwde zone gelijk zijn aan het aantal zijvlakken van een regelmatig driedimensionaal lichaam. Derhalve komen alleen de zonen van vier of van twaalf zijlichamen in aanmerking. Maar ook al de twaalfvlakken zijn halfregelmatig. Dan schieten dus alleen over de zonen b, f, f' en b' en deze leveren elk een regelmatig viervlak op.

Deze vier gevallen zullen we nu achtereenvolgens bespreken.

b). De zone b levert het zijlichaam van de gewone 600-cel.

f). Bepaalt men in elk van de 600 driedimensionale ruimten der zijlichamen het viervlak overeenkomende met het door de vier zijruimten der zijlichamen f van de ruimte van het zijlichaam a afgesnedene, dan zullen de zijvlakken dier 600 viervlakken wel twee aan twee in het zelfde vlak liggen, — want het vlak af_1 is hetzelfde als het vlak f_1a, — maar de ribben en hoekpunten dier zijvlakken zullen niet samenvallen.

De benedenhelft van figuur 8 stelt voor een vlakke doorsnede door het middelpunt van de 600-cel. De cirkel is een

groote cirkel van een grooten bol van de ingeschreven hyperspheer van de 600-cel. De omgeschreven halfregelmatige twaalfhoek wordt gevormd door twaalf hoogtelijnen van zijlichamen. De hoekpunten van dezen twaalfhoek zijn beurtelings hoekpunten (A, A′) en zijvlaksmiddelpunten (E_a, E_{f_1}, $E_{a'}$, $E_{f_1'}$) van zijlichamen. De bovenhelft van figuur 8 stelt de projectie voor van eenige zijlichamen van de 600-cel op de driedimensionale ruimte van het zijlichaam a, nml. van een der zijlichamen f, dat we f_1 zullen noemen, het overstaande zijlichaam daarvan f'_1, en het overstaande zijlichaam van a, het zijlichaam a'.

Het vlak van den cirkel geprojecteerd op deze driedimensionale ruimte valt samen met de hoogtelijn AE_a van het zijlichaam a.

In deze driedimensionale ruimte kan men gemakkelijk bepalen de projectie van het vlak volgens hetwelk de twee driedimensionale ruimten a en f_1 elkaar snijden. Dit vlak ligt in de driedimensionale ruimte a, welke loodrecht staat op den straal m_aM en het ligt ook in de ruimte f_1, welke loodrecht staat op den straal m_{f_1}M. Derhalve staat het geheel loodrecht op het vlak van die beide stralen, het vlak van den cirkel en in onze driedimensionale projectie, door het bovengedeelte van figuur 8 voorgesteld, loodrecht op de projectie van het vlak van den cirkel, dat is op de lijn E_aA. Daar de beide viervlakken het punt A gemeen hebben, is dus het vlak, dat in het punt A loodrecht op $m_a m_{f_1}$ staat, de projectie van het gezochte snijvlak van de zijlichamen a en f_1. In elk der beide zijlichamen a en f_1 blijkt het snijvlak af_1 dus het vlak te zijn, dat in de driedimensionale ruimte van dat zijlichaam door een hoekpunt evenwijdig aan het overstaande zijvlak is te beschrijven.

Het is duidelijk, dat men de snijvlakken van de ruimte van het zijlichaam a met de andere zijlichamen f op gelijke wijze verkrijgt, nml. door ook in de drie andere hoekpunten van het zijlichaam a in B_a, C_a en D_a vlakken aan te brengen evenwijdig aan het overstaande zijvlak.

De hoekpunten van het viervlak gevormd door de vier vlakken, die men aldus in de driedimensionale ruimte van iedere zijlichaam kan aanbrengen, liggen dan op de stralen van de hoekpunten van het zijlichaam, als men die door het middelpunt heen verlengt. Zoo verkrijgt men dan in het vlak af_1 drie hoekpunten van het viervlak in de driedimensionale ruimte a: β_a, γ_a en δ_a en drie hoekpunten van het viervlak in

de driedimensionale ruimte f_1 : $\beta_{f_1}, \gamma_{f_1}$ en δ_f. De driehoeken $\beta_a\gamma_a\delta_a$ en $\beta_f\gamma_f\delta_f$ blijken dus niet samen te vallen en de 600 viervlakken vormen geen stervormige 600-cel.

f'). Onderzoeken we nu de viervlakken, waarvan er een door de vier ruimten der zijlichamen f' in de ruimte van het zijlichaam a bepaald wordt. Het vlak af'_1 staat weer loodrecht op het vlak van de stralen Mm_a en $Mm_{f'_1}$, dus in de projectie loodrecht op het verlengde der lijn AE_a, en is dus alweer bepaald als men een gemeenschappelijk punt van de ruimten a en f'_1 kent. Een gemeenschappelijk punt der beide ruimten is in de benedenhelft der figuur het snijpunt der beide hoogtelijnen AE_a en $A'E_{f'_1}$, het punt $\varepsilon_{af'_1}$. Het vlak ligt dus in de projectiefiguur rechts van de beide vlakken $B_aC_aD_a$ en $B_{f_1}C_{f_1}D_{f_1}$. Het vlak is dus evenwijdig aan het zijvlak van het viervlak a en ligt aan denzelfden kant van het middelpunt. In elk der 600 zijruimten verkrijgt men dus het viervlak af_1 door gelijkstandige vergrooting van het zijlichaam van de gewone 600-cel. Bij deze vergrooting komt in onze projectiefiguur in het zijlichaam a de driehoek in het vlak af'_1 met een hoekpunt naar beneden te liggen en de driehoek van het zijlichaam f'_1 eveneens.

Derhalve vallen de beide driehoeken in dit geval steeds wel samen *) en zullen de 600 viervlakken de stervormige 600-cel opleveren.

b'). In het vierde geval ab' vallen de driehoeken weer niet samen. We vinden derhalve ook bevestigd, dat er slechts één stervormige 600 cel bestaat.

Onderzoekt men op deze wijze ook de andere vier regelmatige lichamen, dan vindt men geen stervormige meer en dan is dus zonder gebruik te maken van de beschouwingen van § 7—9 het onderzoek volledig.

---

*) Hieruit volgt een tweede constructie van het vlak af'_1.

De stralen m_aB_a en $m_{f'_1}B_{f'_1}$ snijden elkaar in een hoekpunt, dat in het vlak ligt, eveneens de stralen m_aC_a en $m_{f'_1}C_{f'_1}$ en ook m_aD_a en $m_{f'_1}D_{f'_1}$. Deze drie punten bepalen dus ook het vlak.

M[1]1b, 31α, 3j, 08a.

DIE HÖHEREN SINGULARITÄTEN UND PLÜCKER'SCHEN CHARAKTERE DER POLARKURVEN EINER GEWISSEN BEWEGUNG,

VON

FRED. SCHUH,
(Sneek).

(Lösung der Preisaufgabe no. 10 für das Jahr 1905 ausgeschrieben vom Wiskundig Genootschap: „Een onvermoeide arbeid komt alles te boven" te Amsterdam).

Die Preisaufgabe lautete:

Eine Figur unveränderlicher Gestalt bewegt sich in ihrer Ebene so, dass ein Punkt P dieser Figur eine feste Kurve C der Ebene beschreibt, während eine Gerade der Figur, auf welcher P liegt, immer durch einen festen Punkt O der Ebene geht. Wenn die PLÜCKER'schen Zahlen der Kurve C gegeben sind, fragt man diese Zahlen für die beiden bei dieser Bewegung auftretenden Polarkurven zu bestimmen und zuzusehen welche Abänderungen diese Zahlen erfahren, wenn die Kurve C eine besondere Lage hinsichtlich der unendlich fernen Geraden und der Kreispunkte einnimmt.

EINLEITUNG.

Bei der Beantwortung der gestellten Frage habe ich mich bestrebt in der Bestimmung der Multiplizitäten der singulären Punkte der Polarkurven eine möglichst grosse Strenge zu erreichen und genau anzugeben unter welchen Umständen die gefundenen Resultate ihre Richtigkeit beibehalten. Weil bei einer strengen Behandlung die Sache durch das Auftreten

höherer Singularitäten in der gegebenen Kurve nicht wesentlich schwieriger wird, im Gegenteil viele Besonderheiten, die sonst getrennt aber auf fast dieselbe Weise behandelt werden müssten (was zu vielen Wiederholungen Anlass geben würde), dadurch unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt erscheinen, habe ich gemeint es vorziehen zu müssen schon von vornherein die höheren Singularitäten in die Betrachtungen aufzunehmen.

Im ersten Abschnitt habe ich einige Dinge voranfgestellt, die bei den späteren Betrachtungen vielfach Verwendung finden werden. Im zweiten Abschnitt, womit die eigentliche Untersuchung der Polarkurven einen Anfang nimmt, habe ich die Zweige der Polarkurven, die mit den verschiedenen möglichen Zweigen der gegebenen Kurve korrespondieren, einer genauen Betrachtung (Ursprung, Ursprungstangente, Ordnung und Klasse dieser Zweige werden untersucht) unterzogen. Weil es mir aber mehr um die Entwicklung der Methoden (die auch bei anderen derartigen Fragen, z. B. der Frage nach der Fusspunktkurve einer Kurve mit höheren Singularitäten, verwendet werden können) zu tun war, habe ich mich, als es mir klar ward dass diese Arbeit sonst zu umfangreich werden würde, auf den folgenden Fall beschränkt:

Wir nehmen an, dass, wenn C durch die Kreispunkte geht, die Tangenten in diesen Punkten von der unendlich fernen Geraden verschieden sind und nicht durch O gehen.

Nur im ersten Abschnitt habe ich auch diese Besonderheiten zugelassen um damit für das Fehlende jedenfalls die zur Behandlung nötige Grundlage zu geben.

Im dritten und vierten Abschnitt werden Ordnung und Klasse der beiden Polarkurven und ihre PLÜCKER'schen Charaktere bestimmt. Die da gefundenen Resultate, die sich fast unmittelbar aus denen des zweiten Abschnittes entnehmen lassen, sind innerhalb der oben genannten Beschränkung ausnahmslos gültig.

ERSTER ABSCHNITT.

VORBEREITENDE BETRACHTUNGEN.

§ 1. PUISEUX'sche Reihenentwicklungen.

Sind ξ, η die Cartesischen Koordinaten eines im Endlichen liegenden Punktes P einer ebenen algebraischen Kurve C, so kann diese Kurve vermöge der Untersuchungen PUISEUX'[1]) in der Umgebung von P durch eine endliche Anzahl konvergenter Reihenentwicklungen von $y-\eta$ nach aufsteigenden ganzen positiven Potenzen von $(x-\xi)^{\frac{1}{t}}$ (PUISEUX'*scher Reihenentwicklungen*) dargestellt werden. Ist t der *kleinste* gemeinsame Nenner der sämtlich rationalen Exponenten, so bilden die *t konjugierten* Entwicklungen, die den t Werten von $(x-\xi)^{\frac{1}{t}}$ entsprechen, einen *Zyklus*, der einem einzigen Funktionselement auf der zur Kurve gehörigen RIEMANN'schen Fläche angehört. Diesem Funktionselement entspricht ein (reeller oder komplexer) *Zweig* der Kurve; die Koordinaten der Punkte eines Zweiges genügen also derselben oder einer konjugierten Entwicklung.

Der Punkt (ξ, η) soll der *Ursprung* des Zweiges heissen. Wenn wir von dem Ursprung eines Zweiges statt eines Kurvenpunktes reden, soll damit immer gemeint sein, dass wir von den anderen Kurvenzweigen, die etwa ihren Ursprung in diesem Punkte haben mögen, ganz absehen, sodass wir zwei in denselben Punkt fallende Ursprünge verschiedener Zweige (denen also verschiedene Punkte der RIEMANN'schen Fläche entsprechen) als von einander verschieden anzusehen haben. Ferner soll mit der *Ursprungstangente*, oder schlechthin *Tangente*, des Zweiges die Tangente im Punkte (ξ, η) gemeint sein.

Haben wir die y-Achse so gewählt, dass sie nicht der Ursprungstangente parallel ist, so wird die PUISEUX'sche Entwicklung:

$$y-\eta=a_0(x-\xi)+a(x-\xi)^{\frac{t+v}{t}}+a_1(x-\xi)^{\frac{t+v_1}{t}}+\ldots(v<v_1<v_2\ldots).$$

---

[1]) Recherches sur les fonctions algébriques, *Journal de Liouville* (1) *t.* 15 (1850), p. 365–480.

Der erste Koeffizient a_0 ist der Richtungskoeffizient der Ursprungstangente, der Null sein kann. Dagegen ist a ein Koeffizient, der von Null verschieden vorausgesetzt wird.

Nach PLÜCKER nennen wir t die *Ordnung*, v die *Klasse* des Zweiges. Wie man leicht sieht, schneidet eine durch den Ursprung P gehende von der Ursprungstangente verschiedene Gerade den Zweig in t, die Ursprungstangente selbst den Zweig in $t+v$ zusammenfallenden Punkten P [1]), sodass man für t und v die folgenden Definitionen bekommt:

Die Ordnung t eines Zweiges ist die Anzahl der auf dem Zweig sich seinem Ursprung nähernden Schnittpunkte mit einer sich dem Ursprung aber nicht der Ursprungstangente nähernden Geraden.

Die Klasse v eines Zweiges ist die Anzahl der auf dem Zweig sich dem Ursprung nähernden Schnittpunkte mit einer sich um den Ursprung drehenden und sich der Ursprungstangente nähernden Geraden.

Ein Zweig t^{ter} Ordnung v^{ter} Klasse werden wir slechthin einen Zweig (t, v) nennen. Nur die Zweige (1, 1) (*gewöhnliche Zweige*) sind in unendlicher Anzahl vorhanden. Ein Zweig (2, 1) bildet eine *gewöhnliche Spitze*. ein Zweig (1, 2) eine *gewöhnliche Inflektion* Die Ursprünge der Zweige, für welche $t > 1$ ist, die von CAYLEY *superlinear* genannt worden sind, entsprechen den Verzweigungspunkten der RIEMANN'schen Fläche.

Ist P ein mehrzweigiger Punkt der Kurve (einfachster Fall: gewöhnlicher Doppelpunkt), so verstehen wir unter der *Ordnung* dieses Kurvenpunktes die Summe der Ordnungen aller Kurvenzweige, die ihren Ursprung in P haben, d. h. die kleinste Anzahl in P fallender Schnittpunkte mit einer durch P gehenden Geraden. Ebenso werden wir die Summe der Klassen aller Kurvenzweige, die dieselbe Tangente haben, die *Klasse* dieser Tangente nennen.

Im Vorhergehenden haben wir nur bequemlichkeitshalber vorausgesetzt, dass der Ursprung des Zweiges im Endlichen

---

[1]) Ist P Ursprung mehrerer Zweige der Kurve, so hat man natürlich unter der Anzahl der in P zusammenfallenden Schnittpunkte eines bestimmten dieser Zweige mit einer durch P gehenden Geraden nur die Anzahl derjenigen Schnittpunkte zu verstehen, die bei einer kleinen Verschiebung dieser Geraden auf dem betrachteten Zweige zu liegen kommen.

liegt. Aber auch wenn der Ursprung auf der unendlich fernen Geraden l_∞ liegt, auch noch dann wenn diese Gerade Tangente ist, behält das Gesagte seine Gültigkeit bei, was am einfachsten durch Einführung homogener (Dreiecks-) Koordinaten x_1, x_2, x_3 einleuchtet. Sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 die Koordinaten von P, so kann das Koordinatendreieck immer so gewählt werden, dass P nicht auf der Seite $x_3 = 0$ liegt (also $\xi_3 \neq 0$ ist) und die Ursprungstangente nicht durch die Ecke $x_1 = x_3 = 0$ geht. Setzen wir dann $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$, $\frac{\xi_1}{\xi_3} = \xi$ und $\frac{\xi_2}{\xi_3} = \eta$, so bleiben alle vorhergehenden Betrachtungen ungeändert auch wenn der Zweig eine spezielle Lage hinsichtlich des Unendlichen annimmt.

§ 2. Stolz—Smith—Halphen'scher Satz.

Ist C eine Kurve n^{ter} Ordnung, so verteilen sich die n Schnittpunkte mit einer beliebigen Geraden l über diejenigen Kurvenzweige, deren Ursprünge auf l liegen, derart dass der Ursprung eines Zweiges (t, v) für t oder $t + v$ Schnittpunkte gezählt werden muss je nachdem l nicht oder wohl Ursprungstangente ist. Will man also umgekehrt aus der Anzahl der Schnittpunkte mit der Geraden l auf die Ordnung der Kurve schliessen, so müssen die Ordnungen aller Zweige mit auf l liegendem Ursprung und ausserdem die Klassen dieser Zweige, insoweit sie l als Ursprungstangente habben, bekannt sein.

Auf analoge Weise kann nun auch die Klasse der Kurve bestimmt werden. Dazu haben wir einen fast gleichzeitig von Stolz [1]), Halphen [2]) und Stephen Smith [3]) ausgesprochenen Satz zu benutzen, vermöge dessen Ordnung und Klasse eines

---

[1]) Ueber die singulären Punkte der algebraischen Functionen und Curven, *Math. Ann. Bd* 8 (1875), S. 442.

[2]) Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques planes, *Mémoires prés. par div. sav. à l'Acad. des Sciences* (2) *t.* 26 (1879), no. 2 (Théorème III p. 42 oder Théorème II p. 50); April 1874 der Pariser Akademie vorgelegt (siehe *Comptes Rendus t.* 78, p. 1105–1108).

[3]) On the Higher Singularities of Plane Curves, *Proc. of the London Math. Soc. Vol.* 6 (1874–'75), p. 163—164.

Siehe auch: Nöther, Ueber die singulären Werthsysteme einer algebraischen Function und die singulären Punkte einer algebraischen Curve, *Math. Ann. Bd.* 9 (1876), S. 182.

Kurvenzweiges einander dual gegenüber stehen. Der Satz lautet also:

Ein Zweig (t, v) geht bei dualer Transformation in einen Zweig (v, t) über.

In andrer Fassung heisst dies, dass eine Entwicklung (t, v) in Punktkoordinaten eine Entwicklung (v, t) in Linienkoordinaten ergiebt, wobei sich jetzt beide Entwicklungen auf denselben Zweig beziehen.

Aus dem genannten Satz geht hervor, dass man die Ordnung (Klasse) eines Zweiges auch definieren kann als die Klasse (Ordnung) des dual transformierten Zweiges, sodass man für diese Begriffe auch die folgenden Definitionen hat:

Die Ordnung t eines Zweiges ist die Anzahl der sich der Ursprungstangente nähernden Tangenten des Zweiges aus einem auf der Ursprungstangente sich dem Ursprung nähernden Punkt.

Die Klasse v eines Zweiges ist die Anzahl der sich der Ursprungstangente nähernden Tangenten des Zweiges aus einem sich der Ursprungstangente aber nicht dem Ursprung nähernden Punkt.

Hieraus sieht man, dass diese Definition der Ordnung (Klasse) des Zweiges der in § 1 gegebenen Definition der Klasse (Ordnung) dual gegenüber steht.

Die Klasse der Kurve ist die Summe der Klassen aller Zweige, deren Tangente durch einen beliebig gewählten Punkt Q gehen, und der Ordnungen derjenigen dieser Zweige, deren Ursprung in Q fällt. Will man also die Klasse einer Kurve aus der Anzahl ihrer durch Q gehenden Tangenten bestimmen, so muss die Klasse eines jeden Kurvenzweiges mit durch Q gehender Tangente bekannt sein und ausserdem seine Ordnung, wenn der Ursprung des Zweiges in Q fällt.

§ 3. Äquivalenz der höheren Singularitäten mit Plücker'schen.

Hat eine algebraische Kurve keine anderen Singularitäten als δ gewöhnliche Doppelpunkte, κ Spitzen, ι Inflektionen und τ Doppeltangenten, so bestehen zwischen den Anzahlen dieser Singularitäten (die wir Plücker'sche Singularitäten nennen werden), der Ordnung n und der Klasse k der Kurve die

bekannten PLÜCKER'schen Gleichungen, die den folgenden drei Gleichungen äquivalent sind:

$$k = n(n-1) - 2\delta - 3\kappa, \quad \ldots\ldots \quad 1)$$

$$n = k(k-1) - 2\tau - 3\iota, \quad \ldots\ldots \quad 2)$$

$$3n + \iota = 3k + \kappa \quad ; \ldots\ldots \quad 3)$$

die beiden ersten Gleichungen entsprechen einander, die letzte Gleichung entspricht sich selbst dual.

Von CLEBSCH [1]) ist diesen Gleichungen noch die folgende für das Geschlecht g der Kurve hinzugefügt worden:

$$g = \tfrac{1}{2}(k + \kappa) - n + 1 \quad \ldots\ldots \quad 4)$$

Von CAYLEY [2]) ist zuerst bemerkt worden, dass diese Gleichungen auch für Kurven mit höheren Singularitäten gültig bleiben, wenn man nur jede höhere Singularität einer gewissen Anzahl jeder der vier PLÜCKER'schen Singularitäten äquivalent setzt. Die Spitzen und Inflektionen entstehen nur aus den einzelnen Zweigen, derart *dass ein Zweig* (t, v) $t-1$ *Spitzen und* $v-1$ *Inflektionen äquivalent ist.* Dagegen entstehen die Doppelpunkte und -tangenten sowohl aus den einzelnen Zweigen als aus ihren Kombinationen zu je zwei Zweigen mit gemeinsamem Ursprung resp. gemeinsamer Ursprungstangente; im ersten Falle können wir die Doppelpunkte und -tangenten *latent*, im zweiten Falle *sichtbar* nennen.

Ist ein Punkt Ursprung zweier Zweige (t_1, v_1) und (t_2, v_2), so ist dieser Punkt für soviele sichtbare Doppelpunkte zu zählen als die Anzahl der in diesen Punkt fallenden Schnittpunkte beider Zweige betragen würde falls sie verschiedenen Kurven angehörten. Sind die Ursprungstangenten verschieden, so ist diese Anzahl $t_1 t_2$. Fallen die Ursprungstangenten zusammen, so ist die Anzahl c der sichtbaren Doppelpunkte $> t_1 t_2$. Wenn z. B. ein Zweig (2, 1) und ein Zweig (1, 1) Ursprung und Ursprungstangente gemein haben, so zählt der Berührungspunkt für drei sichtbare Doppelpunkte. Ist ein Punkt Ursprung

---

[1]) Ueber die Singularitäten algebraischer Curven, *Crelle's Journal Bd.* 64 (1865), S. 98–100.

[2]) On the Higher Singularities of Plane Curves, *Quart. Journal of Math. Vol.* 7 (1866), p. 212–223, *Coll. Math. Pap. Vol.* 5, p. 520–528.

mehrerer Zweige, so hat man die Anzahlen sichtbarer Doppelpunkte eines jeden Paares dieser Zweige zu summieren.

Hiermit kommt dual überein, dass zwei Zweige mit gemeinsamer Tangente für $v_1 v_2$ sichtbare Doppeltangenten zählen, wenn ihre Ursprünge verschieden sind, für $c' > v_1 v_2$ sichtbare Doppeltangenten wenn ihre Ursprünge zusammenfallen. Von Stephen Smith (l.c. art. 13) ist gezeigt worden, dass bei zwei sich berührenden Zweigen die folgende Gleichung statt hat:

$$c - t_1 t_2 = c' - v_1 v_2.$$

Cayley hat ohne Beweis angegeben auf welche Weise die Anzahl der latenten Doppelpunkte eines Zweiges aus seiner Puiseux'schen Entwicklung abgeleitet werden kann; ebenso kann dann aus der dualen Entwicklung die Anzahl der latenten Doppeltangenten gefunden werden.

Die Richtigkeit der Behauptungen Cayley's ist zuerst von Stephen Smith in seiner zitierten Abhandlung dargelegt worden. Zwischen den Cayley'schen Äquivalenten des Zweiges (*Spitzenindex* κ^*, *Inflektionsindex* ι^*, *Doppelpunktsindex* δ^* und *Doppeltangentialindex* τ^*) hat Smith (l.c. art. 12) die Beziehung

$$\tau^* - \delta^* = \tfrac{1}{2}\,(\iota^* - \kappa^*)\,(\iota^* + \kappa^* - 1)$$

gefunden, oder weil $\kappa^* = t - 1$ und $\iota^* = v - 1$ ist:

$$\delta^* - \tfrac{1}{2}\,t\,(t-3) = \tau^* - \tfrac{1}{2}\,v\,(v-3).$$

Für den Fall, dass t und v relativ prim sind, hat man:

$$\delta^* = \tfrac{1}{2}\,(t-1)\,(t+v-3),$$
$$\tau^* = \tfrac{1}{2}\,(v-1)\,(t+v-3)\,[1].$$

Sind aber t und v nicht relativ prim, so hangen die Indices δ^* und τ^* nicht nur von t und v ab, sondern auch von den Exponenten gewisser Glieder der Puiseux'schen Entwicklung, die von Halphen[2]) *charakteristisch*, von Smith (l.c. art. 8) *kritisch* genannt worden sind.

---

[1]) Der Ursprung eines Zweiges $(1, v)$, d. h. eines linearen Zweiges, der an seine Tangente eine Berührung v^{ter} Ordnung zeigt, ist also $v - 1$ Inflektionen und $\frac{1}{2}(v-1)(v-2)$ Doppeltangenten äquivalent. Diese kann man reell zum Vorschein bringen indem man die $v + 1$ zusammenfallenden Schnittpunkte mit der Tangente reell trennt.

[2]) Sur une série de courbes analogues aux développées, *Journal de Liouville* (3) *t.* 2 (1876), p. 89—90.

§ 4. Singuläre Zweige der Evolute.

Die Untersuchung nach Ursprung, Ursprungstangente, Ordnung und Klasse eines Zweiges der Evolute, der aus einem singulären Zweig der ursprünglichen Kurve entsteht, ist für alle Fälle (auch bei besonderer Lage hinsichtlich des Unendlichen und der Kreispunkte) zuerst von HALPHEN [1]) vollzogen worden. Die Resultate HALPHEN's sind in etwas anderer Form die folgenden:

I. *Ein Zweig* (t, v), *dessen Ursprung im Endlichen liegt, dessen Tangente nicht isotrop ist (nicht-isotroper Zweig) und für welchen* $t > v$ *ist, giebt in der Evolute einen Zweig* $(t - v, v)$ *mit demselben Ursprung und der Normalen des ursprünglichen Zweiges als Tangente.*

II. *Ein nicht-isotroper Zweig* (t, v), *für welchen* $t < v$ *ist, giebt in der Evolute einen Zweig* $(v - t, t)$, *dessen Ursprung im Unendlichen liegt und die die Normale des ursprünglichen Zweiges als Asymptote hat.*

III. *Ein nicht-isotroper Zweig* (t, t), *der von seinem Krümmungskreis in* $2t + \lambda$ *zusammenfallenden Punkten geschnitten wird, giebt in der Evolute einen Zweig* (λ, t), *der das Krümmungszentrum und die Normale des ursprünglichen Zweiges als Ursprung und Tangente hat.*

IV. *Ein Zweig* (t, v), *dessen Ursprung im Endlichen liegt und dessen Tangente isotrop ist (isotroper Zweig), giebt in der Evolute einen Zweig* (t, v) *mit demselben Ursprung und derselben Tangente.*

V. *Ein Zweig* (t, v), *dessen Ursprung im Unendlichen aber nicht in einem der Kreispunkte liegt und dessen Tangente nicht die unendlich ferne Gerade* l_∞ *ist (asymptotischer Zweig), giebt in der Evolute einen Zweig* $(t + v, t)$, *dessen Ursprung im Unendlichen liegt in einer Richtung, die auf der des ursprünglichen Zweiges senkrecht steht, und dessen Tangente* l_∞ *ist.*

VI. *Ein Zweig* (t, v), *der* l_∞ *ausserhalb der Kreispunkte*

---

[1]) Mémoire sur les points singuliers des courbes algébriques planes, *Mém. prés. par div. sav. à l'Acad. des Sciences t.* 26 (1879), no. 2, spez. Art. VI, p. 57—84.

berührt (*parabolischer Zweig*), *giebt in der Evolute einen Zweig* $(t, t+v)$, *der* l_∞ *in einem Punkte berührt, dessen Richtung senkrecht auf der des ursprünglichen Zweiges steht.*

VII. *Ein Zweig* (t, v), *der* l_∞ *in einem der Kreispunkte berührt* (*zirkulär-parabolischer Zweig*), *giebt in der Evolute einen Zweig* (t, v) *mit demselben Ursprung und derselben Tangente.*

VIII. *Ein Zweig* (t, v), *dessen Ursprung in einen der Kreispunkte fällt, der aber* l_∞ *nicht berührt* (*zirkulärer Zweig*) *und für welchen* $t \neq v$ *ist, giebt in der Evolute einen Zweig* (t, v) *mit demselben Ursprung und derselben Asymptote.*

IX. *Ein zirkulärer Zweig* (t, t), *der von einem nicht zerfallenden Kreis in höchstens* $2t+\lambda$ *zusammenfallenden Punkten geschnitten wird, worin* $\lambda < t$ *ist* [1], *giebt in der Evolute einen Zweig* $(t-\lambda, t+\lambda)$ *mit demselben Ursprung und derselben Asymptote.*

X. *Ein zirkulärer Zweig* (t, t), *der der unter IX genannten Bedingung nicht genügt, hat einen einzigen nicht zerfallenden Krümmungskreis, dessen Zentrum auf der Asymptote liegt und der den Zweig in* $3t+\lambda$ $(\lambda > 0)$ *zusammenfallenden Punkten schneidet* [2]. *Dieser Zweig giebt in der*

---

[1]) In das Endliche projiziert bekommt dieser Zweig bei passend gewähltem Koordinatensystem die folgende Puiseux'sche Entwicklung:

$$y = a\,x^2 + a_1 x^{2+\frac{\lambda}{t}} + \dots \quad (\lambda < t).$$

Dabei werden Kreise zu Kegelschnitten projiziert, die durch den Ursprung U des Zweiges und einen ausserhalb der Ursprungstangente liegenden Punkt V gehen. Will man, dass der Kegelschnitt den Zweig in $2t+\lambda$ zusammenfallenden Punkten schneidet, so muss der Kegelschnitt in U eine bestimmte Tangente und Krümmung (die des projizierten Zweiges) haben, während die Tangente in V noch ganz beliebig gewählt werden kann. Hieraus folgt, dass das Zentrum des im Text genannten in $2t+\lambda$ zusammenfallenden Punkten schneidenden Kreises noch beliebig auf der isotropen Asymptote angenommen werden kann.

[2]) Dieser Zweig bekommt in das Endliche projiziert die folgende Puiseux'sche Entwicklung:

$$y = ax^2 + a_1x^3 + \dots$$

Unter den Kegelschnitten, zu denen die Kreise der ursprünglichen Figur projiziert werden, giebt es jetzt nur einen, dessen Reihenentwicklung ebenfalls mit $ax^2 + a_1x^3$ anfängt und der deshalb den erstgenannten Zweig in mehr als $3t$ zusammenfallenden Punkten schneidet.

Evolute einen Zweig (λ, $2t$) *mit dem Krümmungszentrum und der Asymptote des ursprünglichen Zweiges als Ursprung und Tangente.*

Hiermit sind alle nur irgend möglichen Fälle erschöpft. Weiter hat man:

XI. *Die Klasse k' der Evolute einer Kurve n^{ter} Ordnung k^{ter} Klasse ist gleich:*

$$k' = k + n - \varepsilon - \sigma; \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

hierin ist ε die Summe der Ordnungen beider Kreispunkte als Punkte der ursprünglichen Kurve[1], *σ die Klasse von l_∞ als Tangente dieser Kurve*[2].

Dies folgt unmittelbar aus dem Vorhergehenden, wenn man bemerkt, dass aus einem ganz beliebigen unendlich fernen Punkt $k - \sigma$ im Endlichen liegende Tangenten an die Evolute gezogen werden können, während l_∞ selbst für $n - \varepsilon$ Tangenten zu zählen ist.

Durch diese Eigenschaften der Evolute ist man vollständig orientiert über die Anzahl und die Multiplizität der aus einem Punkte O auf die Kurve zu fällenden Normalen; dazu hat man zu bemerken, dass diese Frage der nach den aus O an die Evolute zu ziehenden Tangenten identisch ist. Man hat also:

Die Anzahl der durch einen Punkt O gehenden Normalen der Kurve ist $k + n - \varepsilon - \sigma$. Liegt O auf der Tangente aber nicht im Ursprung eines Zweiges (t', v') der Evolute, so zählt der Ursprung des ursprünglichen Zweiges für v' Normalfusspunkte. Fällt aber O in den Ursprung des Zweiges (t', v'), so zählt der Ursprung des ursprünglichen Zweiges für $t' + v'$ Normalfusspunkte.

§ 5. Anzahl der durch einen gegebenen Punkt gehenden Geraden, die eine gegebene Kurve unter einem gegebenen Winkel schneiden.

Wir stellen die folgende Frage:

Wieviele Geraden, die eine gegebene Kurve unter einem gegebenen Winkel α schneiden, gehen durch einen gegebenen Punkt O?

---

[1] D. h. also die Summe der Ordnungen aller zirkulären und zirkulär-parabolischen Zweige dieser Kurve.

[2] D. h. die Summe der Klassen aller l_∞ berührenden Zweige (parabolischen und zirkulär parabolischen Zweige) der Kurve.

Wir sagen, dass eine Gerade die Kurve unter einem Winkel α schneidet, wenn man diese Gerade um den Schnittpunkt im Sinne von der positiven x-Achse zur positiven y-Achse einen Winkel α drehen muss um sie mit der Tangente zur Deckung zu bringen. Ist l die Sekante, t die Tangente im Schnittpunkt S, r eine durch O gehende Gerade mit dem Richtungskoeffizient tg α bei rechtwinkliger Achsen, so sind, wenn I_1 und I_2 die beiden Kreispunkte sind, die folgenden Doppelverhältnisse einander gleich:

$$(l, t, SI_1, SI_2) = (OX, r, OI_1, OI_2).$$

Der Winkel α ist also durch die Gerade r definiert, die wir deshalb die *repräsentierende Gerade* des Winkels nennen. Durch diese repräsentierende Gerade kann der Drehsinn des Winkels, auch wenn er imaginär ist, festgelegt werden.

Bei beliebiger Lage des Punktes O hinsichtlich der gegebenen Kurve ist die gefragte Anzahl gleich dieser Anzahl für $\alpha = 90°$, also gleich der Klasse $k + n - \varepsilon - \sigma$ der Evolute. Es ist klar, dass wir immer den Fusspunkten der unter einem Winkel α schneidenden Geraden eine derartige Multiplizität, die wir die *Gesamtmultiplizität* nennen werden, zuschreiben können, dass die fragliche Anzahl auch bei besonderer Lage des Punktes O und bei besonderem Wert des Winkels α gleich $k + n - \varepsilon - \sigma$ ist. Die Gesamtmultiplizität eines solchen Fusspunktes ist dann die grösste Anzahl Fusspunkte, die dieser bei einer Lagenänderung des Punktes O und einer Wertänderung des Winkels α abgeben kann.

Ist $\alpha = 90°$, so sind die Fusspunkte die Berührungspunkte der durch O gehenden Tangenten der Evolute; ihre Multiplizität geht aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen hervor.

Ist $\alpha = 0°$, so lassen sich ebenfalls die Fusspunkte der $k + n - \varepsilon - \sigma$ Geraden unmittelbar finden. Dies sind nämlich 1°. die k Berührungspunkte der durch O gehenden Tangenten, 2°. die $n - \varepsilon - \sigma$ ausserhalb der Kreispunkte liegenden Schnittpunkte mit l_∞, jeder Schnittpunkt mit einer Multiplizität gleich der Ordnung der zugehörigen Zweiges in Rechnung gezogen [1]).

---

[1]) Bei einem parabolischen Zweig sind also die $t + v$ zusammenfallenden Schnittpunkte mit l_∞ nur für t Fusspunkte zu zählen.

Hieraus erfolgt:

I. *Von den $k + n - \varepsilon - \sigma$ Fusspunkten der durch O gehenden die Kurve unter einem Winkel Null schneidenden Geraden fallen:*

v in den ausserhalb O liegenden Ursprung eines nichtisotropen, isotropen oder zirkulären Zweiges (t, v) mit durch O gehender Tangente;

$t + v$ in den in O liegenden Ursprung eines Zweiges (t, v);

t in den Ursprung eines asymptotischen Zweiges mit nicht durch O gehender Asymptote, oder eines parabolischen Zweiges (t, v);

$t + v$ in den Ursprung eines asymptotischen Zweiges (t, v) mit durch O gehender Asymptote.

Keiner dieser Fusspunkte fällt aber in den Ursprung eines zirkulären Zweiges mit nicht durch O gehender Asymptote oder eines zirkulär-parabolischen Zweiges.

Auch wenn tg α einen der Werte $\pm\sqrt{-1}$ annimmt, und also die repräsentierende Gerade OI_1 oder OI_2 ist, sind die $k + n - \varepsilon - \sigma$ Fusspunkte leicht anzugeben. Ist OI_1 die repräsentierende Gerade, so kann α den verlangten Wert nur dann annehmen, wenn entweder die Tangente im Fusspunkt durch I_1 geht, oder der Radiusvektor (Verbindungsgerade met O) des Fusspunktes durch I_2 geht, was aus der Gleichheit der beiden Doppelverhältnisse hervorgeht. Bei beliebiger Lage von O sind also die $k + n - \varepsilon - \sigma$ Fusspunkte: 1°. die ausserhalb I_2 liegenden Schnittpunkte der Kurve mit OI_2, 2°. die im Endlichen liegenden Berührungspunkte der durch I_1 gehenden Tangenten, 3°. der Punkt I_1 selbst mit einer Multipizität gleich der Summe der Klassen der zirkulären Zweige, die ihren Ursprung in I_1 haben [1]). Für besondere Lage von O aber können einige der unter 1°. genannten Punkte in I_2 fallen, wenn nämlich O auf der Asymptote eines Zweiges (t, v) liegt, der seinen Ursprung in I_2 hat; in diesem Falle fallen v Fusspunkte in I_2. Man hat also:

II. *Von den $k + n - \varepsilon - \sigma$ Fusspunkten der durch O gehenden Geraden, die die Kurve unter einem Winkel α schneiden,*

---

[1]) Diese Multiplizität wird daraus gefunden, dass die Summe der Multiplizitäten aller Fusspunkte $k + n - \varepsilon - \sigma$ sein muss.

fallen, wenn OI_1 die repräsentierende Gerade dieses Winkels ist ($tg\,\alpha = \sqrt{-1}$):

t in den auf OI_2 ausserhalb I_2 liegenden Ursprung eines nicht-isotropen Zweiges (t, v)[1];

v in den ausserhalb OI_2 und l_∞ liegenden Ursprung eines isotropen Zweiges (t, v) *mit durch I_1 gehender Tangente;*

$t + v$ *in den auf OI_2 ausserhalb I_2 liegenden Ursprung eines isotropen Zweiges* (t, v)[1];

v in den in I_2 fallenden Ursprung eines zirkulären Zweiges (t, v) *mit durch O gehender Asymptote;*

v in den in I_1 fallenden Ursprung eines zirkulären Zweiges (t, v).

Keiner der Fusspunkte fällt aber in den in I_2 fallenden Ursprung eines Zweiges, dessen Asymptote nicht durch O geht, oder in den Ursprung eines zirkulär-parabolischen Zweiges.

Im Vorhergehenden haben wir den Fusspunkten der die Kurve unter einem gegebenen Winkel schneidenen Geraden eine solche Multiplizität (Gesamtmultiplizität) zugeschrieben, dass sich immer als Gesamtzahl $k + n - \varepsilon - \sigma$ ergiebt, d. h. wir haben uns bei der Beurteilung der Multiplizität sowohl den Punkt O als den gegebenen Winkel α als veränderlich gedacht. Im Folgenden werden wir den Punkt O als fest und nur den Winkel als veränderlich voraussetzen. Es kann nun sein, dass ein und derselbe Ursprung P für verschiedene Werte von α unter die Fusspunkte gehört, wofür natürlich eine Unbestimmtheit des Winkels nötig ist, unter dem OP den Zweig schneidet. Diese Unbestimmtheit entsteht entweder dadurch, dass P in O fällt und OP also unbestimmt wird, oder dadurch, dass die Tangente in P isotrop ist und mit OP zusammenfällt.

In einem solchen Fall kommt dem Ursprung P für jeden Wert von α ein und dieselbe Gesamtmultiplizität A zu; nur für einen gewissen Winkel α_1 — die Limes des Winkels unter dem OP′ den Zweig scheidet, wenn P′ ein Punkt ist, der sich auf dem betreffenden Zweig dem Ursprung P nähert — be-

---

[1]) Hierin ist der Fall miteinbegriffen, dass O Ursprung des Zweiges ist.

kommt P eine Gesamtmultiplizität $A_1 > A$. Wenn also, während O fest bleibt, α sich dem Wert α_1 nähert, rücken $A_1 - A$ auf dem Zweig liegende Fusspunkte in P. Fragt man also nach den *beweglichen Fusspunkten* — das sind diejenigen Fusspunkte, die sich bei Abänderung des Winkels α aber festem Punkt O bewegen —, so ist P nur für $\alpha = \alpha_1$ eine Lösung und zwar mit einer Multiplizität $A_1 - A$, die wir die *bewegliche Multiplizität* nennen; diese ist Null für $\alpha \neq \alpha_1$. Die kleinste Multiplizität A nennen wir die *feste Multiplizität;* die Summe der beweglichen und der festen Multiplizität ist die Gesamtmultiplizität.

Die Anzahl der beweglichen Fusspunkte wird gefunden indem man von der Gesamtzahl $k + n - \varepsilon - \sigma$ die Summe aller festen Multiplizitäten abzieht. Die feste Multiplizität eines Ursprungs ist bekannt, sobald für zwei verschiedene Werte von α die Gesamtmultiplizität bekannt ist. Sind beide Multiplizitäten einander gleich, so ist dies zugleich die feste Multiplizität; sind sie verschieden, so ist die kleinste die feste Multiplizität, der zugehörige Wert von α ist α_1, der Unterschied beider Multiplizitäten ist die bewegliche Multiplizität für $\alpha = \alpha_1$. Nun haben wir aber für *vier* verschiedene Werte von α ($90^\circ, 0^\circ, \pm \text{Bg tg} \sqrt{-1}$) die Gesamtmultiplizität bestimmt, sodass damit für jeden Ursprung auch die feste Multiplizität gefunden ist. Sind die vier Gesamtmultiplizitäten nicht alle einander gleich, so ist auch α_1 und die zugehörige bewegliche Multiplizität gefunden; sonst weiss man nur, dass α_1 nicht einen der Werte 90°, 0°, $\pm \text{Bg tg} \sqrt{-1}$ hat.

Auf diese Weise findet man:

III. *Die Ursprünge von Zweigen, denen eine feste Fusspunktsmultiplizität zukommt, sind die folgenden:*

a) *Der in O fallende Ursprung eines nicht-isotropen Zweiges (t, v) hat eine feste Multiplizität t und für $\alpha = 0$ eine bewegliche Multiplizität v* [1]*.*

b) *Der Ursprung eines Zweiges (t, v), der ausserhalb O und I_1 (I_2) die Gerade $O\ I_1$ $(O\ I_2)$ berührt, hat eine feste Multi-*

---

[1]) D. h. also, dass bei einem von Null verschiedenen Wert von α sich t Fusspunkte vom Ursprung P des Zweiges abtrennen, wenn O den Punkt P verlässt. Lässt man aber, während O in P bleibt, α sich dem Wert Null nähern, so nähern sich v Fusspunkte dem P.

plizität v und für $\alpha = -\,\mathrm{Bg\,tg}\sqrt{-1}$ ($+\,\mathrm{Bg\,tg}\sqrt{-1}$) [1] *eine bewegliche Multiplizität t.*

c) *Der in O fallende Ursprung eines isotropen Zweiges (t, v) hat eine feste Multiplizität $t + v$ und für einen gewissen von 90°, 0° und $\pm\,\mathrm{Bg\,tg}\sqrt{-1}$ verschiedenen Wert von α eine bewegliche Multiplizität.*

d) *Der Ursprung eines zirkulären Zweiges (t, v) mit durch O gehender Asymptote hat eine feste Multiplizität v. Ist $v \neq t$, so hat der Ursprung eine bewegliche Multiplizität für einen gewissen von 90°, 0° und $\pm\,\mathrm{Bg\,tg}\sqrt{-1}$ verschiedenen Wert von α. Ist $v = t$, so hat der Ursprung für $\alpha = 90°$ eine bewegliche Multiplizität $\mu - 2t$, worin μ die grösste Anzahl der in den Ursprung fallenden Schnittpunkte mit einem Kreise ist, der sein Zentrum in O hat* [2].

Die Summe aller festen Multiplizitäten ist also $T + V$, worin T die Summe der Ordnungen aller Zweige ist, die ihren Ursprung in O haben, also die Ordnung von O als Kurvenpunkt, während V die Summe der Klassen aller Kurvenzweige ist, die eine der Geraden OI_1 und OI_2 berühren, also die Summe der Klassen von OI_1 und OI_2 als Tangenten der Kurve. Wir finden also:

---

[1]) Der Richtungskoeffizient von OI_1 sei $+\,\mathrm{Bg\,tg}\sqrt{-1}$.

[2]) Für $v \neq t$ korrespondiert mit dem Zweige der ursprünglichen Kurve in der Evolute ein Zweig (t, v) mit demselben Ursprung und derselben Tangente (§ 4, VIII), sodass für $\alpha = 90°$ die Gesamtmultiplizität noch immer gleich v ist.

Ist $v = t$ und hat man es mit einem unter IX (§ 4) genannten Zweige zu tun, so schneidet der oskulierende Kreis, der sein Zentrum in O hat, den Zweig in $\mu = 2t + \lambda$ $(\lambda < t)$ zusammenfallenden Punkten, während in der Evolute mit diesem Zweig ein Zweig $(t - \lambda,\ t + \lambda)$ mit demselben Ursprung und derselben Tangente korrespondiert, sodass für $\alpha = 90°$ die Gesamtmultiplizität dieses Ursprungs als eines Fusspunktes gleich $t + \lambda$ ist. Weil die feste Multiplizität $v = t$ beträgt, so ist für $\alpha = 90°$ die bewegliche Multiplizität $\lambda = \mu - 2t$.

Hat man einen unter X (§ 4) genannten Zweig, so schneidet der oskulierende Kreis, der sein Zentrum in O hat, den Zweig in $\mu = 3t$ oder $\mu = 3t + \lambda$ $(\lambda > 0)$ zusammenfallenden Punkten je nachdem O nicht oder wohl Krümmungszentrum des Zweiges ist In der Evolute korrespondiert mit diesem Zweig ein Zweig $(\lambda, 2t)$, der dieses Krümmungszentrum als Ursprung hat. Für $\alpha = 90°$ ist also die Gesamtmultiplizität des Ursprungs des ursprünglichen Zweiges $2t$ oder $2t + \lambda$ je nachdem O nicht oder wohl Zentrum seines Krümmungskreises ist, also in beiden Fällen gleich $\mu - t$. Weil die feste Multiplizität t ist, so ist für $\alpha = 90°$ die bewegliche Multiplizität wieder gleich $\mu - 2t$.

IV. *Die Anzahl der beweglichen durch einen festen Punkt O gehenden Geraden, die eine gegebene Kurve unter einem gegebenen Winkel α schneiden, beträgt*

$$k + n - \varepsilon - \sigma - T - V;$$

hierin ist T die Ordnung von O als Kurvenpunkt, V die Summe der Klassen von $O I_1$ und $O I_2$ als Kurventangenten. Unter beweglichen Geraden sind diejenigen zu verstehen, die sich bei Abänderung von α aber festem O bewegen.

Bemerkt sei, dass $\varepsilon + T$ die Summe der Ordnungen der Ecken, $\sigma + V$ die Summe der Klassen der Seiten des Dreiecks $O I_1 I_2$ ist.

Schliesslich lassen wir hier noch für einige Zweige, deren feste Multiplizität Null ist, den Wert der beweglichen Multiplizität folgen, der aus dem Vorhergehenden leicht zu finden ist:

V. *Der auf OI_1 (OI_2) ausserhalb O und I_1 (I_2) fallende Ursprung eines nicht-isotropen Zweiges (t, v) hat für $\alpha = -Bg\ tg \sqrt{-1}$ ($+ Bg\ tg \sqrt{-1}$) eine bewegliche Multiplizität t.*

VI. *Der ausserhalb OI_1, OI_2 und l_∞ liegende Ursprung eines isotropen Zweiges (t, v) mit durch I_1 (I_2) gehender Tangente hat für $\alpha = Bg\ tg \sqrt{-1}$ ($- Bg\ tg \sqrt{-1}$) eine bewegliche Multiplizität v.*

VII. *Der auf OI_2 (OI_1) ausserhalb O und I_2 (I_1) liegende Ursprung eines isotropen Zweiges (t, v) mit durch I_1 (I_2) gehender Tangente hat für $\alpha = Bg\ tg \sqrt{-1}$ ($- Bg\ tg \sqrt{-1}$) eine bewegliche Multiplizität $t + v$.*

VIII. *Der Ursprung eines asymptotischen Zweiges (t, v) mit nicht durch O gehender Asymptote oder eines parabolischen Zweiges hat für $\alpha = 0$ eine bewegliche Multiplizität t.*

IX. *Der Ursprung eines asymptotischen Zweiges (t, v) mit durch O gehender Asymptote hat für $\alpha = 0$ eine bewegliche Multiplizität $t + v$.*

X. *Der in I_1 (I_2) fallende Ursprung eines zirkulären Zweiges (t, v) mit nicht durch O gehender Asymptote hat für $\alpha = Bg\ tg \sqrt{-1}$ ($- Bg\ tg \sqrt{-1}$) eine bewegliche Multiplizität v.*

Weiter hat man noch:

XI. *Der Ursprung eines zirkulär-parabolischen Zweiges (t, v) hat für einen gewissen von 90°, 0 und $\pm Bg\ tg \sqrt{-1}$ verschiedenen Wert von α eine bewegliche Multiplizität.*

ZWEITER ABSCHNITT.

Zweige der Polarkurven, die mit Zweigen der ursprünglichen Kurve korrespondieren.

In allem Folgenden treffen wir die nachstehende beschränkende Voraussetzung:

Wir nehmen an, dass die gegebene Kurve keine zirkulären Zweige mit durch O gehender Asymptote und keine zirkulär-parabolischen Zweige hat.

Ich habe aber auch für die hiermit ausgeschlossenen Fälle die Untersuchung ganz durchgeführt, die ich aber der grösseren Komplikationen wegen hier unterdrücke. *Diejenigen Resultate, die auch ohne die genannte Beschränkung ihre Gültigkeit beibehalten, werden wir durch die Hinzufügung allgemeingültig andeuten.*

§ 6. Feste Polarkurve (K_1).

Die feste Polarkurve K_1 ist der Ort der Rotationszentra als Punkte der festen Ebene. Das Rotationszentrum R wird gefunden als der Schnittpunkt der Normalen in O und P auf die Gerade OP resp. die gegebene Kurve C; fällt doch die Geschwindigkeit von O (als Punkt der sich bewegenden Figur) auf OP, die Geschwindigkeit von P auf die Tangente von C. Aus dieser Konstruktion für den Punkt R geht unmittelbar hervor:

Zwischen den Punkten der Kurven C und K_1 besteht eine ein-eindeutige Beziehung; C und K_1 sind also gleichen Geschlechtes.

Die beweglichen Schittpunkte von K_1 mit einer durch O gehenden Geraden m lassen sich leicht angeben. Dazu ziehen wir durch O senkrecht auf m eine Gerade l [1]), die C in $n - T$ beweglichen Punkten P schneidet, wenn n die Ordnung von C und T die Ordnung von O als Punkt von C ist [2]). Die Normalen von C in diesen Punkten schneiden die Gerade m in $n - T$ der festen Polarkurve angehörigen Punkten R. Wir finden also:

---

[1]) D. i. die sich um O drehende Gerade der sich bewegenden Figur.

[2]) Ist O kein Punkt von C, so ist $T = 0$.

Satz 1. — *Ist C n^{ter} Ordnung mit einem Punkt T^{ter} Ordnung in O, so schneidet eine durch O gehende Gerade die Kurve K_1 in $n-T$ beweglichen Punkten.* (*Allgemeingültig*).

Bei besonderer Lage von *m* werden ein oder mehrere bewegliche Schnittpunkte in O fallen, sodass O ein Punkt von K_1 sein wird. Die Ordnung T_1 von O als Punkt von K_1 muss zu $n-T$ addiert werden um die Ordnung n_1 von K_1 zu bekommen. Um T_1 zu bestimmen haben wir zu untersuchen welche Zweige von C einen Zweig von K_1 geben, der seinen Ursprung in O hat, und die Ordnungen dieser Zweige von K_1 aufzusuchen. Weil wir mehrmals auf derartige Fragen stossen werden, werden wir erst dafür das Material sammeln und von *allen* Zweigen, die C in der gemachten Annahme nur haben kann, den entsprechenden Zweig von K_1 auf Ursprung, Tangente, Ordnung und Klasse untersuchen.

Dazu haben wir erstens die Anzahl zusammenfallender beweglicher demselben Zweig angehöriger Schnittpunkte von K_1 mit einer durch O gehenden Geraden *m* zu bestimmen; diese Anzahl ist gleich der der zusammenfallenden Schnittpunkte von C mit der Normalen *l* in O auf *m*. Wenn man zweitens die Gerade *m* einen kleinen Winkel erster Ordnung um O dreht und die Ordnung der Verrückung aufsucht, die die Schnittpunkte mit K_1 dadurch erfahren, ist man in vielen Fällen unmittelbar im Stande Tangente, Ordnung und Klasse des korrespondierenden Zweiges von K_1 anzugeben. In dem achten und den folgenden Paragraphen wird dies näher erläutert werden.

§ 7. Bewegliche Polarkurve (K_2).

Die bewegliche Polarkurve K_2 ist der Ort der Rotationszentra R als Punkte der sich bewegenden Ebene. K_2 wird also gefunden indem man die bewegliche Figur mit dem Dreieck POR immer nach einer bestimmten Position, der *Initialposition*, zurückführt. Sei P_0 die Initialposition von P und l_0 die der sich um O drehenden Geraden *l* der sich bewegenden Figur. Das Dreieck POR wird dann in seiner Ebene so gedreht, dass P in P_0 und O auf einer durch P_0 gehenden Geraden l_0 zu liegen kommt. Ist Q die neue Position von O und S die von R, so ist K_1 der Ort der Punkte S.

Das Überführen des Dreiecks POR kann aber auf zwei verschiedene Weisen geschehen, nämlich so dass Q auf l_0 auf der einen oder der andren Seite von P_0 zu liegen kommt. Die beiden Positionen, die S dabei annimmt, liegen symmetrisch

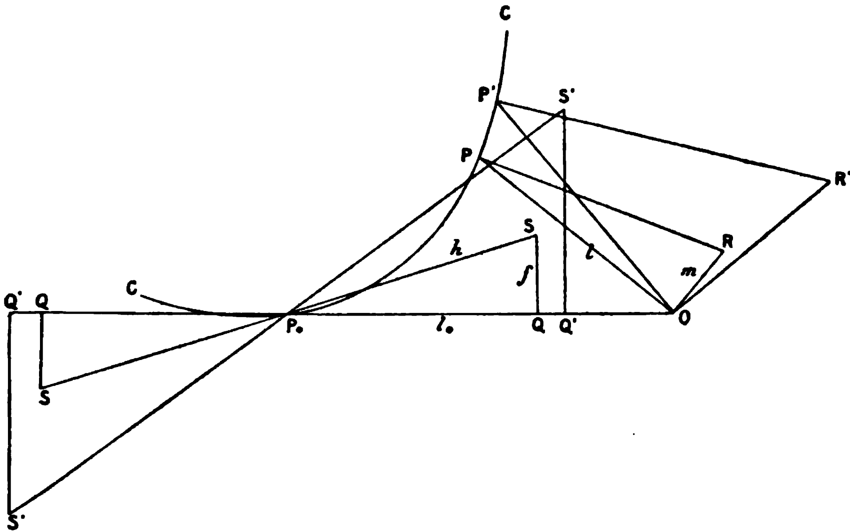


Fig. 1.

zu P_0, d. h. P_0 halbiert die Verbindungsstrecke dieser beiden Punkte S. Weil aber bei einer algebraischen Behandlung der Sache diese beiden Arten des Überführens sich im allgemeinen nicht rational trennen lassen, werden beide Punkte S derselben algebraischen Kurve angehören.

Der Punkt O teilt die Gerade l in zwei Halbstrahlen l' und l'', deren Initialpositionen wir l_0' und l_0'' nennen. Bei bestimmter Wahl von C, O, P und l kann die Bewegung, wenn P einen Zweig von C beschreibt, noch zweierlei sein, nämlich so dass l' oder so dass l'' auf O ruht; im ersten Falle wird Q auf l_0', im zweiten Falle auf l_0'' zu liegen kommen, sodass die durch S in den beiden Fällen beschriebenen Zweige symmetrisch zu P_0 liegen.

Am deutlichsten sieht man den algebraischen Zusammenhang beider Bewegungen in dem Fall, dass die Kurve C einen end-

lichen durch O gehenden Zug hat. Durchläuft P den ganzen Zug, so hat die Bewegungsart sich geändert wenn P in den Anfangspunkt zurückgekehrt ist, sodass O, falls er sich ursprünglich auf l' befand, am Ende der Bewegung auf l'' liegt; erst wenn P den Zug zweimal durchlaufen hat ist S wieder in seine Anfangslage zurückgekehrt und hat dann einen Zug beschrieben, der in P_0 einen Mittelpunkt hat [1]).

In Spezialfällen kann es aber sein, dass die beiden Bewegungsarten rational trennbar sind und die zugehörigen beweglichen Polarkurven zwei verschiedene (symmetrisch zu P_0 liegende) algebraische Kurven bilden [2]). In solchem Fall werden wir jedoch immer unter K_2 die Gesamtheit dieser beiden Kurven verstehen.

Aus dem Vorhergehenden folgt:

Satz 2. — *Die Initialposition P_0 von P ist ein Mittelpunkt der Kurve K_2.* (*Allgemeingültig*).

Und weiter:

Zwischen den Kurven C und K_2 besteht eine zwei-eindeutige Korrespondenz, d. h. jedem Ursprung eines Zweiges von C entsprechen zwei symmetrisch zu P_0 liegende Ursprünge von Zweigen von K_2 [3]), *jedem Ursprung eines Zweiges von K_2 entspricht nur ein Ursprung eines Zweiges von C.*

Allerdings gilt dies nur wenn man die folgende Annahme trifft, was wir im Folgenden, wenn nicht das Gegenteil ausdrücklich gesagt wird, immer tun werden:

Wir nehmen an, dass C in O kein Symmetriezentrum hat, d. h.

---

1) Ist z. B. C ein durch O gehender Kreis, so fällt K_1 mit C zusammen, während K_2 ein Kreis mit dem doppelten Radius ist, der sein Zentrum in P_0 hat.

Ist C eine Gerade und a der Abstand des Punktes O von C, so wird, wenn man P_0 als Ursprung und l_0 als x-Achse eines rechtwinkligen Systems nimmt, die Gleichung von K_2:

$$a^2 (x^2 + y^2) = x^4.$$

Diese Kurve besteht aus zwei nur im Unendlichen zusammenhangenden, symmetrisch zu P_0 liegenden Teilen. Durchläuft P die ganze Gerade C, während der Halbstrahl l' auf O ruht, so beschreibt das Rotationszentrum auf der beweglichen Ebene nur die Hälfte der Kurve K_2; die andere Hälfte gehört der Bewegung an, wobei l'' auf O ruht.

2) Dieser Fall tritt z. B. ein bei der inversen Bewegung der in der Aufgabe no. 108 des Wiskundig Genootschap (9de Deel) genannten; da ist C eine Parabel und O der Brennpunkt. In § 25 werden wir auf die Frage des Zerfallens von K_2 zurückkommen.

3) Wohl aber kann C eine endliche Anzahl von Ursprüngen von Zweigen haben, denen nur ein Ursprung eines Zweiges von K_2 entspricht; der Symmetrie wegen muss der letztgenannte Ursprung entweder in P_0 oder im Unendlichen liegen (siehe § 24).

dass es nicht möglich ist die Kurve C bei Drehung um O eines Winkels $< 360°$ *mit sich selbst zur Deckung zu bringen.*

Die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte von K_2 mit einer senkrecht auf l_0 stehenden Geraden f lässt sich leicht bestimmen. Ist Q der Schnittpunkt von f und l_0, so giebt ein Punkt P von C einen auf f liegenden Punkt S, wenn $OP = QP_0$ ist. Diese Punkte P werden auf C von einem Kreise eingeschnitten, der sein Zentrum in O und QP_0 als Halbmesser hat. Weil dieser Kreis in der gemachten Voraussetzung (S. 329) die Kurve C in den Kreispunkten nicht berührt, so fallen ε Schnittpunkte in die Kreispunkte, sodass die Anzahl beweglicher Schnittpunkte mit dem genannten Kreis $2n - \varepsilon$ beträgt. Mit jedem dieser Punkte korrespondieren zwei Punkte S, von denen aber nur einer auf f zu liegen kommt. Man hat also:

Satz 3. — *Die bewegliche Polarkurve wird von einer senkrecht auf* l_0 *stehenden Geraden in* $2n - \varepsilon$ *beweglichen Punkten geschnitten, worin* ε *die Summe der Ordnungen beider Kreispunkte als Punkte von C ist* [1]).

Die Ordnung n_2 von K_2 wird daraus gefunden, indem man zu $2n - \varepsilon$ die Ordnung des unendlich fernen Punktes E der Geraden f als eines Punktes von K_2 addiert.

Die Zweige von K_2 können näher untersucht werden, indem man die Gerade f eine kleine Parallelverschiebung erster Ordnung ausführen lässt und die Ordnung der Verrückung der Schnittpunkte mit K_2 aufsucht, wie in den nächsten Paragraphen näher erklärt werden wird.

Es giebt noch ein zweites Büschel von Strahlen, deren bewegliche Schnittpunkte mit K_2 leicht anzugeben sind, nämlich das Büschel der durch P_0 gehenden Geraden h. Soll S auf einer bestimmten Geraden h zu liegen kommen, so muss der Winkel OPR ($= \sphericalangle QP_0S$) einen bestimmten Wert und Drehsinn haben. Hieraus folgt, dass die beweglichen Schnittpunkte von h und K_2 aus den beweglichen Fusspunkten der durch O gehenden die Kurve C unter einem gegebenen Winkel schneidenden Geraden entstehen [2]), für deren Anzahl wir in § 5, IV

[1]) Hat C zirkuläre Zweige mit durch O gehenden Asymptoten, so wird die Anzahl beweglicher Schnittpunkte $2n - \varepsilon - \gamma$; hierin wird γ gefunden indem man für jeden dieser Zweige die kleinste der Zahlen t und v bildet und die so erhaltenen Zahlen addiert.

[2]) Das sind diejenigen Fusspunkte, die sich bei Abänderung des gegebenen Winkels aber festem O bewegen.

ganz allgemein $k + n - \varepsilon - \sigma - T - V$ gefunden haben; jeder dieser Fusspunkte giebt aber zwei auf h liegende Punkte S, sodass man hat:

Satz 4. — *Die Kurve K_2 wird von einer durch P_0 gehenden Geraden in $2(k + n - \varepsilon - \sigma - T - V)$ beweglichen Punkten geschnitten; hierin ist k die Klasse von C, σ die Klasse der unendlich fernen Geraden l_∞ und V die Summe der Klassen der durch O gehenden isotropen Geraden OI_1 und OI_2 als Tangenten von C. (Allgemeingültig).*

Auch hieraus kann die Ordnung von K_2 bestimmt werden, indem man zu $2(k + n - \varepsilon - \sigma - T - V)$ die Ordnung von P_0 als Punkt von K_2 addiert.

Die Geraden h liefern in Verbindung mit den Geraden f ein zweites Mittel um einen Zweig von K_2 näher zu untersuchen. Dazu suchen wir die Anzahl der in den Ursprung S dieses Zweiges fallenden Schnittpunkte mit SQ (oder f) und mit SP_0 (oder h). Sind beide Zahlen verschieden, so ist die kleinere die Ordnung, ihre Differenz die Klasse des Zweiges, während die Gerade mit der grösseren Anzahl zusammenfallender Schnittpunkte Tangente ist. Sind beide Zahlen einander gleich, so ist dies (jedenfalls wenn f und h verschieden sind) die Ordnung des Zweiges, während keine der beiden Geraden Tangente ist.

In einigen Fällen kann man diese Methode verwenden um den Ursprung des korrespondierenden Zweiges von K_2 aufzusuchen. Giebt nämlich ein Punkt P von C sowohl auf einer Geraden f als auf einer Geraden h einen korrespondierenden Punkt von K, so muss dieser korrespondierende Punkt der Schnittpunkt von f und h sein (siehe z. B. S. 353).

Nicht-isotrope Zweige.

§ 8. Nicht-isotroper Zweig mit ausserhalb OI_1 und OI_2 liegendem Ursprung und nicht durch O gehender Normalen und Tangente[1]).

Mit dem Ursprung P des Zweiges (t, v) korrespondiert in K_1

---

[1]) Die in den Überschriften genannten Zweige sind Zweige t^{ter} Ordnung v^{ter} Klasse von C, deren korrespondendierende Zweige (t_1, v_1) und (t_2, v_2) von K_1 und K_2 untersucht werden. In Betreff der Benennungen nicht-isotrope Zweige, isotrope Zweige u. s. w. siehe S. 320—321.

ein im Endlichen ausserhalb O liegender Punkt R, Ursprung eines Zweiges (t_1, v_1). Die Gerade OP (oder l) schneidet den Zweig (t, v) in t Punkten P, sodass die Gerade OR (oder m) den Zweig (t_1, v_1) in t Punkten R schneidet.

Dreht man m, und also auch die senkrecht auf m stehende Gerade l, einen kleinen Winkel erster Ordnung, so löst sich der Schnittpunkt P in t Punkte P′ auf, derart dass PP′ erster Ordnung ist. Die Normale von C in P′ schliesst mit der Normalen in P einen Winkel $\frac{v}{t}$ ter Ordnung ein [1]).

Wir haben nun zwei Fälle $v < t$ und $v \geq t$ zu unterscheiden.

Erster Fall: $v < t$. Bei der Drehung von OP erleidet der Winkel OPR eine Änderung $\frac{v}{t}$ ter Ordnung. Die Änderung von OR (d. h. OR′ — OR, wenn R′ der mit P′ korrespondierende Punkt von K_1 ist; siehe Fig. 1) ist also ebenfalls von der Ordnung $\frac{v}{t}$ und dies ist auch die Ordnung von RR′. Hieraus erfolgt, dass OR in R Tangente des Zweiges (t_1, v_1) ist, weil sonst RR′ erster Ordnung sein würde. Ist aber OR Tangente des Zweiges (t_1, v_1), so ist RR′ von der Ordnung $\frac{t_1}{t_1 + v_1}$, sodass $\frac{t_1}{t_1 + v_1} = \frac{v}{t}$ ist. Da nun, wie wir gefunden haben, OR den Zweig (t_1, v_1) in t Punkten R schneidet, so hat man auch $t_1 + v_1 = t$, also $t_1 = v$, $v_1 = t - v$. Wir finden also:

---

1) Bei passender Wahl der Koordinatenachsen wird nämlich die Puiseux'sche Entwicklung des Zweiges (t, v):

$$y = a x^{\frac{t+v}{t}} + \dots$$

Die Richtung der Tangente findet man aus:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t+v}{t} a x^{\frac{v}{t}} + \dots$$

Ist nun die Entfernung des Berührungspunktes P′ dieser Tangente vom Ursprung P des Zweiges (also auch x) erster Ordnung, so ist der Winkel zwischen den Tangenten und also auch der Winkel zwischen den Normalen in P und P′ von der Ordnung $\frac{v}{t}$.

Satz 5. — *Mit einem nicht-isotropen Zweige* (t, v) $(t > v)$ *von* C *mit ausserhalb* OI_1 *und* OI_2 *liegendem Ursprung und nicht durch* O *gehender Tangente und Normalen korrespondiert in* K_1 *ein Zweig* $(v, t-v)$ *mit ausserhalb* O *liegendem Ursprung und durch* O *gehender Tangente.*

Um die beiden mit (t, v) korrespondierenden Zweige (t_2, v_2) von K_2 zu untersuchen, bringen wir die Dreiecke OPR und OP′R′ nach ihren Initialpositionen QSP_0 resp. $Q'S'P_0$ über (siehe Fig. 1). Nun ist OP′ — OP, also auch QQ′, erster Ordnung, während Q′S′ — QS = OR′ — OR von der Ordnung $\frac{v}{t} < 1$ ist. Hieraus folgt, dass QS Tangente des Zweiges (t_2, v_2), und daraus wieder, dass $\frac{t_2}{t_2+v_2} = \frac{v}{t}$ ist. Weil ein durch P gehender Kreis mit O als Zentrum den Zweig (t, v) in t Punkten P schneidet, zeigt die Gerade QS ebenfalls t Schnittpunkte S mit dem Zweige (t_2, v_2), sodass $t_2 + v_2 = t$ ist, also $t_2 = v$, $v_2 = t - v$. Da mit P zwei Punkte S korrespondieren finden wir:

Satz 5*. — *Der in Satz 5 genannte Zweig von* C *giebt in* K_2 *zwei Zweige* $(v, t-v)$ *mit im Endlichen ausserhalb* l_0 *liegenden Ursprüngen und senkrecht auf* l_0 *stehenden Tangenten* [1]).

Zweiter Fall: $v \geq t$. Jetzt ist RR′ erster Ordnung, sodass OR keine Tangente des Zweiges (t_1, v_1) ist. Weil OR diesen Zweig wieder in t Punkten R schneidet, hat man $t_1 = t$. Die Klasse v_1 des Zweiges lässt sich aber nicht auf so einfache Weise angeben und braucht für die Bestimmung der PLÜCKER'schen Charaktere von K_1 auch nicht bekannt zu sein. Man hat also:

Satz 6. — *Ein nicht-isotroper Zweig* (t, v) $(t \leqq v)$ *mit ausserhalb* OI_1 *und* OI_2 *liegendem Ursprung und nicht durch* O *gehender Tangente und Normalen giebt in* K_1 *einen Zweig* t^{ter} *Ordnung mit im Endlichen liegendem Ursprung und nicht durch* O *gehender Tangente.*

Weiter find man:

Satz 6*. — *Der in Satz 6 genannte Zweig giebt in* K_2 *zwei Zweige* t^{ter} *Ordnung mit im Endlichen ausserhalb* l_0 *gelegenen Ursprüngen und nicht senkrecht auf* l_0 *stehenden Tangenten.*

---

[1]) Diese beiden Zweige von K_2 liegen symmetrisch zu P_0. Dies gilt immer wenn mit einem Zweig von C zwei Zweige von K_2 korrespondieren.

§ 9. Nicht-isotroper Zweig mit ausserhalb O liegendem Ursprung und durch O gehender Tangente.

Weil jetzt die Normalen in O und P, dem Ursprung des Zweiges (t, v), auf OP resp. auf die Kurve C parallel sind, liegt der korrespondierende Punkt R von K_1 im Unendlichen. Da nun OP den Zweig (t, v) in $t+v$ Punkten P schneidet, zeigt auch OR $t+v$ zusammenfallende Schnittpunkte R mit dem korrespondierenden Zweige (t_1, v_1) von K_1.

Dreht man OP einen kleinen Winkel erster Ordnung, so löst der Schnittpunkt P sich in $t+v$ Punkte P′ derart auf, dass PP′ von der Ordnung $\frac{t}{t+v}$ ist. Die Normalen von C in P und P′ schliessen einen Winkel ein, der hinsichtlich PP′ von der Ordnung $\frac{v}{t}$ (siehe die Note von S. 335), also hinsichtlich des Winkels POP′ von der Ordnung $\frac{v}{t} \cdot \frac{t}{t+v} = \frac{v}{t+v}$ ist. Der Winkel OR′P′ (R′ ist wieder der mit P′ korrespondierende Punkt von K_1) ist also ebenfalles $\frac{v}{t+v}^{\text{ter}}$ Ordnung, sodass OR′ von der Ordnung $-\frac{v}{t+v}$ ist [1]). Hieraus folgt, dass OR Asymptote des Zweiges (t_1, v_1) ist, weil OR′ -1ster Ordnung sein würde, wenn die im Endlichen liegende Asymptote nicht durch O ginge, und von einer Ordnung < -1, wenn l_∞ Tangente des Zweiges (t_1, v_1) wäre. Nun ist aber, wenn OR Asymptote ist, OR′ von der Ordnung $-\frac{t_1}{t_1+v_1}$ [2]), sodass $\frac{t_1}{t_1+v_1} = \frac{v}{t+v}$

[1]) Eine Grösse $-p^{\text{ter}}$ Ordnung ist eine Unendlich werdende Grösse, deren reziproker Wert eine unendlich kleine Grösse p^{ter} Ordnung ist.

[2]) Nimmt man die Asymptote des Zweiges (t_1, v_1) als y-Achse, so wird die Puiseux'sche Entwicklung dieses Zweiges:

$$y = a x^{-\frac{t_1}{v_1}} + \ldots.$$

Ist λ eine kleine Grösse erster Ordnung, so ist $x = \lambda y$ eine durch O gehende Gerade, die mit der Asymptote einen Winkel erster Ordnung einschliesst, während man leicht findet, dass die y des Schnittpunktes $-\frac{t_1}{t_1+v_1}^{\text{ter}}$ Ordnung ist.

ist, und, da die Asymptote den Zweig in $t_1 + v_1$ Punkten R schneidet, hat man $t_1 + v_1 = t + v$. Hieraus folgt: $t_1 = v$, $v_1 = t$, also:

Satz 7. — *Ein nicht-isotroper Zweig* (t, v) *mit ausserhalb O liegendem Ursprung und durch O gehender Tangente giebt in* K_1 *einen asymptotischen Zweig* (v, t) *mit durch O gehender senkrecht auf der Tangente des Zweiges* (t, v) *stehender Asymptote.*

Mit dem Zweige (t, v) korrespondieren in K_2 zwei asymptotische Zweige (t_2, v_2), deren Asymptoten senkrecht auf l_0 stehen auf Abständen OP von P_0. Da ein durch P gehender Kreis, der sein Zentrum in O hat, den Zweig (t, v) in t Punkten P schneidet, rücken t Schnittpunkte mit einer senkrecht auf l_0 stehenden Geraden f ins Unenliche wenn f sich der Asymptote des Zweiges (t_2, v_2) nähert, sodass $v_2 = t$ ist. Ist nun PP′ und also auch QQ′ erster Ordnung, so ist der Winkel OR′P′ von der Ordnung $\frac{v}{t}$ und daher Q′S′ von der Ordnung $-\frac{v}{t}$. Weil aber Q′S′ auch von der Ordnung $-\frac{t_2}{v_2}$ ist, so hat man $\frac{t_2}{v_2} = \frac{v}{t}$, also $t_2 = v$.

Zu demselben Resultate kann man auch mittelst der zweiten in § 7 genannten Methode gelangen (siehe S. 334). Die ausserhalb P_0 liegenden Schnittpunkte von K_2 mit P_0E [1]) entstehen aus den Fusspunkten der $n + k - \varepsilon - \sigma - T - V$ durch O gehenden die Kurve C unter einem Winkel Null schneidenden Geraden. Die Tangente OP zählt für v dieser Geraden, sodass P zu $2v$ im Unendlichen liegenden Schnittpunkten von K_2 mit P_0E Anlass giebt, von welchen v dem einen, v dem andern mit (t, v) korrespondierenden Zweig (t_2, v_2) angehören. D. h. lässt man eine sich um P_0 drehende Gerade h sich der Geraden P_0E nähern, so rücken v Schnittpunkte mit dem Zweige (t_2, v_2) ins Unendliche. Da nun aber P_0E keine Asymptote dieses Zweiges ist, so hat man $t_2 = v$.

Wir finden also:

Satz 7*. — *Der in Satz 7 genannte Zweig giebt in* K_2 *zwei asymptotische Zweige* (v, t) *mit senkrecht auf* l_0 *stehenden Asymptoten.*

---

[1]) E ist der unendlich ferne Punkt aller Geraden f.

§ 10. Nicht-isotroper Zweig mit ausserhalb O liegendem Ursprung und durch O gehender Normalen.

Hiermit korrespondiert in K_1 ein Zweig (t_1, v_1) mit O als Ursprung. Nähert eine sich um O drehende Gerade OP′ sich der Kurvennormalen OP, so nähern sich t Schnittpunkte mit dem Zweig (t, v) dem Punkte P, sodass sich t Schnittpunkte R′ des Zweiges (t_1, v_1) mit OR′ dem Punkte O nähern (Fig. 2). Hieraus folgt, dass die Tangente dieses Zweiges senkrecht auf OP steht und $v_1 = t$ ist.

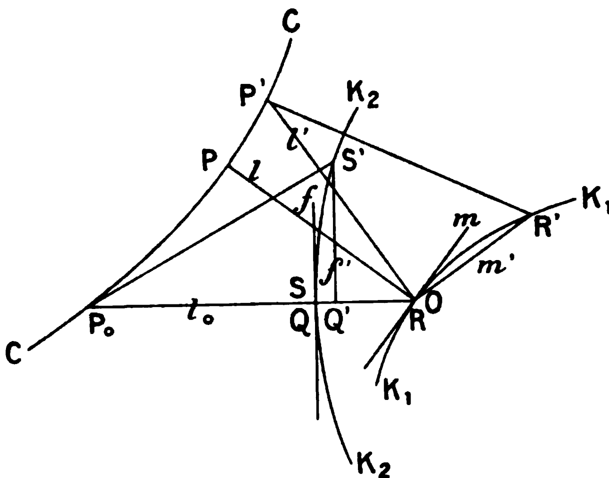


Fig. 2.

Ist der Winkel POP′ erster Ordnung, so ist PP′ ebenfalls erster Ordnung und der Winkel der Normalen in P und P′ von der Ordnung $\frac{v}{t}$ (siehe die Note von S. 335). Hieraus erfolgt, dass $\sphericalangle$ OP′R′ für $t > v$ von der Ordnung $\frac{v}{t}$ und also OR′

derselben Ordnung ist. OR' ist aber auch von der Ordnung $\frac{t_1}{v_1}$ [1]), woraus folgt $\frac{t_1}{v_1} = \frac{v}{t}$, also $t_1 = v$. Daher:

Satz 8 — *Ein nicht-isotroper Zweig (t, v) $(t > v)$ mit ausserhalb O liegendem Ursprung und durch O gehender Normalen giebt in K_1 einen Zweig (v, t) mit derselben Normalen und in O liegendem Ursprung.*

In K_2 giebt (t, v) zwei Zweige (t_2, v_2) mit im Endlichen auf l_0 ausserhalb P_0 liegenden Ursprüngen S. Da ein durch P gehender Kreis, der sein Zentrum in O hat, den Zweig (t, v) (immer für den Fall, dass $t > v$ ist) in $t + v$ Punkten P schneidet, so zeigt die durch S gehende (senkrecht auf l_0 stehende) Gerade f $t + v$ Schnittpunkte mit dem Zweige (t_2, v_2). Nun ist die Anzahl in S fallender Schnitpunkte mit P_0S gleich der Anzahl in P fallender Fusspunkte der durch O gehenden Normalen des Zweiges (t, v), also (vermoge § 4, I) gleich v. Hieraus folgt, dass die Ursprungstangente des Zweiges (t_2, v_2) senkrecht auf l_0 steht und $t_2 = v$, $v_2 = t$ ist. Also:

Satz 8* — *Der in Satz 8 genannte Zweig giebt in K_2 zwei Zweige (v, t) mit im Endlichen auf l_0 ausserhalb P_0 liegenden Ursprüngen und senkrecht auf l_0 stehenden Tangenten.*

Auf ganz ähnliche Weise findet man:

Satz 9. — *Ein nicht-isotroper Zweig (t, v) $(t \leqq v)$ mit ausserhalb O liegendem Ursprung und Krümmungszentrum und durch O gehender Normalen giebt in K_1 einen Zweig (t, t) mit derselben Normalen und in O liegendem Ursprung.*

Satz 9*. — *Der in Satz 9 genannte Zweig giebt in K_2 zwei Zweige (t, t) mit im Endlichen auf l_0 ausserhalb P_0 liegenden Ursprüngen und senkrecht auf l_0 stehenden Tangenten.*

Etwas anders wird die Sache wenn $v = t$ und O Krümmungszentrum des Zweiges (t, v) ist. Wird der Zweig von seinem Krümmungskreis in $2t + \lambda$ Punkten P geschnitten, so korre-

---

[1]) Wählt man O als Ursprung und die Tangente als x-Achse eines Cartesischen Systems, so wird die Puiseux'sche Entwicklung des Zweiges (t_1, v_1):

$$y = a x^{\frac{t_1 + v_1}{t_1}} + \dots.$$

Ist λ eine kleine Grösse erster Ordnung, so ist $y = \lambda x$ eine Gerade, die mit der Tangente einen kleinen Winkel erster Ordnung einschliesst. Man zeigt leicht, dass die x des Schnittpunktes, also auch OR', von der Ordnung $\frac{t_1}{v_1}$ ist.

spondiert mit diesem Zweig in der Evolute ein Zweig (λ, t), der seinen Ursprung in O hat (siehe § 4, III). Hieraus folgt, dass, wenn $\sphericalangle$ POP′ erster Ordnung ist, der Winkel OP′R′, und also auch OR′, von der Ordnung $\frac{t+\lambda}{t}$ ist. Die Ordnung von OR′ ist aber auch $\frac{t_1}{v_1}$, sodass $\frac{t_1}{v_1} = \frac{t+\lambda}{t}$ ist. Da auch jetzt $v_1 = t$ ist, findet man $t_1 = t + \lambda$. Man hat also:

Satz 10. — *Ein nicht-isotroper Zweig (t, t), der sein Krümmungszentrum in O hat und von seinem Krümmungskreis in $2t+\lambda$ zusammenfallenden Punkten geschnitten wird, giebt in K_1 einen Zweig $(t+\lambda, t)$ mit derselben Normalen und in O liegendem Ursprung.*

Um die korrespondierenden Zweige von K_2 zu untersuchen bemerken wir, dass die durch S gehende Gerade f den Zweig (t_2, v_2) in $2t+\lambda$ Punkten S schneidet, weil der durch P gehende Kreis, der sein Zentrum in O hat, den Zweig (t, v) in $2t+\lambda$ Punkten P schneidet. Da weiter OP für $t+\lambda$ durch O gehende Normale von C zu zählen ist (befindet doch O sich im Ursprung des Zweiges (λ, t) der Evolute), schneidet P_0S den Zweig (t_2, v_2) in $t+\lambda$ Punkten S. Hieraus folgt, dass die Tangente des Zweiges (t_2, v_2) senkrecht auf l_0 steht und $t_2 = t+\lambda$, $v_2 = t$ ist. Wir finden als:

Satz 10*. — *Der in Satz 10 genannte Zweig giebt in K_2 zwei Zweige $(t+\lambda, t)$ mit im Endlichen ausserhalb P_0 auf l_0 liegenden Ursprüngen und senkrecht auf l_0 stehenden Tangenten.*

§ 11. Nicht-isotroper Zweig mit in O fallendem Ursprung.

Mittelst der im Vorgehenden erläuterten Methode findet man:

Satz 11. — *Ein nicht-isotroper Zweig (t, v) $(t > v)$ mit in O fallendem Ursprung giebt in K_1 einen Zweig $(t-v, v)$ mit demselben Ursprung und der Normalen des ursprünglichen Zweiges als Tangente.*

Satz 11*. — *Der in Satz 11 genannte Zweig giebt in K_2 zwei Zweige $(t-v, v)$ mit P_0 und P_0E*[1]) *als Ursprung und Tangente.*

---

[1]) E ist der unendiche ferne Punkt, dessen Richtung senkrecht auf l_0 steht.

Satz 12. — *Ein nicht-isotroper Zweig* (t, v) $(t < v)$ *mit in O fallendem Ursprung giebt in* K_1 *einen asymptotischen Zweig* $(v - t, t)$ *mit der Normalen des ursprünglichen Zweiges als Asymptote.*

Satz 12*. — *Der in Satz 12 genannte Zweig giebt in* K_2 *zwei asymptotische Zweige* $(v - t, t)$ *mit der Geraden* P_0E *als gemeinsamer Asymptote.*

Satz 13. — *Ein nicht-isotroper Zweig* (t, t) *mit in O fallendem Ursprung, der von seinem Krümmungskreis (der sein Zentrum in einem im Endlichen ausserhalb O liegendem Punkt M hat) in* $2t + \lambda$ $(\lambda < t)$ *zusammenfallenden Punkten geschnitten wird, giebt in* K_1 *einen Zweig* $(\lambda, t - \lambda)$, *der OM berührt in einem Punkt R, der so liegt dass M die Mitte der Strecke OR ist.*

Satz 13*. — *Der in Satz 13 genannte Zweig giebt in* K_2 *zwei Zweige* $(\lambda, t - \lambda)$, *die die Gerade* P_0E *in Punkten S berühren, die so liegen dass* $P_0S = 2\,OM$ *ist.*

Satz 14. — *Ein Zweig, der sich von dem in Satz 13 genannten nur dadurch unterscheidet dass* $\lambda \geqq t$ *ist, giebt in* K_1 *einen OM nicht berührenden Zweig* t^{ter} *Ordnung, dessen Ursprung so auf OM liegt, dass* $OM = MR$ *ist.*

Satz 14*. — *Der in Satz 14 genannte Zweig giebt in* K_2 *zwei* P_0E *nicht berührende Zweige* t^{ter} *Ordnung, deren Ursprünge S derart auf* P_0E *liegen, dass* $P_0S = 2\,OM$ *ist.*

§ 12. Nicht-isotroper Zweig mit auf OI_1 oder OI_2 ausserhalb O liegendem Ursprung.

Seien I_1 und I_2 die Kreispunkte und OI_1 die isotrope Gerade, auf welcher der Ursprung P des Zweiges (t, v) liegt. Um diesen und andere Fälle, wobei eine besondere Lage hinsichtlich der Kreispunkte auftritt, für unsere Betrachtungen leichter zugänglich zu machen, wenden wir auf die ganze Figur eine lineare Transformation an, die die Kreispunkte in zwei im Endlichen liegende Punkte (die wir ebenfalls I_1 und I_2 nennen) transformiert. Hierdurch wird man in die Lage versetzt sich auch diesen Fall durch eine reelle Figur (siehe Fig. 3) anschaulich und klar zu machen. Nur hat man zu bedenken, dass zwei sich senkrecht schneidende Gerade in zwei Gerade übergeführt werden, deren Schnittpunkte mit $I_1 I_2$ harmonisch von I_1 und I_2 getrennt werden.

Sei P' ein Nachbarpunkt von P (die Buchstaben beziehen sich auf die transformierte Figur), so ist PP' sowohl von PI_1

als von PI_2 verschieden. Der mit P' korrespondierende Punkt R' von K_1 wird gefunden als der Schnittpunkt der Geraden $P'R'$, die durch $P'I_1$ und $P'I_2$ harmonisch von der Tangente in P' getrennt wird, mit der Geraden OR', die durch OI_1 und OI_2 harmonisch von OP' getrennt wird. Die Gerade $P'R'$ ist, auch bei der Limes, von OI_1 verschieden, während die Winkel $P'OI_1$ und $R'OI_1$ klein und annähernd einander gleich sind.

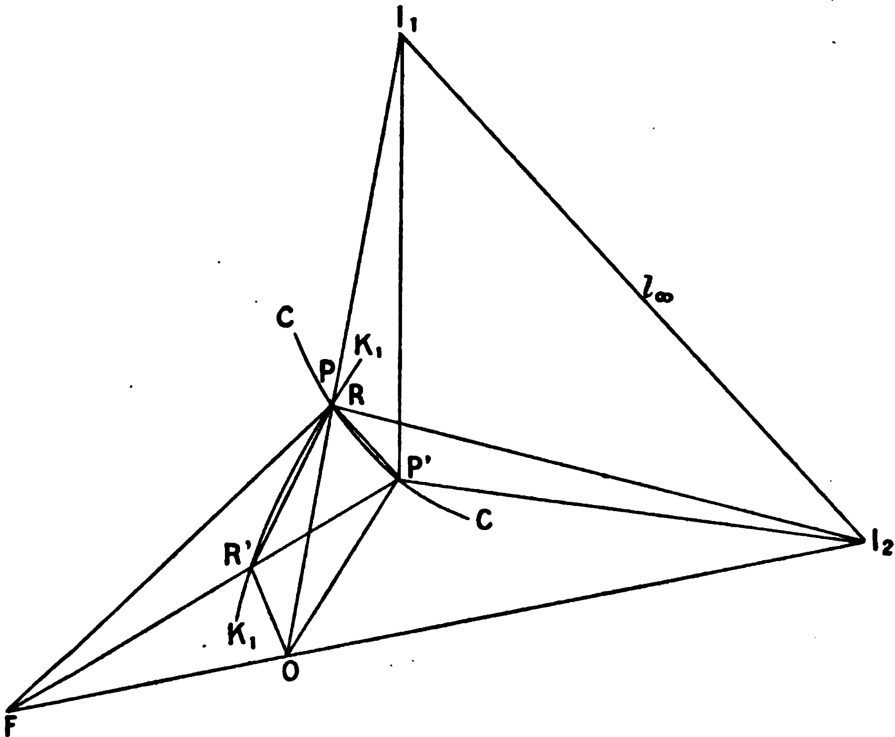


Fig. 3.

Hieraus folgt, dass zugleich mit P' auch R' sich dem Punkt P nähert, sodass der Ursprung R des korrespondierenden Zweiges (t_1, v_1) von K_1 in P fällt. Weiter folgt aus der Konstruktion von OR', dass PP' und PR' harmonisch von PI_1 und PF getrennt werden, wenn F der Schnittpunkt von $P'R'$ und OI_2 ist; bei der Limes werden PP' und PR' die Tangenten in P der Kurven C resp. K_1, während PF zur Geraden wird, die durch PI_1 und PI_2 harmonisch von der Tangente in P der Kurve C getrennt wird.

Für die ursprüngliche Figur heisst dies:

Die Tangenten in P der Kurven C und K_1 werden von PI_1 und der Normalen in P der Kurve C harmonisch getrennt [1].

Die Gerade OP′ schneidet den Zweig (t, v) in t Punkten P′, sodass OR′ den Zweig (t_1, v_1) in t Punkten R′ schneidet. Weil die Limes OP von OP′ keine Tangente des Zweiges (t_1, r_1) ist, findet man $t_1 = t$, also:

Satz 15. — *Ein nicht-isotroper Zweig (t, v) mit ausserhalb O auf einer durch O gehenden isotropen Geraden liegendem Ursprung giebt in K_1 einen nicht-isotropen Zweig t^{ter} Ordnung mit demselben Ursprung.*

Um den korrespondierenden Zweig (oder Zweige) von K_2 zu untersuchen, suchen wir auf welcher Geraden f und auf welcher Geraden h der Punkt P korrespondierende Punkte S hat und wieviele. Der Zweig (t, v) wird von einem Kreise mit Radius Null, der sein Zentrum in O hat, in t zusammenfallenden Punkten P geschnitten; weil jeder Schnittpunkt von C mit solch einem Kreise einen Schnittpunkt von K_2 mit der entsprechenden Geraden f liefert (siehe § 7), so wird K_2 von P_0E in t zusammenfallenden mit P korrespondierenden Punkten S geschnitten. Die Gerade OP schneidet den Zweig (t, v) unter einem Winkel $-$ Bg tg $\sqrt{-1}$, dessen repräsentierende Gerade OI_2 ist (siehe § 5, S. 323), und ist für t durch O gehende bewegliche Gerade zu zählen, die (t, v) unter diesem Winkel schneiden (§ 5, V); weil jeder Fusspunkt einer durch O gehenden die Kurve C unter einem Winkel α schneidenden Geraden zwei Schnittpunkte von K_2 mit der entsprechenden Geraden h (die mit l_0 den Winkel α einschliesst) liefert, so wird K_2 von P_0I_2 in $2t$ mit P korrespondierenden beweglichen Punkten S geschnitten.

Die mit P korrespondierenden Punkte S liegen also sowohl auf P_0E als auf P_0I_2 und fallen daher in P_0 [2]. Weil P_0E t in P_0 fallende Schnittpunkte S und P_0I_2 $2t$ in P_0 fallende bewegliche Schnittpunkte S (das sind Schnittpunkte, die P_0 verlassen wenn man P_0I_2 um P_0 dreht) zeigt, so wird mit (t, v) in K_2 ein Zweig $(t, 2t)$ oder zwei Zweige $(\frac{1}{2}t, t)$ mit P_0 und

---

[1] Dies gilt auch noch dann wenn die Tangente in P von C durch I_1 oder I_2 geht. In beiden Fällen fallen die Tangenten in P von C und K_1 zusammen. In allen andren Fällen ist die Tangente von K_1 von der Tangente von C verschieden und nicht isotrop.

[2] Was auch daraus folgt, dass $P_0Q = PO = 0$ und $QS = OR = 0$ ist.

P_0I_2 als Ursprung und Tangente korrespondieren. Ist t ungerade, so kann nur der erstere Fall eintreten; in § 24 wird gezeigt werden, dass für gerade t immer der letztere Fall eintritt. Man hat also:

Satz 15*. — *Der in Satz 15 genannte Zweig, dessen Ursprung auf* OI_1 (OI_2) *liegt, giebt in* K_2 *einen einzigen Zweig* $(t, 2t)$ *oder zwei Zweige* $(\frac{1}{2}t, t)$ *(je nachdem t ungerade oder gerade ist) mit* P_0 *als Ursprung und* P_0I_2 (P_0I_1) *als Tangente.*

Isotrope Zweige.

§ 13. Isotroper Zweig mit ausserhalb OI_1 und OI_2 liegendem Ursprung.

Um den korrespondierenden Zweig (t_1, v_1) von K_1 zu untersuchen wenden wir, wie in § 12, auf die ganze Figur eine lineare Transformation an, die I_1 und I_2 in zwei im Endlichen liegende Punkte transformiert. Sei wieder P' ein Nachbarpunkt vom Ursprung P des Zweiges (t, v), und R und R' die entsprechenden Punkte von K_1. Ist $\sphericalangle$ POP' [1]) und also auch $\sphericalangle$ ROR' und PP' erster Ordnung, so ist der Winkel der Tangenten in P und P' von der Ordnung $\frac{v}{t}$ (siehe die Note von S 335), und dies ist ebenfalls die Ordnung des Winkels, den PR und P'R' einschliesen. Hieraus folgt, dass die Limes von RR' (d. h. die Tangente des Zweiges (t_1, v_1) in R) für $t > v$ mit RO, für $t < v$ mit RP und für $t = v$ mit keiner dieser beiden Geraden zusammenfällt.

Weil OP den Zweig (t, v) in t Punkten P schneidet, so schneidet OR den Zweig (t_1, v_1) in t Punkten R, sodass $t_1 + v_1 = t$ ist wenn OR Tangente (also $t > v$), und $t_1 = t$ wenn OR keine Tangente (also $t \leq v$) ist.

Da die Abstände des Punktes R' von den Geraden RO und RP 1ster resp. $\frac{v}{t}^{ter}$ Ordnung sind, ist für $t > v$ $\frac{t_1 + v_1}{t_1} = \frac{t}{v}$, also (vermöge $t_1 + v_1 = t$) $t_1 = v$, $v_1 = t - v$; für $t < v$ aber ist $\frac{t_1 + v_1}{t_1} = \frac{v}{t}$, also (da dann $t_1 = t$ ist) $v_1 = v - t$. Mithin finden wir:

---

[1]) Die Buchstaben beziehen sich auf die transformierte Figur; siehe Fig. 4.

Satz 16. — *Ein isotroper Zweig* (t, v) $(t > v)$ *mit ausserhalb* OI_1 *und* OI_2 *liegendem Ursprung giebt in* K_1 *einen nicht-isotropen Zweig* $(v, t-v)$ *mit auf der isotropen Tangente des Zweiges* (t, v) *liegendem Ursprung und durch O gehender Tangente.*

Satz 17. — *Ein isotroper Zweig* (t, v) $(t \leqq v)$ *mit ausserhalb* OI_1 *und* OI_2 *liegendem Ursprung giebt in* K_1 *einen Zweig* t^{ter} *Ordnung mit auf der isotropen Tangente des Zweiges* (t, v) *liegendem Ursprung und nicht durch O gehender Tangente. Für* $t = v$ *ist diese Tangente von der des ursprünglichen Zweiges verschieden; für* $t < v$ *ist es ein Zweig* $(t, v-t)$ *mit derselben isotropen Tangente.*

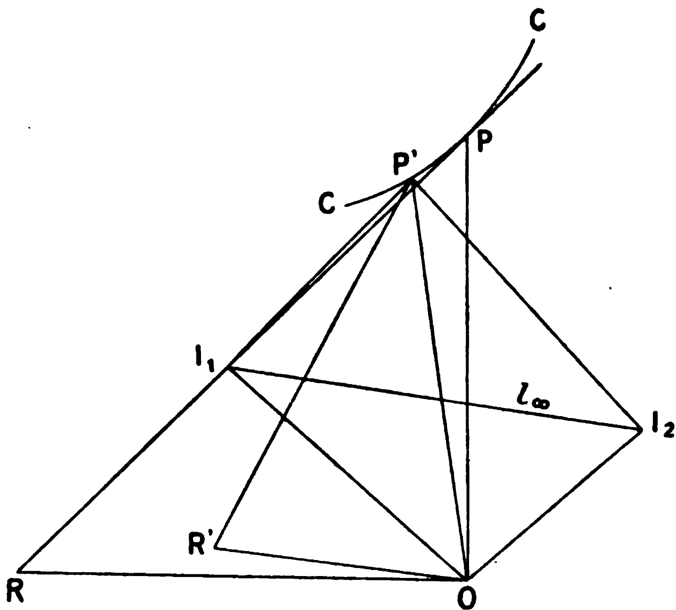


Fig. 4.

Um die korrespondierenden Zweige von K_2 zu untersuchen bemerken wir, dass, weil OP [1]) und also auch QP_0 endlich ist und OP die Kurve C unter einem Winkel Bg tg $\sqrt{-1}$ schneidet, mit P in K_2 zwei verschiedene symmetrisch zu P_0 auf P_0I_1 liegende Punkte S korrespondieren (die Tangente in P wird als durch I_1 gehend vorausgesetzt). Eine durch S gehende senkrecht auf l_0 stehende Gerade f schneidet den Zweig (t_2, v_2)

[1]) Die Buchstaben beziehen sich wieder auf die ursprüngliche Figur.

in t Punkteu S, da ein durch P gehender Kreis, der sein Zentrum in O hat, den Zweig (t, v) in t Punkten P schneidet. Die Gerade P_0S aber schneidet den Zweig (t_2, v_2) in v Punkten S, da OP für v die Kurve C unter einem Winkel Bg tg $\sqrt{-1}$ schneidende Gerade zu zählen ist (§ 5, VI).

Hieraus folgt, dass für $t > v$ die Tangente in S senkrecht auf l_0 steht und $t_2 = v$, $v_2 = t - v$ ist; dass für $t < v$ die Tangente in S durch P_0 geht und $t_2 = t$, $v_2 = v - t$ ist; und dass für $t = v$ die Tangente in S nicht senkrecht auf l_0 steht und nicht durch P_0 geht und $t_2 = t$ ist. Also:

Satz 16*. — *Der in Satz* 16 *genannte Zweig, dessen Tangente durch I_1 geht, giebt in K_2 zwei Zweige $(v, t - v)$ mit im Endlichen ausserhalb P_0 auf $P_0 I_1$ liegenden Ursprüngen und senkrecht auf l_0 stehenden Tangenten.*

Satz 17*. — *Der in Satz* 17 *genannte Zweig, dessen Tangente durch I_1 geht, giebt in K_2 zwei Zweige t^{ter} Ordnung mit im Endlichen ausserhalb P_0 auf $P_0 I_1$ liegenden Ursprüngen und nicht senkrecht auf l_0 stehenden Tangenten Für $t = v$ gehen diese Tangenten nicht durch P_0; für $t < v$ sind es zwei Zweige $(t, v - t)$ mit durch P_0 gehenden Tangenten.*

§ 14. Isotroper Zweig mit auf OI_1 oder OI_2 liegendem Ursprung.

Auf ähnliche Weise wie im Vorhergehenden finden wir:

Satz 18. — *Ein isotroper Zweig (t, v) mit ausserhalb O liegendem Ursprung und durch O gehender Tangente giebt in K_1 einen Zweig (t, v) mit demselben Ursprung und derselben Tangente.*

Satz 18*. — *Der in Satz* 18 *genannte Zweig, dessen Tangente durch I_1 geht, giebt in K_2 einen einzigen Zweig $(t + v, 2t)$ oder zwei Zweige $(\frac{t+v}{2}, t)$ (je nachdem $t + v$ ungerade oder gerade ist) mit P_0 und $P_0 I_2$ als Ursprung und Tangente.*

Satz 19. — *Ein Zweig (t, v) mit auf OI_1 ausserhalb O und I_1 liegendem Ursprung und durch I_2 gehender Tangente giebt in K_1 einen Zweig (t, v) mit demselben Ursprung und derselben Tangente.*

Satz 19*. — *Der in Satz* 19 *genannte Zweig giebt in K_2 einen einzigen Zweig $(t, 2t + 2v)$ oder zwei Zweige $(\frac{1}{2}t, t + v)$ (je nachdem t ungerade oder gerade ist) mit P_0 und $P_0 I_2$ als Ursprung und Tangente.*

Satz 20. — *Ein isotroper Zweig (t, v) mit in O fallendem Ursprung giebt in K_1 einen Zweig (t, v) mit demselben Ursprung und derselben Tangente.*

Satz 20*. — *Der in Satz 20 genannte Zweig giebt in K_2 einen einzigen nicht-isotropen Zweig $2t + v^{\text{ter}}$ Ordnung oder zwei nicht-isotrope Zweige $t + \frac{1}{2} v^{\text{ter}}$ Ordnung (je nachdem v ungerade oder gerade ist) mit in P_0 fallendem Ursprung und nicht senkrecht auf l_0 stehender von l_0 verschiedener Tangente.*

Zweige mit im Unendlichen liegendem Ursprung.

§ 15. Asymptotischer Zweig mit nicht durch O gehender Asymptote.

Nimmt man O als Ursprung und die y-Achse der Asymptote des Zweiges (t, v) parallel, so wird die Puiseux'sche Entwicklung dieses Zweiges:

$$y = a\,(x - b)^{-\frac{t}{v}} + \ldots.$$

Sei P der (im Unendlichen liegende) Ursprung des Zweiges. Dreht man OP um O einen kleinen Winkel erster Ordnung, so löst sich der Schnittpunkt P in t Schnittpunkte P′ auf, während OP′ (und auch die y von P′) von der Ordnung — 1 ist [1]. Weiter ist:

$$\frac{dy}{dx} = -a\,\frac{t}{v}(x - b)^{-\frac{t+v}{v}} = -a^{-\frac{v}{t}}\,\frac{t}{v}\,y^{\frac{t+v}{t}},$$

woraus man sieht, dass die Tangente in P′ mit der Asymptote (und also auch die Normale in P′ mit der Normalen OR auf der Asymptote) einen kleinen Winkel von der Ordnung $\frac{t+v}{t}$ einschliesst. Weil ∢ ROR′ = ∢ POP′ also erster Ordnung ist, gilt dies auch für ∢ OR′P′, sodass OR′ von der Ordnung — 2 ist. Hieraus folgt, dass der Zweig (t_1, v_1) in dem unendlich fernen Punkt R, dessen Richtung senkrecht auf der

---

[1]) Siehe die Note 1 von S. 337.

von P steht, die unenlich ferne Gerade l_∞ berührt und dass $\frac{t_1+v_1}{t_1}=2$ ist [1]). Da OP den Zweig (t, v) in t Punkten P und also OR den Zweig (t_1, v_1) in t Punkten R schneidet, hat man $t_1 = t$ und mithin auch $v_1 = t$, also:

Satz 21. — *Ein asymptotischer Zweig (t, v) mit nicht durch O gehender Asymptote giebt in K_1 einen parabolischen Zweig (t, t), dessen Asymptotenrichtung senkrecht auf der des ursprünglichen Zweiges steht.*

Da $\lim \frac{OR'}{OP'^2} = \lim \frac{Q'S'}{Q'P_0^2}$ endlich ist, so berühren die beiden mit (t, v) korrespondierenden Zweige (t_2, v_2) von K_2 die Gerade l_∞ in dem unendlich fernen Punkt E, dessen Richtung senkrecht auf l_0 steht, und ist $\frac{t_2+v_2}{v_2}=2$. Rückt eine durch E gehende Gerade f ins Unendliche, so nähern sich $2t$ Punkte S′ dem E, weil ein in die doppelte Gerade l_∞ zerfallender Kreis den Zweig (t, v) in $2t$ Punkten P schneidet. Für jeden der beiden Zweige (t_2, v_2) hat man also $v_2 = t$, $t_2 = t$.

Zu demselben Resultate gelangt man indem man die Schnittpunkte mit der Geraden f in Verbindung mit den Schnittpunkten mit einer sich um P_0 drehenden Geraden h betrachtet. Nähert sich h der Geraden P_0E, so rücken $2t$ auf h liegende Punkte S′ ins Unendliche, weil t Fusspunkte durch O gehender die Kurve C unter einem Winkel α schneidender Geraden sich dem P nähern, wenn α zu Null wird (§ 5, VIII), und jeder dieser Fusspunkte zu zwei auf h liegenden Punkten S′ Anlass

---

[1]) Wäre l_∞ keine Tangente des Zweiges (t_1, v_1), so würde OR′ von der Ordnung — 1 sein, wenn die Asymptote des Zweiges (t_1, v_1) nicht, und von der Ordnung $-\frac{t_1}{t_1+v_1} > -1$, wenn diese Asymptote wohl durch O ginge. Die Tangente in R muss also l_∞ sein. Wählt man die y-Achse durch R, so wird die Puiseux'sche Entwicklung des Zweiges (t_1, v_1):

$$y = a x^{\frac{t_1+v_1}{v_1}} + \ldots.$$

Eine Gerade $x = \lambda y$, die mit OR einen kleinen Winkel erster Ordnung einschliesst (sodass auch λ erster Ordnung ist) schneidet den Zweig in t_1 Punkten R′, deren Entfernung von O von der Ordnung $-\frac{t_1+v_1}{t_1}$ ist, woraus folgt: $-\frac{t_1+v_1}{t_1} = -2$.

giebt. Da diese $2t$ Punkte S′ sich über zwei Zweige (t_2, v_2) verteilen und P_0E keine Tangente ist, hat man $t_2 = t$.

Auf beide Weisen finden wir also:

S a t z 21*. — *Der in Satz 21 genannte Zweig giebt in K_2 zwei parabolische Zweige (t, t) mit dem unendlich fernen Punkt E, dessen Richtung senkrecht auf l_0 steht, als gemeinsamem Ursprung.*

§ 16. Zweig mit durch O gehender Asymptote.

Mit demselben Achsensystem wie in § 15 wird die PUISEUX'sche Entwicklung des Zweiges (t, v):

$$y = ax^{-\frac{t}{v}} + \dots .$$

Schneidet man diesen Zweig durch eine Gerade $x = \lambda y$, die einen kleinen Winkel erster Ordnung mit der Asymptote einschliesst, so wird die y der $t + v$ Schnittpunkte P′ (also auch OP′) von der Ordnung $-\frac{t}{t+v}$. Die Richtung der Tangente in P′ wird gefunden aus:

$$\frac{dy}{dx} = -a\frac{t}{v}x^{-\frac{t+v}{v}} = -\frac{t}{v}\frac{y}{x} = -\frac{t}{v}\lambda^{-1}.$$

Die Richtungskoeffizienten der Normalen in P′ und O auf C resp. OP′ sind $\frac{v}{t}\lambda$ und $-\lambda$, sodass beide Normale einen Winkel erster Ordnung einschliessen. Da OP′ von der Ordnung $-\frac{t}{t+v}$ ist, so wird OR′ von der Ordnung $-\frac{t}{t+v} - 1 = -\frac{2t+v}{t+v}$, sodass (weil diese Ordnung < -1 ist) l_∞ Tangente des Zweiges (t_1, v_1) und $\frac{t_1 + v_1}{t_1} = \frac{2t+v}{t+v}$ ist (siehe die Note von S. 349). Der Zweig (t, v) wird von OP in $t + v$ Punkten P, also der Zweig (t_1, v_1) von OR in $t + v$ Punkten R geschnitten, woraus folgt: $t_1 = t + v$, $v_1 = t$. Daher finden wir:

S a t z 22. — *Ein asymptotischer Zweig (t, v) mit durch O gehender Asymptote giebt in K_1 einen parabolischen Zweig $(t + v, t)$, dessen Asymptotenrichtung senkrecht auf der des ursprünglichen Zweiges steht.*

Auf zwei Weise lässt sich, ähnlich wie in § 15, zeigen:

Satz 22*. — *Der in Satz 22 genannte Zweig giebt in K_2 zwei parabolische Zweige $(t+v,\ t)$ mit dem Punkt E als gemeinsamem Ursprung.*

§ 17. Parabolischer Zweig.

Wählen wir die y-Achse durch den unendlich fernen Ursprung des Zweiges $(t,\ v)$, so wird seine PUISEUX'sche Entwicklung:

$$y = ax^{\frac{t+v}{v}} + \ldots,$$

woraus sich mittelst der in den beiden vorigen Paragraphen entwickelten Methode leicht zeigen lässt:

Satz 23. — *Ein parabolischer Zweig $(t,\ v)$ giebt in K_1 einen parabolischen Zweig $(t,\ t+v)$, dessen Asymptotenrichtung senkrecht auf der des ursprünglichen Zweiges steht.*

Satz 23*. — *Der in Satz 23 genannte Zweig giebt in K_2 zwei parabolische Zweige $(t,\ t+v)$ mit dem Punkt E als gemeinsamem Ursprung.*

§ 18. Zirkulärer Zweig mit nicht durch O gehender Asymptote.

Man sieht sofort, dass der Ursprung I_1 des zirkulären Zweiges $(t,\ v)$ auch Ursprung des korrespondierenden Zweiges $(t_1,\ v_1)$ von K_1 ist, weil die Normale von C in I_1 mit der Tangente in I_1 zusammenfällt [1]) und die Normale in O auf OI_1 die Gerade OI_1 sebst ist, die die erstgenannte Normale in I_1 schneidet.

Sei P' ein Nachbarpunkt von I_1 und I_1P', also auch $\sphericalangle\ I_1OP'$, erster Ordnung (dies bezieht sich auf die linear transformierte Figur; siehe Fig. 5). Dann ist auch $\sphericalangle\ I_1OR'$ und daher auch I_1R' erster Ordnung, sodass $\sphericalangle\ I_1P'R'$ und $\sphericalangle\ I_1R'P'$ gleicher Ordnung sind. Weil $\sphericalangle\ I_1P'R'$ unendlich klein ist, so ist auch $\sphericalangle\ I_1R'P'$ unendlich klein, d. h. bei der Limes fällt I_1R' auf

---

[1]) Diese Tangente ist nämlich zugleich Tangente des korrespondierenden Zweiges der Evolute (siehe § 4, VIII, IX und X).

die Verlängerung von I_1P', sodass die Zweige (t, v) und (t_1, v_1) in I_1 dieselbe Tangente haben.

Da man wieder leicht findet, dass OI_1 den Zweig (t_1, v_1) in t Punkten I_1 schneidet, ist $t_1 = t$. Nennen wir α den Winkel, den I_1P' mit der Tangente in I_1 einschliesst, so ist der Winkel, den I_1P' mit der Tangente in P' bildet, annähernd $\frac{v}{t}\alpha$. Der Winkel $I_1P'R'$ ist also auch $\frac{v}{t}\alpha$ und (da I_1P' und I_1R' annähernd einander gleich sind) ebenfalls der Winkel $I_1R'P'$. Hieraus folgt, dass der Winkel, den I_1R' mit der Tangente in I_1 bildet, gleich $\frac{t-2v}{t}\alpha$ ist. Daher sind die Winkel, die I_1P' und I_1R' mit der Tangente in I_1 einschliessen, für $t \neq 2v$ gleicher Ordnung, während für $t = 2v$ der letztere Winkel höherer Ordnung ist, woraus weiter folgt, dass für $t \neq 2v$ $v_1 = v$ ist, für $t = 2v$ aber $v_1 > v$. Mithin finden wir:

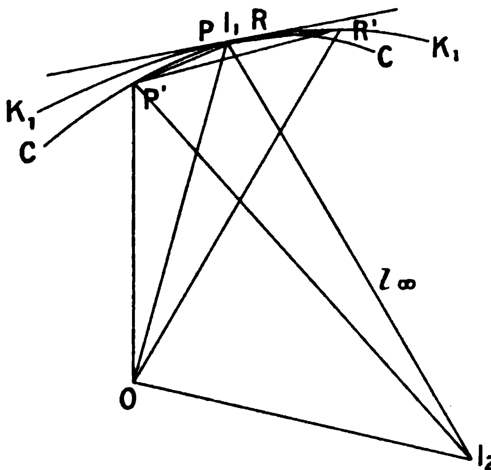


Fig. 5.

S a t z 24. — *Ein zirkulärer Zweig (t, v) mit nicht durch O gehender Asymptote giebt in K_1 einen Zweig t^{ter} Ordnung mit demselben Ursprung und derselben Tangente. Die Klasse des Zweiges von K_1 ist $= v$ oder $> v$, je nachdem $t \neq 2v$ oder $t = 2v$ ist.*

Nehmen wir für einen Augenblick an, dass mit dem Zweig (t, v) nur ein Zweig (t_2, v_2) von K_2 korrespondiert. Eine ins Unendliche rückende senkrecht auf l_0 stehende Gerade f schneidet den Zweig (t_2, v_2) in t beweglichen Punkten S', da ein Kreis mit O als Zentrum und unendlich werdendem Radius den Zweig (t, v) in t beweglichen Punkten P' schneidet [1]).

[1]) Die Buchstaben beziehen sich wieder auf die ursprüngliche Figur.

Ferner wird der Zweig (t_2, v_2) von P_0I_1 in $2v$ Punkten S geschnitten, da diese Schnittpunkte aus den beweglichen Fusspunkten der durch O gehenden die Kurve C unter einem Winkel Bg tg $\sqrt{-1}$ schneidenden Geraden entstehen; v dieser Fusspunkte gehören dem Zweig (t, v) an (§ 5, II) und diese geben $2v$ dem Zweig (t_2, v_2) angehörige Schnittpunkte mit P_0I_1.

Hieraus folgt, dass I_1 Ursprung des Zweiges (t_2, v_2) ist, da dieser Zweig sowohl von l_∞ als von P_0I_1 geschnitten wird. Weil die Anzahl der in I_1 fallenden Schnittpunkte t resp $2v$ beträgt, ist für $t > 2v$ l_∞ Tangente und $t_2 = 2v$, $v_2 = t - 2v$, während für $t < 2v$ P_0I_1 Tangente und $t_2 = t$, $v_2 = 2v - t$ ist.

Hieraus sieht man, dass die Annahme, dass mit dem Zweig (t, v) nur ein Zweig von K_2 korrespondiert, immer dann zutreffen muss wenn t ungerade ist, während in § 24 gezeigt werden wird, dass diese Annahme *nur* dann zutrifft, und dass also für gerade t mit dem Zweig (t, v) zwei Zweige $(v, \frac{1}{2}t - v)$ bezw. $(\frac{1}{2}t, v - \frac{1}{2}t)$ korrespondieren. Für $t = 2v$ liefert der Zweig (t, v) in K_2 zwei Zweige v^{ter} Ordnung mit I_1 als Ursprung und symmetrisch zu P_0 liegenden von l_∞ und P_0I_1 verschiedenen Tangenten.

Wir finden also:

Satz 24*. — *Der in Satz 24 genannte Zweig, der seinen Ursprung in I_1 hat, giebt in K_2:*

a. *für $t < 2v$ einen einzigen Zweig $(t, 2v - t)$ oder zwei Zweige $(\frac{1}{2}t, v - \frac{1}{2}t)$ (je nachdem t ungerade oder gerade ist) mit I_1 als Ursprung und P_0I_1 als Tangente;*

b. *für $t > 2v$ einen einzigen Zweig $(2v, t - 2v)$ oder zwei Zweige $(v, \frac{1}{2}t - v)$ (je nachdem t ungerade oder gerade ist) mit I_1 als Ursprung und l_∞ als Tangente;*

c. *für $t = 2v$ zwei Zweige v^{ter} Ordnung mit I_1 als Ursprung und von l_∞ und P_0I_1 verschiedenen Tangenten.*

DRITTER ABSCHNITT.

Plücker'sche Charaktere der Kurve K_1.

§ 19. Ordnung n_1 von K_1.

Auf zwei Weisen lässt sich die Ordnung n_1 der festen Polarkurve K_1 leicht bestimmen, nämlich mittelst der Schnittpunkte mit einer beliebigen durch O gehenden Geraden m und mittelst der Schnittpunkte mit l_∞.

Eine durch O gehende Gerade schneidet K_1 in $n - T$ beweglichen Punkten (Satz 1), sodass zur Bestimmung von n_1 noch die Ordnung T_1 von O als Punkt von K_1 gefunden werden muss. Zweige von K_1, die ihren Ursprung in O haben, können nur aus Zweigen von C mit durch O gehender Ursprungsnormalen entstehen; die Sätze des vorigen Abschnittes zu Rate ziehend findet man, dass hierbei nur die in den Sätzen 8, 9, 10, 11 und 20 genannten Zweige von C in Betracht kommen. Vermöge dieser Sätze findet man für die Ordnung T_1 von O als Punkt von K_1:

$$T_1 = \Sigma_8 v + \Sigma_9 t + \Sigma_{10}(t + \lambda) + \Sigma_{11}(t - v) + \Sigma_{20} t.$$

Hierin bedeutet z. B. $\Sigma_8 v$ die Summe der Klassen aller in Satz 8 genannten Zweige von C.

Diesen und derartige Ausdrücke werden wir immer so umzuformen suchen, dass keine Summierungen stehen bleiben, die auch in dem allgemeinen Fall (dass C keine Punktsingularitäten und keine besondere Lage hinsichtlich des Unendlichen und des Punktes O hat) auftreten. In dem allgemeinen Fall tritt aber in dem Ausdruck für T_1 nur das zweite Glied auf, das dann der Klasse der Evolute gleich ist.

Vermöge der in § 4 genannten Eigenschaften beträgt die Klasse der Evolute $k + n - \varepsilon - \sigma$. Vergleicht man diese Anzahl mit der der durch O gehenden Tangenten der Evolute, mit ihrer mittelst des STOLZ—SMITH—HALPHEN'schen Satzes bestimmten Multiplizität in Rechnung gezogen, so findet man:

$$k + n - \varepsilon - \sigma = \Sigma_8 v + \Sigma_9 t + \Sigma_{10}(t + \lambda) + \Sigma_{11} t + \Sigma_{12} t + \\ + \Sigma_{13} t + \Sigma_{14} t + \Sigma_{18} v + \Sigma_{20}(t + v).$$

Nun ist die Ordnung von O als Punkt von C:

$$T = \Sigma_{11} t + \Sigma_{12} t + \Sigma_{13} t + \Sigma_{14} t + \Sigma_{20} t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

und die Summe der Klassen von OI_1 und OI_2 als Tangenten von C:

$$V = \Sigma_{18} v + \Sigma_{20} v, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

sodass wir finden:

$$N = k + n - \varepsilon - \sigma - T - V = \Sigma_8 v + \Sigma_9 t + \Sigma_{10}(t + \lambda) \quad . \quad 8)$$

Hierin ist N die Anzahl der durch O gehenden nicht-isotropen Normalen von C mit ausserhalb O liegenden Fusspunkten (siehe § 4).

Für die Ordnung von O als Punkt von K_1 findet man also:

$$T_1 = k + n - \varepsilon - \sigma - T + T'' - V = N + T''; \quad . \quad 9)$$

hierin ist $T'' = \Sigma_{11}(t - v) + \Sigma_{20} t$ vermöge § 4 die Summe der Ordnungen derjenigen Zweige der Evolute von C, die ihren Ursprung in O haben und aus Zweigen von C entstehen, die ebenfalls ihren Ursprung in O haben.

Die Ordnung n_1 der Kurve K_1 wird daher:

$$n_1 = k + 2n - \varepsilon - \sigma - 2T + T'' - V = N + T'' + n - T. \; 10)$$

Also finden wir:

Satz 25. — *Die feste Polarkurve K_1 ist von der Ordnung*

$$N + T'' + n - T$$

mit einem $(N + T'')$-fachen Punkt in O. Ihre Tangenten in O sind die

$$N = k + n - \varepsilon - \sigma - T - V$$

durch O gehenden nicht-isotropen Normalen von C mit ausserhalb O liegendem Fusspunkt und die

$$T'' = \Sigma_{11}(t - v) + \Sigma_{20} t$$

Normalen mit in O liegendem Fusspunkt und Krümmungszentrum, jede dieser letztgenannten Normalen mit einer Multiplizität gleich der Ordnung des zugehörigen Zweiges der Evolute von C in Rechnung gezogen; d. h. T'' ist die Summe der Ordnungen derjenigen Zweige der Evolute von C, die ihren Ursprung in O haben und aus ebenfalls ihren Ursprung in O habenden Zweigen von C entstehen [1]).

Die Ordnung n_1 von K_1 lässt sich auch aus den Schnittpunkten mit l_∞ leicht bestimmen. Unendlich ferne Punkte von K_1 können nur aus den in den Sätzen 7, 12, 21, 22, 23 und 24 genannten Zweigen von C entstehen. Diese Sätze zu Rate ziehend findet man:

$$n_1 = \Sigma_7 v + \Sigma_{12}(v - t) + \Sigma_{21} 2t + \Sigma_{22}(2t + v) + \Sigma_{23}(2t + v) + \Sigma_{24} t.$$

---

[1]) Dieser Satz ist allgemeingültig (d. h. auch wenn C zirkuläre Zweige mit durch O gehenden Asymptoten und zirkulär-parabolische Zweige hat), wenn man nur unter T'' auch die Ordnungen derjenigen Zweige der Evolute mitzählt, die ihren Ursprung in O haben und aus zirkulären Zweigen von C entstehen. Solch ein zirkulärer Zweig muss dann ein in § 4, X genannter Zweig sein, der sein Krümmungszentrum in O hat). Die *Bedeutung* von N bleibt dieselbe, der *Ausdruck* $k + n - \varepsilon - \sigma - T - V$ für N aber muss noch um $\mu - 2t$ verkleinert werden für jeden zirkulären Zweig (t, t) von C mit durch O gehender Asymptote, der von seinem oskulierenden Kreis mit O als Zentrum in μ zusammenfallenden Punkten geschnitten wird.

Nun folgt aus den Schnittpunkten von C mit l_∞:

$$n = \Sigma_{21} t + \Sigma_{22} t + \Sigma_{23}(t + v) + \Sigma_{24} t,$$

oder, weil $\Sigma_{23}\, v = \sigma$ und $\Sigma_{24} t = \varepsilon$ ist:

$$n - \varepsilon - \sigma = \Sigma_{21} t + \Sigma_{22} t + \Sigma_{23} t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11)$$

während aus den durch O gehenden Tangenten von C folgt:

$$k = \Sigma_7 v + \Sigma_{11}(t+v) + \Sigma_{12}(t+v) + \Sigma_{13} 2t + \Sigma_{14} 2t + \Sigma_{18} v + \Sigma_{20}(t+v) + \Sigma_{22} v,$$

oder vermöge (6) und (7):

$$k - T - V = \Sigma_7 v + \Sigma_{11} v + \Sigma_{12} v + \Sigma_{13} t + \Sigma_{14} t + \Sigma_{22} v \quad . \quad 12)$$

Vermöge der Beziehungen (6), (11) und (12) findet man also für n_1:

$$n_1 = k + 2n - \varepsilon - \sigma - 2T - V + \Sigma_{11}(t - v) + \Sigma_{20} t,$$

wie wir auch oben fanden.

Weiter hat man noch:

Die Ordnung eines jeden der Kreispunkte als Punkte von K_1 *ist dieselbe als die Ordnung dieser Punkte als Punkte von C, d. h.:*

$$\varepsilon_1 = \varepsilon\ ^{1)}.$$

§ 20. Klasse k_1 der Kurve K_1.

Die Klasse k_1 der Kurve K_1 wird aus ihren durch O gehenden Tangenten gefunden. Weil O ein mehrfacher Punkt von K_1 ist, so ist dieser Punkt vermöge der Sätze 8, 9, 10, 11 und 20 für

$$\Sigma_8 (v + t) + \Sigma_9 2t + \Sigma_{10}(2t + \lambda) + \Sigma_{11} t + \Sigma_{20}(t + v)$$

Berührungspunkte durch O gehender Tangenten zu zählen [2]. Die Anzahl der ausserhalb O liegenden Berührungspunkte (die

---

[1]) Dies ist nicht mehr der Fall wenn C zirkuläre Zweige (t, t) mit durch O gehenden Asymptoten hat. Wird solch ein Zweig von seinem oskulierenden Kreis mit O als Zentrum in μ zusammenfallenden Punkten geschnitten, so kommt der Ursprung des korrespondierenden Zweiges von K_1 im Endlichen zu liegen wenn $\mu \geqq 3t$ ist, während für $\mu < 3t$ in K_1 ein Zweig $(3t - \mu, \mu - t)$ mit demselben Ursprung und derselben Asymptote entsteht.

[2]) Ist O Ursprung eines Zweiges (t_1, v_1) von K_1, so zählt dieser Ursprung vermöge des in § 2 besprochenen Satzes van Stolz, Halphen und Stephen Smith für $t_1 + v_1$ der k_1 Berührungspunkte der durch O gehenden Tangenten.

aus den in den Sätzen 5, 7, 12, 13, 16 und 18 genannten Zweigen von C entstehen) beträgt:

$$\Sigma_5 (t - v) + \Sigma_7 t + \Sigma_{12} t + \Sigma_{13} (t - \lambda) + \Sigma_{16} (t - v) + \Sigma_{18} v$$ [1].

Die Klasse von K_1 wird daher:

$$k_1 = \Sigma_5 (t - v) + \Sigma_7 t + \Sigma_8 (t + v) + \Sigma_9 2t + \Sigma_{10} (2t + \lambda) +$$
$$+ \Sigma_{11} t + \Sigma_{12} t + \Sigma_{13} (t - \lambda) + \Sigma_{16} (t - v) + \Sigma_{18} v + \Sigma_{20} (t + v).$$

Diesen Ausdruck formen wir wieder so um, dass nur Summierungen stehen bleiben, die im allgemeinen Null sind. Nun treten im algemeinen nur das zweite Glied (das dann den Wert k hat) und das vierte Glied (mit dem Wert $2k + 2n$) auf, sodass wir dazu geführt werden den Ausdruck für k_1 mit dem für $3k + 2n$ zu vergleichen. Mittelst der Gleichungen (8) und (12) findet man dann:

$$k_1 = 3k + 2n - 2\varepsilon - 2\sigma - 3T - 2V + \Sigma_5(t - v) + \Sigma_7(t - v) +$$
$$+ \Sigma_8 (t - v) - \Sigma_{10}\lambda + \Sigma_{11} (t - v) + \Sigma_{12} (t - v) - \Sigma_{13}\lambda - \Sigma_{14} t +$$
$$+ \Sigma_{16} (t - v) + \Sigma_{20} t - \Sigma_{22} v.$$

Nun ist vermöge der in § 4 genannten Sätze die Ordnung T' von O als Punkt der Evolute von C

$$T' = \Sigma_{10}\lambda + \Sigma_{11} (t - v) + \Sigma_{20} t = \Sigma_{10}\lambda + T''.$$

Weiter werden wir $\Sigma_{22} v$, die Summe der Klassen der asymptotischen Zweige mit durch O gehenden Asymptoten, W nennen, wodurch der Ausdruck für k_1 übergeht in:

$$k_1 = 3k + 2n - 2\varepsilon - 2\sigma - 3T - T' + 2T'' - 2V - W + \Sigma_5(t - v) + \Sigma_7(t - v) +$$
$$+ \Sigma_8(t - v) + \Sigma_{12}(t - v) - \Sigma_{13}\lambda - \Sigma_{14} t + \Sigma_{16}(t - v).$$

Um diesen Ausdruck weiter umzuformen, benutzen wir die von HALPHEN [2]) eingeführten, einander dual gegenüberstehenden

---

[1]) Liegt O auf der Tangente aber nicht im Ursprung des Zweiges (t_1, v_1) von K_1, so zählt der Ursprung vermöge des STOLZ–SMITH–HALPHEN'schen Satzes für v_1 Berührungspunkte durch O gehender Tangenten.

[2]) Sur la recherche des points d'une courbe algébrique plane, qui satisfont à une condition exprimée par une équation différentielle algébrique, et sur les questions analogues dans l'espace, *Journal de Liouville* (3) t. 2 (1876), p. 257—290, 371—409 (spez. p. 275).

Begriffe „*effektive Spitzen*" und „*effektive Inflektionen*", die folgendermassen definiert werden:

Die effektiven Spitzen sind die Ursprünge der Zweige, für welche die Ordnung t grösser als die Klasse v ist; solch ein Ursprung ist für $t-v$ effektive Spitzen zu rechnen.

Die effektiven Inflektionen sind die Ursprünge der Zweige, für welche $v > t$ ist; solch ein Ursprung ist für $v-t$ effektive Inflektionen zu rechnen.

Für eine Kurve mit nur PLÜCKER'schen Singularitäten ist die Anzahl der effektiven Spitzen gleich der der Spitzen, die Anzahl der effektiven Inflektionen gleich der der Inflektionen.

Die Glieder $\Sigma_5(t-v)$, $\Sigma_8(t-v)$ und $\Sigma_{16}(t-v)$ beziehen sich auf Zweige, für welche $t > v$ ist, und sind also Anzahlen effektiver Spitzen. Das Glied $\Sigma_7(t-v)$ aber bezieht sich auf Zweige mit durch O gehenden nicht isotropen Tangenten, sowohl für $t > v$ als für $t < v$. Für dieses Glied schreiben wir $\Sigma'_7(t-v) - \Sigma''_7(v-t)$, wo Σ'_7 sich auf Zweige bezieht, für welche $t > v$ ist, Σ''_7 auf Zweige, für welche $t < v$ ist. Nun ist aber

$$\Sigma_5(t-v) + \Sigma'_7(t-v) + \Sigma_8(t-v) + \Sigma_{16}(t-v)$$

die Anzahl der ausserhalb OI_1, OI_2 und l liegenden effektiven Spitzen von C, welche Anzahl wir κ' nennen. Weiter ist $\Sigma''_7(v-t) + \Sigma_{12}(v-t)$ die Anzahl der im Endlichen liegenden effektiven Inflektionen mit durch O gehenden nicht-isotropen Tangenten (mit Inbegriff des Falles, dass O Ursprung der Inflektion ist); diese Anzahl nennen wir ζ. Schreiben wir schliesslich η für $\Sigma_{13}\lambda + \Sigma_{14}t$, so finden wir:

S a t z 26. — *Die Klasse k_1 der Kurve K_1 ist gleich:*

$$k_1 = 3k + 2n + \kappa' - 2\varepsilon - 2\sigma - 3T - T' + 2T'' - 2V - W - \zeta - \eta\,. \quad 13)$$

Hierin ist T' die Ordnung von O als Punkt der Evolute von C, W die Summe der Klassen aller asymptotischen Zweige von C mit durch O gehenden Asymptoten, κ' die Anzahl ihrer ausserhalb OI_1, OI_2 und l_∞ liegenden effektiven Spitzen, ζ die Anzahl ihrer im Endlichen liegenden effektiven Inflektionen mit durch O gehenden nicht-isotropen Tangenten und η eine Abkürzung für $\Sigma_{13}\lambda + \Sigma_{14}t$.

Weiter sieht man aus den Sätzen des vorigen Abschnittes sofort:

Die Klasse σ_1 von l_∞ als Tangente von K_1 ist:

$$\sigma_1 = n - \varepsilon \qquad (\textit{allgemeingültig}).$$

Die Klassen von OI_1 und OI_2 als Tangenten von K_1 sind gleich den Klassen dieser Geraden als Tangenten von C, also:

$$V_1 = V.$$

§ 21. Spitzen und übrige Singularitäten von K_1.

Die Anzahl κ_1 der Spitzen, denen die Singularitäten von K_1 äquivalent zu setzen sind (siehe § 3), wird gefunden indem man $t_1 - 1$ für alle Zweige von K_1 summiert. Sind die Singularitäten von C κ Spitzen äquivalent, so ist vermöge der Sätze des vorigen Abschnittes:

$$\kappa_1 = \kappa + \Sigma_5(v - t) + \Sigma_7(v - t) + \Sigma_8(v - t) + \Sigma_{10}\lambda - \Sigma_{11}v + \\ + \Sigma_{12}(v - 2t) + \Sigma_{13}(\lambda - t) + \Sigma_{16}(v - t) + \Sigma_{22}v,$$

oder mit den Bezeichnungen des vorigen Paragraphen:

Satz 27. — *Die Anzahl κ_1 der Spitzen, denen die Singularitäten von K_1 äquivalent sind, ist:*

$$\kappa_1 = \kappa - \kappa' - T + T' + W + \zeta + \eta, \quad . \quad . \quad . \quad 14)$$

worin κ die Anzahl der Spitzen ist, denen die Singularitäten von C äquivalent sind.

Das Geschlecht g_1 der Kurve K_1 ist vermöge (4):

$$g_1 = \tfrac{1}{2}(k_1 + \kappa_1) - n_1 + 1,$$

oder wenn man auf die Gleichungen (10), (13) und (14) achtet:

$$g_1 = \tfrac{1}{2}(k + \kappa) - n + 1 = g,$$

eine Tatsache, die aus der ein-eindeutigen Korrespondenz der beiden Kurven C und K_1 vorherzusehen war.

Weiter findet man mittelst der Plücker'schen Gleichungen (1), (2) und (3) für die Anzahlen ι_1, δ_1 und τ_1 der Inflektionen, Doppelpunkte und Doppeltangenten, denen die Singularitäten von K_1 äquivalent sind:

$$\iota_1 = 6k + \kappa + 2\kappa' - 3\varepsilon - 3\sigma - 4T - 2T' + 3T'' - 3V - 2W - 2\zeta - 2\eta, \quad . \quad 15)$$

$$2\delta_1 = (k + 2n - \varepsilon - \sigma - 2T + T'' - V)^2 - 4k - 4n - 3\kappa + 2\kappa' + \\ + 3\varepsilon + 3\sigma + 8T - 2T' - 3T'' + 3V - 2W - 2\zeta - 2\eta, \quad . \quad 16)$$

$$2\tau_1 = (3k + 2n + \kappa' - 2\varepsilon - 2\sigma - 3T - T' + 2T'' - 2V - W - \\ - \zeta - \eta)^2 - 22k - 4n - 3\kappa - 7\kappa' + 12\varepsilon + 12\sigma + 17T + \\ + 7T' - 12T'' + 12V + 7W + 7\zeta + 7\eta \quad . \quad . \quad 17)$$

VIERTER ABSCHNITT.

Plücker'sche Charaktere der Kurve K_2.

§ 22. Ordnung n_2 von K_2.

Auf drei Weisen lässt sich die Ordnung der beweglichen Polarkurve leicht bestimmen, nämlich 1°. mittelst der Schnittpunkte mit einer senkrecht auf l_0 stehenden Geraden, 2°. mittelst einer durch P_0 gehenden Geraden, 3°. mittelst l_∞.

Vermöge des Satzes 3 schneidet eine bewegliche senkrecht auf l_0 stehende Gerade f die Kurve K_2 in $2n - \varepsilon$ beweglichen Punkten. Der im Unendlichen liegende gemeinsame Punkt E aller Geraden f ist aber ein mehrfacher Punkt von K_2, sodass man zu $2n - \varepsilon$ noch die Ordnung von E als Punkt von K_2 zu addieren hat um die Ordnung n_2 von K_2 zu finden. Die Sätze des zweiten Abschnittes zu Rate ziehend findet man, dass nur mit den in den Sätzen 7, 12, 21, 22 und 23 [1]) genannten Zweigen von C Zweige von K_2 korrespondieren, die ihren Ursprung in E haben, und zwar giebt jeder dieser Zweige von C zwei durch E gehende Zweige von K_2. Für die Ordnung T_2 von E als Punkt von K_2 finden wir also:

$$T_2 = 2\Sigma_7 v + 2\Sigma_{12}(v - t) + 2\Sigma_{21} t + 2\Sigma_{22}(t + v) + 2\Sigma_{23} t,$$

oder vermöge der Gleichungen (6), (11) und (12):

$$T_2 = 2k + 2n - 2\varepsilon - 2\sigma - 4T + 2T'' - 2V, \quad . \quad (18)$$

worin T'' die in Satz 25 angegebene Bedeutung hat.

Für die Ordnung von K_2 findet man also:

$$n_2 = 2k + 4n - 3\varepsilon - 2\sigma - 4T + 2T'' - 2V = 2n_1 - \varepsilon \,. \quad (19)$$

Diese Ordnung kann auch bestimmt werden aus den Schnittpunkten mit einer beweglichen durch P_0 gehenden Geraden h. Die Anzahl der beweglichen Schnittpunkte ist vermöge des Satzes 4 gleich $2(k + n - \varepsilon - \sigma - T - V)$; dazu fügt sich noch die Ordnung T'_2 von P_0 als Punkt von K_2. Nun entstehen die Zweige von K_2, die ihren Ursprung in P_0 haben,

---

1) Die gleich nummerierten aber mit * gezeichneten Sätze beschreiben die korrespondierenden Zweigen van K_2.

nur aus den in den Sätzen 11, 15, 18, 19 und 20 genannten Zweigen von C. Vermöge der gleich nummerierten aber mit * gezeichneten Sätzen hat man also:

$$T'_2 = \Sigma_{11} 2(t - v) + \Sigma_{15} t + \Sigma_{18} (t + v) + \Sigma_{19} t + \Sigma_{20} (2t + v)$$ [1].

Weil die Anzahl der im Endlichen liegenden Schnittpunkte von C mit den beiden durch O gehenden isotropen Geraden $2n - \varepsilon$ beträgt, hat man:

$$2n - \varepsilon = 2T + \Sigma_{15} t + \Sigma_{18}(t + v) + \Sigma_{19} t + \Sigma_{20} v, \quad . \quad (20)$$

also

$$T'_2 = 2n - \varepsilon - 2T + 2\Sigma_{11}(t - v) + 2\Sigma_{20} t,$$

oder

$$T'_2 = 2n - \varepsilon - 2T + 2T''. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Hieraus findet man für n_2:

$$n_2 = 2(k + n - \varepsilon - \sigma - T - V) + 2n - \varepsilon - 2T + 2T'',$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung (19).

Drittens kann n_2 aus den Schnittpunkten mit l_∞ bestimmt werden. Man findet so

$$n_2 = 2\Sigma_7 v + 2\Sigma_{12}(v - t) + 4\Sigma_{21} t + 2\Sigma_{22}(2t + v) + 2\Sigma_{23}(2t + v) + \Sigma_{24} t,$$

was man wieder leicht zu (19) umformt.

Wie finden also:

Satz 28. — *Die bewegliche Polarkurve K_2 ist von der Ordnung*

$$n_2 = 2k + 4n - 3\varepsilon - 2\sigma - 4T + 2T'' - 2V = 2n_1 - \varepsilon$$

mit einem

$$T_2 = 2k + 2n - 2\varepsilon - 2\sigma - 4T + 2T'' - 2V = 2T_1 - 2T\text{-}$$

fachen Punkt in dem unendlich fernen Punkt E, dessen Richtung senkrecht auf l_0 steht, und einem

$$T'_2 = 2n - \varepsilon - 2T + 2T''\text{-}$$

fachen Punkt in P_0. Ihre Schnittpunkte mit l_∞ sind nur der Punkt E, der für $2n_1 - 2\varepsilon$ Schnittpunkte zählt, und die Kreispunkte, deren jeder für ebensoviele Schnittpunkte mit l_∞ zählt als seine Ordnung als Punkt von C beträgt.

---

[1]) Hierbei ist es offenbar einerlei ob die in den Sätzen 15, 18, 19 und 20 genannten Zweige von C zu einem oder zu zwei Zweigen von K_2 Anlass geben.

Vermöge des Satzes 24* findet man:

Die Summe der Ordnungen der Kreispunkte als Punkte von K_2 ist gleich

$$\varepsilon_2 = \varepsilon - \rho,$$

worin ρ eine Abkürzung für $\Sigma_{24b}(t - 2v)$ ist.

§ 23. Klasse k_2 von K_2.

Die Klasse k_2 der Kurve K_2 wird bestimmt aus ihren senkrecht auf l_0 stehenden (oder durch den unendlich fernen Punkt E gehenden) Tangenten. Weil E selbst ein T_2-facher Punkt von K_2 ist, fallen vermöge der Sätze 7*, 12*, 21*, 22* und 23* von den k_2 Berührungspunkten

$$2\Sigma_7(v+t) + 2\Sigma_{12}v + 4\Sigma_{21}t + 2\Sigma_{22}(2t+v) + 2\Sigma_{23}(2t+v)$$

in E; vermöge (11) und (12) wird diese Anzahl:

$$4k + 4n - 4\varepsilon - 2\sigma - 4T - 4V - 2W + 2\Sigma_7(t-v) -$$
$$- 4\Sigma_{11}v - 2\Sigma_{12}v - 4\Sigma_{13}t - 4\Sigma_{14}t.$$

Die Zweige von K_2, die einen ausserhalb E liegenden Ursprung und eine durch E gehende Tangente haben, sind die in den Sätzen 5*, 8*, 9*, 10*, 11*, 13*, 16* und 24*b genannten, sodass die Anzahl der ausserhalb E liegenden Berührungspunkte der durch E gehenden Tangenten von K_2

$$2\Sigma_5(t-v) + 2\Sigma_8 t + 2\Sigma_9 t + 2\Sigma_{10}t + 2\Sigma_{11}v + 2\Sigma_{13}(t-\lambda) +$$
$$+ 2\Sigma_{16}(t-v) + \Sigma_{24b}(t-2v)\ ^{1})$$

beträgt, oder vermöge (8):

$$2k + 2n - 2\varepsilon - 2\sigma - 2T - 2V + 2\Sigma_5(t-v) + 2\Sigma_8(t-v) - 2\Sigma_{10}\lambda + 2\Sigma_{11}v +$$
$$+ 2\Sigma_{13}(t-\lambda) + 2\Sigma_{16}(t-v) + \Sigma_{24b}(t-2v).$$

Für die Gesamtzahl der Berührungspunkte oder die Klasse k_2 von K_2 findet man daher:

$$k_2 = 6k + 6n - 6\varepsilon - 4\sigma - 6T - 6V - 2W + 2\Sigma_5(t-v) + 2\Sigma_7(t-v) +$$
$$+ 2\Sigma_8(t-v) - 2\Sigma_{10}\lambda - 2\Sigma_{11}v - 2\Sigma_{12}v - 2\Sigma_{13}(t+\lambda) - 4\Sigma_{14}t +$$
$$+ 2\Sigma_{16}(t-v) + \Sigma_{24b}(t-2v).$$

---

[1]) Hierbei ist es wieder einerlei ob aus dem in Satz 24*b genannten Zweig von C ein einziger oder zwei Zweige von K_2 entstehen.

Wenn wir wie in § 20

$$\Sigma_5(t-v)+\Sigma_7(t-v)+\Sigma_8(t-v)+\Sigma_{12}(t-v)+\Sigma_{16}(t-v)=\kappa'-\zeta$$

setzen und auch die übrigen Bezeichnungen der vorigen Paragraphen benutzen, finden wir hieraus leicht:

Satz 29. — *Die Kurve K_2 ist von der Klasse*

$$k_2=6k+6n+2\kappa'-6\varepsilon-4\sigma-8T-2T'+4T''-6V-2W-2\zeta-2\eta+\rho$$
$$=2k_1+2n-2\varepsilon-2T-2V+\rho; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

hierin ist $\rho=\Sigma_{24b}(t-2v)$, während die übrigen Grössen schon in früheren Sätzen definiert sind.

Weiter sei noch bemerkt:

Die Klasse von P_0E als Tangente von K_2 ist $2T'-2T''-2\eta$ (allgemeingültig), die Klasse von l_∞ ist $2n-2\varepsilon+\rho$.

§ 24. Spitzen und übrige Singularitäten von K_2.

Vermöge der mit * gezeichneten Sätze des zweiten Abschnittes findet man für die Anzahl κ_2 der Spitzen, denen die Singularitäten von K_2 äquivalent sind:

$$\kappa_2=\Sigma_5 2(v-1)+\Sigma_6 2(t-1)+\Sigma_7 2(v-1)+\Sigma_8 2(v-1)+\Sigma_9 2(t-1)+$$
$$+\Sigma_{10}2(t+\lambda-1)+\Sigma_{11}2(t-v-1)+\Sigma_{12}2(v-t-1)+\Sigma_{13}2(\lambda-1)+$$
$$+\Sigma_{14}2(t-1)+\Sigma_{15}(t-1 \text{ oder } t-2)+\Sigma_{16}2(v-1)+\Sigma_{17}2(t-1)+$$
$$+\Sigma_{18}(t+v-1 \text{ oder } t+v-2)+\Sigma_{19}(t-1 \text{ oder } t-2)+$$
$$+\Sigma_{20}(2t+v-1 \text{ oder } 2t+v-2)+\Sigma_{21}2(t-1)+\Sigma_{22}2(t+v-1)+$$
$$+\Sigma_{23}2(t-1)+\Sigma_{24a}(t-1 \text{ oder } t-2)+$$
$$+\Sigma_{24b}(2v-1 \text{ od c } 2v-2)+\Sigma_{24c}(t-2).$$

Hierin bedeutet z. B. $\Sigma_{15}(t-1 \text{ oder } t-2)$, dass $t-1$ gewählt werden muss wenn der Zweig von C mit nur einem Zweig von K_2 korrespondiert, $t-2$ wenn aus dem Zweig von C zwei Zweige von K_2 entstehen. Beim Beweis das Satzes 15* hat sich nicht gezeigt wann der erste und wann der zweite Fall eintritt; darüber werden wir aber sofort Auskunft erhalten. Dasselbe gilt für die Satze 18*, 19*, 20* und 24*; immer muss man unter dem Zeichen Σ die erste oder die zweite Zahl lesen, je nachdem der Zweig von C einen einzigen oder zwei Zweige von K_2 giebt.

Vergleicht man den Ausdruck für κ_2 mit dem entsprechenden Ausdruck für κ_1, so findet man:

$$\kappa_2 = 2\kappa_1 - \Sigma_{15}(t-1 \text{ oder } t) - \Sigma_{18}(t-v-1 \text{ oder } t-v) -$$
$$- \Sigma_{19}(t-1 \text{ oder } t) + \Sigma_{20}(v+1 \text{ oder } v) - \Sigma_{24a}(t-1 \text{ oder } t) -$$
$$- \Sigma_{24b}(2t-2v-1 \text{ oder } 2t-2v) - \Sigma_{24c}\, t \quad . \quad . \quad (23)$$

Für das Geschlecht g_2 von K_2 findet man:

$$2g_2 = k_2 + \kappa_2 - 2n_2 + 2,$$

oder vermöge der Gleichungen (19), (22) und (23):

$$2g_2 = 4g - 2 + 2n - 2T - \Sigma_{15}(t-1 \text{ oder } t) - \Sigma_{18}(t+v-1 \text{ oder }$$
$$t+v) - \Sigma_{19}(t-1 \text{ oder } t) - \Sigma_{20}(v-1 \text{ oder } v) + \Sigma_{24}(t-1 \text{ oder } t). \quad (24)$$

Die Summierungen $\Sigma_{15}(t-1 \text{ oder } t)$ u. s. w. beziehen sich auf Zweigen von C, die bewegliche Schnittpunkte mit einer durch O gehenden isotropen Geraden aufweisen, wenn man unter beweglichen Schnittpunkten diejenigen versteht, die sich bewegen wenn die Sekante sich um O dreht. Die erste Zahl unter dem Zeichen Σ ist immer die Anzahl der zusammenfallenden beweglichen Schnittpunkte mit OI_1 oder OI_2. Nennen wir diese Zahl ϑ, so findet man:

$$2g_2 = 4g - 2 + 2n - 2T - \Sigma_{15}(\vartheta \text{ oder } \vartheta - 1) - \Sigma_{18}(\vartheta \text{ oder } \vartheta - 1) -$$
$$- \Sigma_{19}(\vartheta \text{ oder } \vartheta - 1) - \Sigma_{20}(\vartheta \text{ oder } \vartheta - 1) - \Sigma_{24}(\vartheta \text{ oder } \vartheta - 1). \quad (25)$$

Weil g_2 ganz ist, muss das zweite Glied dieser Gleichung eine gerade Zahl sein. Ist ϑ ungerade, so korrespondiert mit dem Zweig von C nur ein einziger Zweig von K_2, weil sonst Ordnung oder Klasse (oder beide) der korrespondierenden Zweige von K_2 gebrochene Zahlen werden würden (siehe die Sätze 15*, 18*, 19*, 20* und 24*); dann muss aber die zweite Zahl unter dem Zeichen Σ, also $\vartheta - 1$, gewählt werden, die gerade ist. Nun wird im allgemeinen für jeden Zweig, der von OI_1 oder OI_2 in beweglichen Punkten geschnitten wird, ϑ gleich Eins, also ungerade, sein; das zweite Glied der Gleichung (25) wird dann, wie es sein muss, gerade. Was nun die Zweige angeht, für welche ϑ gerade ist, kann man immer einen Fall konstruieren, worin die Kurve C nur *einen* solchen Zweig hat; dann muss aber für diesen Zweig die erste Zahl unter dem Zeichen Σ, also ϑ, gewählt werden, weil sonst g_2 gebrochen sein würde. Nun hat sich aber gezeigt, dass immer dann

die erste Zahl unter dem Zeichen Σ genommen werden muss, wenn mit dem Zweig von C zwei Zweige von K_2 korrespondieren, sodass letzteres der Fall sein muss wenn der Zweig von C von OI_1 oder OI_2 in einer geraden Anzahl beweglicher Punkte geschnitten wird und der Zweig der einzige dieser Art ist. Weil aber die Anzahl der mit dem Zweig von C korrespondierenden Zweige von K_2 nur von diesem Zweig von C und nicht von der etwaigen Anwesenheit anderer Zweige abhängen kann, muss die Anzahl der korrespondierenden Zweige von K_2 immer *zwei* sein wenn ϑ gerade ist. Wir finden also:

Satz 30. — *Mit allen Ursprüngen von Zweigen von C korrespondieren zwei Ursprünge von Zweigen von K_2, ausgenommen mit den Zweigen von C, deren Ursprung auf einer durch O gehenden isotropen Geraden liegt und die von dieser Geraden in einer ungeraden Anzahl zusammenfallender beweglicher Punkte*[1] *geschnitten werden. Mit einem Zweig von C korrespondiert nur dann ein einziger Zweig von K_2, wenn man sonst für Ordnung oder Klasse der Zweige von K_2 eine gebrochene Zahl finden würde.* (*Allgemeingültig*).

In der Gleichung (24) oder (25) muss also unter dem Zeichen Σ immer die gerade Zahl gewählt werden. Hat nun die Kurve C β Zweige, die von einer durch O gehenden isotropen Geraden in einer ungeraden Anzahl beweglicher Punkte geschnitten werden (und für welche also ϑ ungerade ist)[2], so muss bei allen Summierungen zusammen im ganzen β-mal die erste Zahl (d. h $\vartheta - 1$) gewählt werden. Man findet dann:

$$2g_2 = 4g - 2 + 2n - 2T + \beta - \Sigma_{15}t - \Sigma_{18}(t+v) - \Sigma_{19}t - \Sigma_{20}v - \Sigma_{24}t,$$

oder vermöge (20):

$$g_2 = 2g - 1 + \tfrac{1}{2}\beta, \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

woraus weiter folgt:

---

[1]) Das sind Schnittpunkte, die sich bewegen wenn sich die Sekante um O dreht, sodass ihre Anzahl v ist für einen isotropen Zweig, der seinen Ursprung in O hat.

[2]) Im allgemeinen ist $\beta = 2n$; weil die Gesamtzahl der beweglichen Schnittpunkte mit OI_1 und OI_2 gleich $2n - 2T$ (also gerade) ist, muss β immer eine gerade Zahl sein.

Satz 31. — *Die Singularitäten von K_2 sind*

$$\kappa_2 = 2\kappa - 2\kappa' + 2T' + 2V + 2W + 2\zeta + 2\eta - \rho + \beta - 2n$$
$$= 2\kappa_1 + 2T + 2V - \rho + \beta - 2n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

Spitzen äquivalent; die Kurve K_2 ist vom Geschlecht

$$g_2 = 2g - 1 + \tfrac{1}{2}\beta.$$

Hierin ist g das Geschlecht von C und β die Anzahl der Zweige von C, die von einer durch O gehenden isotropen Geraden in einer ungeraden Anzahl beweglicher Punkte geschnitten werden [1]).

Die einfache Beziehung zwischen g_2 und g ist eine unmittelbare Folge der zwei-eindeutigen Korrespondenz der Kurven C und K_2 (siehe S. 332). Dazu hat man den folgenden von ZEUTHEN[2]) herrührenden Satz (die eine Erweiterung der Geschlechtsgleichheit bei ein-eindeutiger Korrespondenz ist) zu benutzen:

Besteht zwischen den Punkten P_1 einer Kurve C_1 vom Geschlecht g_1 und den Punkten P_2 einer Kurve C_2 vom Geschlecht g_2 eine derartige algebraische Korrespondenz, dass einem beliebigen Punkt P_1 a_2 Punkte P_2 und einem beliebigen Punkt P_2 a_1 Punkte P_1 entsprechen, so hat man die Beziehung:

$$b_1 - b_2 = 2a_2(g_1 - 1) - 2a_1(g_2 - 1),$$

wenn b_1 die Anzahl der Koinzidenzen zweier demselben P_2 entsprechender Punkte P_1 und b_2 die Anzahl der Koinzidenzen zweier demselben P_1 entsprechender Punkte P_2 ist.

Hierbei hat man unter einer Koinzidenz das Zusammenrücken zweier *demselben Zweig angehöriger* Punkte zu verstehen.

Nehmen wir für C_1 unsere ursprüngliche Kurve C und für C_2 die bewegliche Polarkurve K_2, so ist

$$a_1 = 1\,,\; a_2 = 2\,,\; g_1 = g,\; b_1 = 0,$$

während b_2 die Anzahl der Zweige von C ist, mit denen nur ein Zweig von K_2 korrespondiert (wobei also die zwei korrespondierenden Punkte von K_2 auf demselben Zweig von K_2 zusammengerückt sind); b_2 ist also nichts andres als die oben

---

[1]) Siehe die Noten von S. 365.

[2]) Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes, *Math. Annalen Bd.* 3 (1870), S. 150—156.

eingeführte Grösse β, sodass die ZEUTHEN'sche Gleichung übergeht in:

$$-\beta = 4(g-1) - 2(g_2-1),$$

in Übereinstimmung mit (26).

Für die Anzahlen ι_2, δ_2, τ_2 der Inflektionen, Doppelpunkte und Doppeltangenten, denen die Singularitäten von K_2 äquivalent sind, findet man mittelst der PLÜCKER'schen Gleichungen:

$$\iota_2 = 12k + 4n + 2\kappa + 4\kappa' - 9\varepsilon - 6\sigma - 12T - 4T' + \\ + 6T'' - 10V - 4W - 4\zeta - 4\eta + 2\rho + \beta = \\ = 2\iota_1 + 4n - 3\varepsilon - 4T - 4V + 2\rho + \beta, \quad . \quad . \quad (28)$$

$$2\delta_2 = (2k + 4n - 3\varepsilon - 2\sigma - 4T + 2T'' - 2V)^2 - 8k - 4n - 6\kappa + \\ + 4\kappa' + 9\varepsilon + 6\sigma + 12T - 4T' - 6T'' + \\ + 2V - 4W - 4\zeta - 4\eta + 2\rho - 3\beta, \quad . \quad . \quad . \quad (29)$$

$$2\tau_2 = (6k + 6n + 2\kappa' - 6\varepsilon - 4\sigma - 8T - 2T' + 4T'' - 6V - 2W - \\ - 2\zeta - 2\eta + \rho)^2 - 44k - 22n - 6\kappa - 14\kappa' + \\ + 36\varepsilon + 24\sigma + 48T + 14T' - 24T'' + 38V + 14W + 14\zeta + \\ + 14\eta - 7\rho - 3\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Bemerkt sei, dass diese Formeln ihre Gültigkeit verlieren, wenn O ein j-zähliges Symmetriezentrum von C ist, d. h. wenn die Kurve C bei einer Drehung von $\frac{360°}{j}$ um den Punkt O mit sich selbst zur Deckung kommt. Dann liefern immer j symmetrisch um O liegende Punkte von C dieselben zwei Punkte von K_2, sodass K_2 dann aus j zusammenfallenden Teilen besteht und also jeder Punkt von K_2 als einen Doppelpunkt und jede Tangente als eine Doppeltangente zu betrachten ist und die Formeln (29) und (30) daher ihren Sinn verlieren. Die Gleichungen (19) und (22) behalten aber ihre Gültigkeit bei, während die Gleichungen (26), (27) und (28) abgeändert werden müssen. Hierauf, sowie auf die Frage nach den PLÜCKER'schen Charakteren der Teilkurven von K_2, werden wir in § 27 zurückkommen.

§ 25. Besteht K_2 aus einer einzigen oder aus zwei algebraischen Kurven?

In diesem und dem folgenden Paragraphen nehmen wir an, dass O kein Symmetriezentrum von C, also $j = 1$ ist.

In § 7 haben wir gesehen, dass einem beliebigen Punkt von C zwei symmetrisch zu P_0 liegende Punkte von K_2 entsprechen, und die Frage liegt nahe ob diese beiden Punkte einer einzigen Kurve (die dann in P_0 einen Mittelpunkt hat) oder zwei verschiedenen algebraischen Kurven (die symmetrisch zu P_0 liegen) angehören. Hierbei werden wir naturgemäss annehmen, dass die Kurve C selbst nicht zerfällt.

In § 24 sahen wir, dass die Kurve C β Ursprünge von Zweigen hat, deren korrespondierende Punkte *auf demselben Zweig von K_2* zusammenfallen. Dies ist aber nur möglich wenn die beiden mit einem Punkt von C korrespondierenden Punkte von K_2 derselben algebraischen Kurve angehören, welcher Fall also immer dann eintritt wenn β von Null verschieden ist. Ist aber $\beta = 0$, so werden mit *jedem* Ursprung eines Zweiges von C zwei symmetrisch zu P_0 liegende Ursprünge *verschiedener* Zweige von K_2 korrespondieren. Die Kurve K_2 *kann* dann in zwei getrennte (symmetrisch zu P_0 liegende) algebraische Kurven zerfallen, aber dies braucht nicht der Fall zu sein; aus dem Umstand, dass K_2 in P_0 einen Mittelpunkt hat ohne dass es Zweige von K_2 giebt, die in sich selbst symmetrisch zu P_0 sind, kann man nämlich nicht zum Zerfallen von K_2 schliessen [1]).

Wir finden also:

Satz 32. — *Besteht C aus einer einzigen algebraischen Kurve, die in O kein Symmetriezentrum* [2]) *hat, so wird K_2 zu einer einzigen algebraischen Kurve, die in P_0 einen Mittelpunkt hat, wenn C auf einer durch O gehenden isotropen Geraden mindestens einen Ursprung eines Zweiges hat, der*

---

[1]) Die nicht zerfallende Kurve

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) - xy = 0$$

hat im Ursprung des Koordinatensystems einen Mittelpunkt, aber keinen Zweig, der dem symmetrisch liegenden Zweig identisch ist.

[2]) Siehe S. 367.

von dieser Geraden in einer ungeraden Anzahl beweglicher Punkte [1]) *geschnitten wird; hat C einen derartigen Zweig nicht, so kann K_2 in zwei symmetrisch zu P_0 liegende algebraische Kurven zerfallen.* (*Allgemeingültig*).

Aus diesem Satz geht hervor, welchem Umstande es zuzuschreiben ist, dass in der Aufgabe 108 des *Wiskundig Genootschap* (Teil 9) die Kurve K_2 [2]) in zwei getrennte Teile zerfällt. Dort ist nämlich C eine Parabel und O der Brennpunkt, sodass OI_1 und OI_2 Tangenten von C sind und also jede dieser Geraden nur zwei zusammenfallende demselben Zweig von C angehörige Schnittpunkte aufweist.

§ 26. Reelle Züge von K_2.

Fassen wir einen reellen geschlossenen Zug von C ins Auge und lassen wir den Punkt P der beweglichen Figur den ganzen Zug durchlaufen bis der Punkt in den Anfangspunkt zurückgekehrt ist, wofür eventuell einen Durchgang durch das Unendlich nötig ist Der korrespondierende Punkt S von K_2 beschreibt dann ebenfalls einen reellen Zug. Zwei Fälle können nun eintreten: der Punkt O befindet sich nach dem Durchlaufen des Zuges von C auf demselben oder auf dem ergänzenden Halbstrahl der Geraden l der beweglichen Figur.

Im ersten Fall ist auch S wieder in seine Anfangslage zurückgekehrt. Man kann sich dann noch eine zweite Bewegung denken, wobei P ebenfalls den ganzen Zug von C beschreibt, aber so dass P sich ursprünglich auf dem ergänzenden Halbstrahl von l befindet; bei dieser zweiten Bewegung (die mit der ersten keinen reellen Zusammenhang hat) beschreibt der Punkt S einen zweiten mit dem ersten symmetrisch zu P_0 liegenden Zug von K_2, sodass dann mit dem einen Zug von C zwei Züge von K_2 korrespondieren.

Im zweiten Fall kommt S in einen mit dem Anfangspunkt symmetrisch zu P_0 liegenden Punkt, sodass P den Zug von C

---

[1]) Siehe die Note 1 von S 365.

[2]) In dieser Aufgabe ist die Ebene von C beweglich, die andere Ebene fest vorausgesetzt, sodass dort K_2 die feste Polarkurve ist.

noch einmal durchlaufen muss bevor S in den Anfangspunkt zurückgekehrt ist; der Punkt S hat dann einen Zug beschrieben der in O einen Mittelpunkt hat.

Es ist leicht zu sehen wie der Zug von C beschaffen sein muss um einen oder zwei Züge von K_2 zu liefern. Der Punkt O kann nämlich nur dann von dem einen auf den anderen Halbstrahl von l übergehen wenn P den Punkt O oder das Unendliche passiert, woraus man sofort sieht, dass mit einem Zug, der nicht durch O geht und sich nicht ins Unendliche erstreckt, zwei Züge von K_2 korrespondieren. Passiert P den Punkt O auf einem Zweig (t, v), so sieht man aus der Gestalt des Zweiges, dass O auf demselben Halbstrahl bleibt wenn t gerade ist (Spitze oder Schnabelspitze), für ungerade t (Zweig ohne augenfällige Singularität oder Inflektion) aber auf den ergänzenden Halbstrahl übergeht.

Passiert P das Unendliche, so giebt dies zwar in der Bewegung der Figur eine Diskontinuität, aber dies ist nichtsdestoweniger kein Hinderniss wenn man sich von der Bewegung abstrahiert und nur auf die geometrische Konstruktion des Punktes S achtet. Statt von dem Punkt P kann man sich die Gerade l dann auch von O in zwei Halbstrahlen zerlegt denken und OP auf l_0 in der einen oder der anderen Richtung abtragen, je nachdem P auf dem einen oder dem anderen Halbstrahl von l liegt. Passiert nun P das Unendliche auf einem asymptotischen Zweig (t, v), so folgt aus den gestaltlichen Verhältnissen, dass P dann und nur dann auf demselben Halbstrahl (in dem neuen Sinne) bleibt, wenn t gerade ist, während bei einem parabolischen Zweig dafür $t+v$ gerade sein muss; d. h. beim Passieren des Unendlichen bleibt P auf demselben Halbstrahl oder nicht je nachdem der betreffende Zweig von C von l_∞ in einer geraden oder einer ungeraden Anzahl Punkten geschnitten wird. Hat nun der Zug eine gerade Anzahl von Zweigen, bei denen P auf den anderen Halbstrahl übergeht, so wird sich P beim Durchlaufen des ganzen Zuges wieder auf dem ursprünglichen Halbstrahl befinden, sodass dann mit dem Zug von C zwei Züge von K_2 korrespondieren.

Ist der Zug von C ein paarer oder unpaarer, so ist die Anzahl seiner asymptotischen oder parabolischen Zweige, die eine ungerade Anzahl von Schnittpunkten mit l_∞ aufweisen,

gerade bezw. ungerade. Ist O ein Punkt gerader oder ungerader Ordnung des Zuges, so ist die Anzahl seiner Zweige ungerader Ordnung, die in O ihren Ursprung haben, gerade bezw. ungerade. Hieraus folgt:

S a t z 33. — *Mit einem geschlossenen reellen Zug von C, der von einer durch O gehenden Geraden in einer geraden Anzahl beweglicher Punkte geschnitten wird* [1], *korrespondieren zwei symmetrisch zu P_0 liegende Züge von K_2* [2]. *Mit einem Zug, der von einer durch O gehenden Geraden in einer ungeraden Anzahl beweglicher Punkte geschnitten wird* [3], *korrespondiert ein einziger Zug von K_2, der P_0 als Mittelpunkt hat.*

Hieraus folgt wieder:

Hat die nicht zerfallende Kurve C mindestens einen Zug, der von einer durch O gehenden Geraden in einer ungeraden Anzahl beweglicher Punkte geschnitten wird, so besteht K_2 aus einer einzigen algebraischen Kurve.

Dieser Fall tritt immer ein wenn die ganze Kurve C von einer durch O gehenden Geraden in einer ungeraden Anzahl beweglicher Punkte geschnitten wird; dass K_2 dann nicht zerfällt, folgt auch aus den Betrachtungen des vorigen Paragraphen, weil es dann immer Zweige von C geben muss, die von einer durch O gehenden isotropen Geraden in einer ungeraden Anzahl beweglicher Punkte geschnitten werden. Weiter sieht man aber, *dass die Bedingung des Zerfallens des vorigen Paragraphen eine notwendige aber keine hinreichende ist* [4]. Es ist nämlich möglich, dass die Kurve C dieser Bedingung genügt, aber Züge hat, die von einer durch O gehenden Geraden in einer ungeraden Anzahl beweglicher Punkte geschnitten werden, in welchem Falle K_2 nicht zerfallen kann [5].

---

[1]) Paarer Zug mit O als Punkt gerader Ordnung oder unpaarer Zug mit O als Punkt ungerader Ordnung.

[2]) Diese können noch einer einzigen oder zwei verschiedenen algebraischen Kurven angehören.

[3]) Paarer Zug mit O als Punkt ungerader Ordnung oder unpaarer Zug mit O als Punkt gerader Ordnung.

[4]) Die notwendige und hinreichende Bedingung des Zerfallens von K_2 weiss ich nicht anzugeben.

[5]) Ein Beispiel davon liefert die Kurve

$$(x^2 + y^2 - 2x)(x^2 + y^2 - 2y) + (x - y)^2 \{2p(x + y) - p^2 xy\} = 0.$$

Für $p = 0$ zerfällt die Kurve in zwei Kreise mit den Schnittpunkten (0, 0)

§ 27. Der Punkt O ist ein j-zähliges Symmetriezentrum von C.

Hat die Kurve C in O ein j-zähliges Symmetriezentrum [1]), so liefern immer j Zweige von C dieselben zwei Zweige von K_2; sodass K_2 in j zusammenfallende Kurven K'_2 ausartet. Zwischen den Kurven C und K'_2 besteht dann eine $(2, j)$-Korrespondenz, d. h. einem beliebigen Punkt von C entsprechen 2 Punkte von K'_2, während einem beliebigen Punkt von K'_2 j Punkte von C entsprechen.

Die Gleichungen (19) und (22) für n_2 und k_2 behalten auch jetzt ihre Gültigkeit bei, weil sämtliche Sätze des zweiten Abschnittes richtig bleiben; nur könnten möglicherweise die Sätze 11*, 12*, 20*, 22* und 23*, falls der Zweig von C in O ein Symmetriezentrum hat, dahin abgeändert werden müssen, dass der Zweig von K_2 in mehrere Zweige zerfällt, wobei aber die Summe der Ordnungen und Klassen dieser Zweige dieselbe bleibt. Dennoch hat man dabei zu bedenken, dass die Gleichungen (19) und (22) sich auf die Totalkurve K_2 beziehen, und dass man also, um Ordnung und Klasse von K'_2 zu finden, die Ausdrücke für n_2 und k_2 noch durch j zu dividieren hat.

Am einfachsten sind die Verhältnisse wenn die Kurve C keine Zweige hat, die symmetrisch zu O sind, also keine Zweige, die bei Drehung eines Winkel von $\frac{j'}{j}\,360^\circ$ $(j' < j)$ mit sich selbst zur Deckung kommen. Dann sind sämtliche Sätze des zweiten Abschnittes ungeändert gültig, sodass man nur die Ausdrücke für g_2, κ_2 und ι_2 durch j zu dividieren hat um die entsprechenden Grössen g'_2, κ'_2 und ι'_2 für die Kurve K'_2 zu finden, während δ'_2 und τ'_2 dann aus den PLÜCKER'schen Gleichungen bestimmt werden; man findet dann Ausdrücke, die sich von den Ausdrücken für δ_2 und τ_2 nur dadurch unter-

---

und (1, 1). Ist p klein, so ist die Gestalt der Kurve nur wenig geändert; die Punkte (0, 0) und (1, 1) sind Doppelpunkte geblieben, aber die Kurve zerfällt nicht mehr. Die Kurve wird daher zwei paare durch O (0, 0) gehende Züge haben; jedem dieser Züge entspricht nur ein Zug von K_2, sodass K_2 nicht zerfällt. Man überzeugt sich aber leicht, dass trotzdem die durch O gehenden isotropen Geraden Tangenten der Kurve sind und also die notwendige Bedingung von § 25 des Zerfallens erfüllt ist.

[1]) Siehe S. 367.

scheiden, dass die linearen Glieder durch j, die quadratischen Glieder durch j^2 dividiert erscheinen.

Komplizierter wird die Sache wenn C Zweige hat, die in O ein Symmetriezentrum haben. Derartige Zweige können nur sein: 1°. nicht-isotrope Zweige mit in O fallendem Ursprung, 2°. asymptotische Zweige mit durch O gehender Asymptote, 3°. parabolische Zweige, 4°. isotrope Zweige mit in O fallendem Ursprung, 5°. zirkuläre Zweige mit durch O gehender Asymptote und 6°. zirkulär-parabolische Zweige. In den ersten drei Fällen kann O nur ein 2-zähliges Symmetriezentrum (Mittelpunkt) sein; bei einem nicht-isotropen Zweig muss dazu t ungerade v gerade, bei einem asymptotischen Zweig t und v beide ungerade und bei einem parabolischen Zweig t gerade v ungerade sein. In den drei letztgenannten Fällen, von welchen wir wie in der ganzen Untersuchung nur den ersten in Betracht ziehen werden, kann O auch ein mehrzähliges Symmetriezentrum des Zweiges sein.

Ein nicht-isotroper, asymptotischer oder parabolischer Zweig mit O als Mittelpunkt kann nur auftreten wenn j gerade ist. Durchläuft P diesen Zweig, so geht P (wie aus der Gestalt des Zweiges unmittelbar hervorgeht) beim Passieren des Ursprungs des Zweiges auf den ergänzenden Halbstrahl über, woraus erfolgt, dass der korrespondierende Punkt S von K_2 einen Zweig beschreibt, der in P_0 einen Mittelpunkt hat; durchläuft P den Zweig von C noch einmal, aber so dass P sich ursprünglich auf dem anderen Halbstrahl von l befindet, so beschreibt S einen Zweig, der mit dem ersten symmetrisch zu P_0 liegt, und also mit diesem identisch ist. Da es im ganzen $\frac{j}{2}$ symmetrisch um O liegende Zweige von C giebt, die dieselben zwei zusammenfallenden Zweige von K_2 liefern, tritt der durch S beschriebene Zweig, wie es sein muss, j-mal in K_2 und einmal in K'_2 auf. Also finden wir:

Mit einem nicht-isotropen, asymptotischen oder parabolischen Zweig von C, der in O einen Mittelpunkt hat, korrespondiert nur ein Zweig von K'_2, der in P_0 einen Mittelpunkt hat, während mit diesem Zweig von K'_2 $\frac{j}{2}$ Zweige von C korrespondieren.

Aus dem Vorhergehenden sieht man weiter, *dass der*

Umstand, dass O Mittelpunkt des Zweiges von C ist, auf die Sätze 11, 12*, 22* und 23* keinen anderen Einfluss übt, als dass die beiden dem Zweig von C entsprechenden Zweige von K_2 zusammenfallen.* Ein derartiger Zweig von C wird daher die Gleichungen (26), (27) und (28) für g_2, $\varkappa_2$ und ι_2 nicht stören.

Betrachten wir jetzt einen isotropen Zweig (t, v) von C, der O als Ursprung und ν-zähliges Symmetriezentrum hat, worin ν ein Faktor von j oder j selbst ist. Man beweist leicht, dass dies nur möglich ist wenn $2t + v$ durch ν teilbar ist[1]). Mit ν verschiedenen Punkten des Zweiges korrespondieren dann immer dieselben zwei Punkte von K_2, sodass der Satz 20* dahin abgeändert werden muss, dass in K_2 mit dem Zweig von C ein ν-mal zählender Zweig $\frac{2t+v}{\nu}$ ter Ordnung oder zwei ν-mal zählende Zweige $\frac{2t+v}{2\nu}$ ter Ordnung korrespondieren; weil die Kurve C $\frac{j}{\nu}$ symmetrisch um P_0 liegende Zweige hat, die

---

[1]) Sei nämlich

$$y = ix + ax^{\frac{t+v}{t}} + \ldots.$$

die Puiseux'sche Entwicklung des isotropen Zweiges. Die Drehung eines Winkels $\alpha = \frac{360}{\nu}$ giebt die folgende Substitution:

$$y = y' \cos \alpha + x' \sin \alpha,$$
$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha,$$

wodurch die Entwicklung übergeht in:

$$y' \cos \alpha + x' \sin \alpha = ix' \cos \alpha - iy' \sin \alpha + a\,(x' \cos \alpha - y' \sin \alpha)^{\frac{t+v}{t}} + \ldots.$$

oder weil angenähert $y' = ix'$ ist:

$$y' = ix' + ax'^{\frac{t+v}{t}} \left(\cos \frac{360}{\nu} - i \sin \frac{360}{\nu}\right)^{\frac{2t+v}{t}} + \ldots.$$

Der Zweig kann bei dieser Drehung also nur dann mit sich selbst zur Deckung kommen, wenn

$$\left(\cos \frac{360}{\nu} - i \sin \frac{360}{\nu}\right)^{\frac{2t+v}{t}} = 1,$$

oder

$$\left(\cos \frac{360}{\nu} - i \sin \frac{360}{\nu}\right)^{2t+v} = \cos (2t+v) \frac{360}{\nu} - i \sin (2t+v) \frac{360}{\nu} = 1,$$

also $2t + v$ durch ν teilbar ist.

dieselben Zweige von K_2 liefern, so sind die genannten Zweige in K_2 $\nu.\frac{j}{\nu} = j$-fach und in K'_2, wie es sein muss, einfach. Mit dem Zweig von C korrespondiert also in K'_2 ein Zweig $\frac{2t+v}{\nu}^{\text{ter}}$ Ordnung oder zwei Zweige $\frac{2t+v}{2\nu}^{\text{ter}}$ Ordnung, während umgekehrt mit solch einem Zweig von K'_2 $\frac{j}{\nu}$ Zweige von C korrespondieren. Der erste Fall tritt notwendig ein wenn $\frac{2t+v}{\nu}$ ungerade ist, und es lässt sich zeigen, dass der zweite Fall immer dann eintritt wenn $\frac{2t+v}{\nu}$ gerade ist. Der Satz 20* muss also für den Fall, dass O Symmetriezentrum ist, folgendermassen modifiziert werden:

Satz 20**. — *Ist O ein j-zähliges Symmetriezentrum von C, so korrespondieren mit den* $\frac{j}{\nu}$ *kongruenten isotropen Zweigen* (t, v) *von C, die O als Ursprung und ν-zähliges Symmetriezentrum haben, in der Kurve* K'_2 *(einer der j zusammenfallenden Kurven, in die* K_2 *zerfällt) ein einziger nicht-isotroper Zweig* $\frac{2t+v}{\nu}^{\text{ter}}$ *Ordnung oder zwei nicht-isotrope Zweige* $\frac{2t+v}{2\nu}^{\text{ter}}$ *Ordnung (je nachdem* $\frac{2t+v}{\nu}$ *ungerade oder gerade ist) mit in* P_0 *fallendem Ursprung und nicht senkrecht auf* l_0 *stehender von* l_0 *verschiedener Tangente.*

Um das Geschlecht g'_2 der Kurve K'_2 zu bestimmen wenden wir die ZEUTHEN'sche Beziehung von S. 366

$$b_1 - b_2 = 2a_2(g_1 - 1) - 2a_1 (g_2 - 1)$$

an, wobei wir für C_1 unsere ursprüngliche Kurve C und für C_2 die Kurve K'_2 nehmen. Dann ist:

$$g_1 = g\,,\ g_2 = g'_2\,,\ a_2 = 2\,,\ a_1 = j.$$

Weil jetzt $a_1 > 2$ sein kann, können mehrere demselben P_2 entsprechende Punkte P_1 zusammenfallen. Auf diesen Fall ist

die ZEUTHEN'sche Beziehung von HALPHEN [1]) ausgedehnt worden; die Gleichung bleibt dabei dieselbe, nur muss eine Koinzidenz von u_1 demselben P_2 entsprechenden (demselben Zweig von C_1 angehörigen) Punkten P_1 für $u_1 - 1$ Koinzidenzen und ebenfalls die Koinzidenz von u_2 demselben P_1 entsprechenden Punkten P_2 für $u_2 - 1$ Koinzidenzen gezählt werden. In der HALPHEN'schen Form lautet dann die Gleichung:

$$2a_2(g_1 - 1) - 2a_1(g_2 - 1) = \Sigma(u_1 - u_2),$$

wobei die Summierung über alle Paare korrespondierender Ursprünge von Zweigen ausgedehnt werden muss.

Betrachten wir wieder den Ursprung eines Zweiges von C, der O als ν-zähliges Symmetriezentrum hat (für den Fall, dass O kein Symmetriezentrum des Zweiges ist, ist $\nu = 1$ zu setzen). Korrespondiert mit diesem Zweig nur ein Zweig von K'_2, so ist für dieses Zweigepaar $u_1 = \nu$, $u_2 = 2$. Korrespondieren mit dem Zweig von C zwei Zweige von K'_2, so kann man den Zweig von C auf zwei Weisen mit einem Zweig von K'_2 zu einem Paar korrespondierender Zweige vereinigen, und beide Male ist $u_1 = \nu$, $u_2 = 1$. Die HALPHEN'sche Gleichung giebt also:

$$4(g - 1) - 2j(g'_2 - 1) = \Sigma^1(\nu - 2) + \Sigma^2(2\nu - 2), \quad . \; . \; (31)$$

wobei die erste Summierung über alle Ursprünge von Zweigen von C auszudehnen ist, denen ein Zweig von K'_2 entspricht, die zweite Summierung über alle Zweige, denen zwei Zweige von K'_2 entsprechen.

Für einen nicht-isotropen, asymptotischen oder parabolischen Zweig von C, der in O einen Mittelpunkt hat, ist $\nu = 2$; weil mit einem solchen Zweig nur ein Zweig von K'_2 korrespondiert (und der Zweig also der ersten Summierung unterzuordnen ist), fallen derartige Zweige aus der Gleichung fort und haben daher, wie schon bemerkt, auf das Geschlecht von K'_2 keinen Einfluss. Also bleiben in den Summierungen nur die Zweige mit ausserhalb O auf OI_1 (oder OI_2) liegendem Ursprung, die von OI_1 (bezw. OI_2) in einer ungeraden Anzahl zusam-

[1]) Sur les correspondances entre les points de deux courbes, *Bull. de la Soc. Math. de France t.* 5 (1876), p. 7–18. Während ZEUTHEN seine Gleichung nur für Kurven mit PLÜCKER'schen Singularitäten abgeleitet hat, zeigt HALPHEN, dass die Formel auch für Kurven mit höheren Singularitäten richtig ist.

menfallender Punkte geschnitten werden (erste Summierung, $\nu = 1$), und die isotropen Zweige mit in O fallendem Ursprung stehen.

Aus der Gleichung (31) findet man dann leicht:

Satz 34. — *Ist O ein j-zähliges Symmetriezentrum von C, so ist das Geschlecht der Kurve K'_2:*

$$g'_2 = \frac{4g - 4 + 2j + \beta' + 2\pi - j\sigma}{2j}.$$

Hierin ist β' die Anzahl der ausserhalb O auf OI_1 (oder OI_2) liegendenden Ursprünge von Zweigen von C, die von OI_1 (bezw. OI_2) in einer ungeraden Anzahl zusammenfallender Punkte geschnitten werden, π die Anzahl der isotropen Zweige von C mit in O fallendem Ursprung und σ die Anzahl der mit den letztgenannten Zweigen korrespondierenden Zweige von K'_2. Die Anzahl der Spitzen, denen die Singularitäten von K'_2 äquivalent sind, ist:

$$\kappa'_2 = \frac{1}{j}\,(2\kappa - 2\kappa' + 2T' + 2V + 2W + 2\zeta + 2\eta - \rho + \beta' + 2\pi - j\sigma - 2n).$$

Die übrigen Charaktere (ι'_2, δ'_2 und τ'_2) von K'_2 werden dann weiter mittelst der Plücker'schen Gleichungen bestimmt.

P 6 e

SUR LES TRANSFORMATIONS DE CONTACT

PAR

W. KAPTEYN.
(Utrecht).

Quand on applique une transformation de contact quelconque

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(x'y'z'p'q') \\ y &= f_2(x'y'z'p'q') \\ z &= f_3(x'y'z'p'q') \\ p &= f_4(x'y'z'p'q') \\ q &= f_5(x'y'z'p'q') \end{aligned}\right\}$$

à une équation différentielle d'Ampère

$$1) \ldots \mathrm{H}r + 2\mathrm{K}s + \mathrm{L}t + \mathrm{M} + \mathrm{N}(rt - s^2) = 0,$$

où H, K, L, M, N représentent des fonctions arbitraires de $x\ y\ z\ p\ q$, on est conduit à une équation de la même forme

$$2) \ldots \mathrm{H}'r' + 2\mathrm{K}'s' + \mathrm{L}'t' + \mathrm{M}' + \mathrm{N}'(r't' - s'^2) = 0.$$

En appliquant d'autre part la même transformation à un système de caractéristiques de la première équation (1) on sait que l'on obtient un système de caractéristiques de l'équation transformée (2).

Nous nous proposons dans les pages suivantes de démontrer ce théorème fondamental sans faire usage de considérations géométriques.

La transformation de contact exige qu'on ait

$$dz - pdx - qdy = \rho(dz' - p'dx' - q'dy');$$

par suite les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 doivent remplir certaines conditions. En posant

$$\frac{\partial fi}{\partial x'} = a_i,\ \frac{\partial fi}{\partial y'} = b_i,\ \frac{\partial fi}{\partial z'} = c_i,\ \frac{\partial fi}{\partial p'} = d_i,\ \frac{\partial fi}{\partial q'} = e_i$$

on aura

$$dx = a_1 dx' + b_1 dy' + c_1 dz' + d_1 dp' + e_1 dq',$$
$$dy = a_2 dx' + b_2 dy' + c_2 dz' + d_2 dp' + e_2 dq',$$
$$dz = a_3 dx' + b_3 dy' + c_3 dz' + d_3 dp' + e_3 dq',$$

ce qui donne les conditions suivantes

$$(3) \ldots \left\{ \begin{aligned} -\rho p' &= a_3 - f_4 a_1 - f_5 a_2 \\ -\rho q' &= b_3 - f_4 b_1 - f_5 b_2 \\ \rho &= c_3 - f_4 c_1 - f_5 c_2 \\ 0 &= d_3 - f_4 d_1 - f_5 d_2 \\ 0 &= e_3 - f_4 e_1 - f_5 e_2 \end{aligned} \right.$$

Pour transformer l'équation (1), il nous faut déterminer r, s, t en fonction de x', y', z', p', q', r', s', t'. Remplaçons pour cela dans les relations

$$dp = r dx + s dy,\ dq = s dx + t dy$$

dx, dy, dp, dq par leurs valeurs en fonction de dx', dy', dz', dp', dq' et introduisons en même temps les valeurs de dz', dp', dq' en fonction de dx' et dy' au moyen des équations

$$dz' = p'dx' + q'dy',$$
$$dp' = r'dx' + s'dy',$$
$$dq' = s'dx' + t'dy'.$$

De cette manière on obtient

$$a_4 dx' + b_4 dy' + c_4(p'dx' + q'dy') + d_4(r'dx' + s'dy') + e_4(s'dx' + t'dy') =$$
$$= r[a_1 dx' + b_1 dy' + c_1(p'dx' + q'dy') + d_1(r'dx' + s'dy') + e_1(s'dx' + t'dy')] +$$
$$+ s[a_2 dx' + b_2 dy' + c_2(p'dx' + q'dy') + d_2(r'dx' + s'dy') + e_2(s'dx' + t'dy')]$$

$$a_5 dx' + b_5 dy' + c_5(p'dx' + q'dy') + d_5(r'dx' + s'dy') + e_5(s'dx' + t'dy') =$$
$$= s[a_1 dx' + b_1 dy' + c_1(p'dx' + q'dy') + d_1(r'dx' = s'dy') + e_1(s'dx' + t'dy')] +$$
$$+ t[a_2 dx' + b_2 dy' + c_2(p'dx' + q'dy') + d_2(r'dx' + s'dy') + e_2(s'dx' + t'dy')]'$$

d'où l'on déduit les quatre relations suivantes

$$a_4+c_4p'+d_4r'+e_4s' = (a_1+c_1p'+d_1r'+e_1s')r + (a_2+c_2p'+d_2r'+e_2s')s,$$

$$b_4+c_4q'+d_4s'+e_4t' = (b_1+c_1q'+d_1s'+e_1t')r + (b_2+c_2q'+d_4s'+e_2t')s,$$

$$a_5+c_5p'+d_5r'+e_5s' = (a_1+c_1p'+d_1r'+e_1s')s + (a_2+c_2p'+d_2r'+e_2s')t,$$

$$b_5+c_5q'+d_5s'+e_5t' = (b_1+c_1q'+d_1s'+e_1t')s + (b_2+c_2q'+d_2s'+e_2t')t.$$

En écrivant ces équations dans la forme

$$\begin{aligned} A_4 &= A_1r + A_2s, \\ B_4 &= B_1r + B_2s, \\ A_5 &= A_1s + A_2t, \\ B_5 &= B_1s + B_2t, \end{aligned}$$

on aura

$$4) \quad \ldots \quad \begin{cases} r = \dfrac{A_4B_2 - A_2B_4}{A_1B_2 - A_2B_1} \\ s = \dfrac{A_1B_4 - A_4B_1}{A_1B_2 - A_2B_1} = \dfrac{A_5B_2 - A_2B_5}{A_1B_2 - A_2B_1} \\ t = \dfrac{A_1B_5 - A_5B_1}{A_1B_2 - A_2B_1}. \end{cases}$$

Arrêtons nous maintenant, avant d'étudier la transformée de l'équation (1), pour faire voir que les deux déterminations que nous avons trouvées pour s sont identiques.

Le premier numérateur $A_1B_4 - A_4B_1$ se réduit à

$$(A) \begin{cases} (a_1b_4) + (b_4c_1)p' + (a_1c_4)q' + (b_4d_1)r' + [(b_4e_1) + (a_1d_4)]s' + \\ + (a_1c_4)t' + (c_1d_4)p's' + (c_1e_4)p't' + (c_4d_1)q'r' + (c_4e_1)q's' + \\ + (d_1e_4)(r't' - s'^2), \end{cases}$$

tandis que le second $A_5B_2 - A_2B_5$ prend la forme

$$(B) \begin{cases} (a_5b_2) + (b_2c_5)p' + (a_5c_2)q' + (b_2d_5)r' + [(b_2e_5) + (a_5d_2)]s' + \\ + (a_5e_2)t' + (c_5d_2)p's' + (c_5e_2)p't' + (c_2d_5)q'r' + (c_2e_5)q's' + \\ + (d_5e_2)(r't' - s'^2). \end{cases}$$

Or, en remarquant que d'après la définition

$$\frac{\partial a_4}{\partial y'} = \frac{\partial b_3}{\partial x'},$$

on déduira aisément des deux premières conditions (3)

$$(a_4b_1)+(a_5b_2)=q'\frac{\partial\rho}{\partial x'}-p'\frac{\partial\rho}{dy'}$$

et de même en éliminant de toutes manières possibles les quantités qui portent l'indice 3, on obtiendra ces autres relations

$$(a_4c_1)+(a_5c_2)=-p'\frac{\partial\rho}{\partial z'}-\frac{\partial\rho}{\partial x'},$$

$$(a_4d_1)+(a_5d_2)=-\rho-p'\frac{\partial\rho}{\partial x'},$$

$$(a_4e_1)+(a_5e_2)=-p'\frac{\partial\rho}{\partial q'},$$

$$(b_4c_1)+(b_5c_2)=-q'\frac{\partial\rho}{\partial z'}-\frac{\partial\rho}{\partial y'},$$

$$(b_4d_1)+(b_5d_2)=-q'\frac{\partial\rho}{\partial p'},$$

$$(b_4e_1)+(b_5e_2)=-\rho-q'\frac{\partial\rho}{\partial q'},$$

$$(c_4d_1)+(c_5d_2)=\frac{\partial\rho}{\partial p'},$$

$$(c_4e_1)+(c_5e_2)=\frac{\partial\rho}{\partial q'},$$

$$(d_4e_1)+(d_5e_2)=0.$$

En introduisant ces conditions la valeur de (B) — (A) se réduit aisément à zéro, ce qui prouve l'identité des deux numérateurs de s.

Partons maintenant, pour la démonstration que nous avons en vue, d'une équation d'Ampère dont un système de caractéristiques est donné dans la forme suivante qui embrasse tous les cas possibles

$$5)\quad\ldots\quad\begin{cases}\mathrm{A}dx+\mathrm{B}dy+\mathrm{C}dp+\mathrm{D}dq=0,\\ \mathrm{A}'dx+\mathrm{B}'dy+\mathrm{C}'dp+\mathrm{D}'dq=0,\\ \qquad dz-pdx-qdy=0,\end{cases}$$

A, B, C, D, A′, B′, C′, D′ étant des fonctions quelconques de x, y, z, p, q. Si on remplace dans les deux premières de ces équations dp par $rdx+sdy$ et dq par $sdx+tdy$, puis qu'on

élimine le rapport $\frac{dy}{dx}$ entre les deux relations ainsi obtenues, on aboutit à une équation de la forme (1)

$$(6)\ (AB' + (B'C)r + [(B'D) + (AC')]s + (AD')t + (CD')(rt - s^2) = 0.$$

En appliquant la transformation de contact au système (5) on obtient d'abord

$$(7) \ldots \left\{\begin{array}{l} (Aa_1 + Ba_2 + Ca_4 + Da_5)dx' + (Ab_1 + Bb_2 + Cb_4 + Db_5)dy + \\ +(Ac_1 + Bc_2 + Cc_4 + Dc_5)dz' + (Ad_1 + Bd_2 + Cd_4 + Dd_5)dp' + \\ + (Ae_1 + Be_2 + Ce_4 + De_5)dq' = 0, \\ (A'a_1 + B'a_2 + C'a_4 + D'a_5)dx' + (A'b_1 + B'b_2 + C'b_4 + D'b_5)dy' + \\ + (A'c_1 + B'c_2 + C'c_4 + D'c_5)dz' + (A'd_1 + B'd_2 + C'd_4 + \\ + D'd_5)dp' + (A'e_1 + B'e_2 + C'e_4 + D'e_5)dq' = 0, \\ dz' - p'dx' - q'dy' = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on écrit les deux premières de ces équations

$$Pdx' + Qdy' + Rdz' + Sdp' + Tdq' = 0,$$
$$P'dx' + Q'dy' + R'dz' + S'dp' + T'dq' = 0,$$

l'équation d'Ampère correspondant au système de caractéristiques (7) prend la forme

$$8) \ldots \left\{\begin{array}{l} (PQ') + (RQ')p' + (PR')q' + [(SQ') + (SR')q']r' + \\ + [(PS') + (TQ') + (RS')p' + (TR')q']s' + \\ + [(PT') + (RT')p']t' + (ST')(r't' - s'^2) = 0, \end{array}\right.$$

où les coefficients ont les valeurs suivantes

$$(PQ') = (AB')(a_1b_2) + (AC')(a_1b_4) + (AD')(a_1b_5)$$
$$+ (BC')(a_2b_4) + (BD')(a_2b_5) + (CD')(a_4b_5),$$

$$(RQ') = (AB')(b_2c_1) + (AC')(b_4c_1) + (AD')(b_5c_1)$$
$$+ (BC')(b_4c_2) + (BD')(b_5c_2) + (CD')(b_5c_4),$$

$$(PR') = (AB')(a_1c_2) + (AC')(a_1c_4) + (AD')(a_1c_5)$$
$$+ (BC')(a_2c_4) + (BD')(a_2c_5) + (CD')(a_4c_5),$$

$$(SQ') = (AB')(b_2d_1) + (AC')(b_4d_1) + (AD')(b_5d_1)$$
$$+ (BC')(b_4d_2) + (BD')(b_5d_2) + (CD')(b_5d_4),$$

$$(SR') = (AB')(c_2d_1) + (AC')(c_4d_1) + (AD')(c_5d_1)$$
$$+ (BC')(c_4d_2) + (BD')(c_5d_2) + (CD')(c_5d_4),$$

$$\begin{aligned}
(PS') = {} & (AB')(a_1d_2) + (AC')(a_1d_4) + (AD')(a_1d_5) \\
& + (BC')(a_2d_4) + (BD')(a_2d_5) + (CD')(a_4d_5), \\
(TQ') = {} & (AB')(b_2e_1) + (AC')(b_4e_1) + (AD')(b_5e_1) \\
& + (BC')(b_4e_2) + (BD')(b_5e_2) + (CD')(b_5e_4), \\
(TR') = {} & (AB')(c_2e_1) + (AC')(c_4e_1) + (AD')(c_5e_1) \\
& + (BC')(c_4e_2) + (BD')(c_5e_2) + (CD')(c_5e_4), \\
(PT') = {} & (AB')(a_1e_2) + (AC')(a_1e_4) + (AD')(a_1e_5) \\
& + (BC')(a_2e_4) + (BD')(a_2e_5) + (CD')(a_4e_5), \\
(ST') = {} & (AB')(d_1e_2) + (AC')(d_1e_4) + (AD')(d_1e_5) \\
& + (BC')(d_2e_4) + (BD')(d_2e_5) + (CD')(d_4e_5).
\end{aligned}$$

Il nous reste à démontrer que cette équation (8) est identique à l'équation que l'on obtient en appliquant directement la transformation de contact à l'équation (6).

Or, d'après les relations (4), on a

$$r = \frac{A_4B_2 - A_2B_4}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{T_1}{N},$$

$$s = \frac{A_1B_4 - A_4B_1}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{A_5B_2 - A_2B_5}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{T_2}{N},$$

$$t = \frac{A_1B_5 - A_5B_1}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{T_3}{N},$$

par suite

$$rt - s^2 = \frac{(A_4B_2 - A_2B_4)(A_1B_5 - A_5B_1) - (A_1B_4 - A_4B_1)(A_5B_2 - A_2B_5)}{(A_1B_2 - A_2B_1)^2}$$

$$= \frac{A_4B_5 - A_5B_4}{A_1B_2 - A_2B_1} = \frac{T_4}{N}.$$

L'équation transformée s'écrit donc

$$(9)\quad (AB')N + (CB')T_1 + [(DB') + (AC')]T_2 + (AD')T_3 + (CD')T_4 = 0,$$

où

$$\begin{aligned}
N = {} & (a_1b_2) + (b_2c_1)p' + (a_1c_2)q' + (b_2d_1)r' + [(b_2e_1) + (a_1d_2)]s' + \\
& + (a_1a_2)t' + (c_1d_2)p's' + (c_1e_2)p't' + (c_2d_1)q'r' + \\
& + (c_2e_1)q's' + (d_1e_2)(r't' - s'^2), \\
T_1 = {} & (a_4b_2) + (b_2c_4)p' + (a_4c_2)q' + (b_2d_4)r' + [(a_4d_2) + (b_2e_4)]s' + \\
& + (a_4e_2)t' + (c_4d_2)p's' + (c_4e_2)p't' + (c_2d_4)q'r' + \\
& + (c_2e_4)q's' + (d_4e_2)(r't' - s'^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_2 = \; & (a_3b_2) + (b_2c_3)p' + (a_3c_2)q' + (b_2d_3)r' + [(a_3d_2) + (b_2e_3)]s' + \\
& + (a_3e_2)t' + (c_3d_2)p's' + (c_3e_2)p't' + (c_2d_3)q'r' + \\
& + (c_2e_3)q's' + (d_3e_2)(r't' - s'^2), \\
= \; & (a_1b_4) + (b_4c_1)p' + (a_1c_4)q' + (b_4d_1)r' + [(b_4e_1) + (a_1d_4)]s' + \\
& + (a_1e_4)t' + (c_1d_4)p's' + (c_1e_4)p't' + (c_4d_1)q'r' + \\
& + (c_4e_1)q's' + (d_1e_4)(r't' - s'^2), \\
T_3 = \; & (a_1b_5) + (b_5c_1)p' + (a_1c_5)q' + (b_5d_1)r' + [(a_1d_5) + (b_5e_1)]s' + \\
& + (a_1e_5)t' + (c_1d_5)p's' + (c_1e_5)p't' + (c_5d_1)q'r' + \\
& + (c_5e_1)q's' + (d_1e_5)(r't' - s'^2), \\
T_4 = \; & (a_4b_5) + (b_5c_4)p' + (a_4c_5)q' + (b_5d_4)r' + [(b_5e_4) + (a_4d_5)]s' + \\
& + (a_4e_5)t' + (c_4d_5)p's' + (c_4e_5)p't' + (c_5d_4)q'r' + \\
& + (c_5e_4)q's' + (d_4e_5)(r't' - s'^2).
\end{aligned}$$

En réunissant enfin les coefficients des mêmes quotients différentiels on se convaincra aisément que cette équation est identique avec l'équation (8), *c.q.f.d.*

D 6 e.

SUR LES FONCTIONS CYLINDRIQUES DE PREMIÈRE ESPÈCE

PAR

J. G. RUTGERS.
(Alkmaar).

Le théorème de CAUCHY sur la multiplication de deux séries infinies, appliqué dans le sens inverse, nous permet de déduire d'une manière très simple plusieurs résultats connus dans la théorie des fonctions de BESSEL, ce que nous ferons voir dans ce mémoire. Ensuite nous nous proposons de donner, en appliquant cette même méthode, de nouveaux résultats, parmi lesquels se trouvera la formule suivante:

$$\frac{I_{\nu+\rho+1}(x)}{\rho+1} = \int_0^x I_\nu(x-\beta)\, I_\rho(\beta) \frac{d\beta}{\beta},$$

ν et ρ étant des nombres arbitraires, dont la partie réelle est plus grande que -1.

Cette formule a été déjà démontrée par M. W. KAPTEYN, supposant cependant ν et ρ entiers positifs [1]) L'idée qu'elle existerait aussi pour toutes les valeurs indiquées de ν et de ρ, a été justement le point de départ pour les recherches suivantes.

1. Symboliquement le théorème de CAUCHY, dont il s'agit, s'écrit ainsi

$$1) \ldots \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \phi(n, m) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{s} \phi(p, s-p),$$

où, en posant

$$\sum_{m=0}^{\infty} \phi(n, m) = \psi(n),$$

$\sum_{m=0}^{\infty} \phi(n, m)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \psi(n)$ sont des séries absolument convergentes.

---

[1]) Mémoires de la Socié'é royale des Sciences de Liége, 3e série t. VI, 1905.

Une expression de la forme du second membre de l'équation (1) peut donc être remplacée par celle du premier membre, si les séries infinies correspondantes sont absolument convergentes, laquelle condition est remplie dans tous les cas, dont nous nous occuperons.

2. En développant en série, nous avons:

$$\cos(x \sin\phi) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s} \sin^{2s}\phi}{(2s)!},$$

tandisque

$$a) \ . \ . \ . \ \sin^{2s}\phi = \frac{1}{2^{2s}} \sum_{p=0}^{s} \varepsilon_{2p} (-1)^p \binom{2s}{s-p} \cos 2p\phi,$$

où $\varepsilon_0 = 1$ et $\varepsilon_{2p} = 2$ pour $p > 0$,
par conséquent:

$$\cos(x \sin\phi) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \sum_{p=0}^{s} \varepsilon_{2p} (-1)^p \frac{\cos 2p\phi}{(s-p)!\,(s+p)!},$$

ou, en appliquant maintenant l'inverse de (1):

$$\cos(x \sin\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n} \cos 2n\phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2n}}{m\,\Gamma(m+2n+1)},$$

et en introduisant la fonction cylindrique de première espèce:

$$2) \ . \ . \ . \ . \ . \ \cos(x \sin\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n} \mathrm{I}_{2n}(x) \cos 2n\phi.$$

Nous trouvons également:

$$\sin(x \sin\phi) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{x^{2s+1} \sin^{2s+1}\phi}{(2s+1)!},$$

tandis que

$$b) \ . \ \sin^{2s+1}\phi = \frac{1}{2^{2s+1}} \sum_{p=0}^{s} \varepsilon_{2p+1} (-1)^p \binom{2s+1}{s-p} \sin(2p+1)\phi,$$

par conséquent d'après (1):

$$\sin(x \sin\phi) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+1} \sum_{p=0}^{s} \varepsilon_{2p+1} (-1)^p \frac{\sin(2p+1)\phi}{(s-p!(s+p+1)!} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n+1} \sin(2n+1)\phi \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2n+1}}{m!\,\Gamma(m+2n+2)}$$

ou

$$3) \quad \ldots \quad \sin(x \sin\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n+1} I_{2n+1}(x) \sin(2n+1)\phi.$$

De ces formules on déduit aisément la première intégrale de Bessel pour la fonction cylindrique de première espèce:

$$4) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(m\phi - x\sin\phi)\, d\phi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n(x) \int_0^{\pi} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, n\phi \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\, m\phi d\phi \left\{ n \begin{matrix}\text{pair}\\ \text{impair}\end{matrix} \right. = I_m(x),$$

m étant un nombre entier positif quelconque.

On obtient également:

$$5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(x\sin\phi)\cos 2m\phi d\phi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n} I_{2n}(x) \int_0^{\pi} \cos 2n\phi \cos 2m\phi d\phi = I_{2m}(x)$$

$$6) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(x\sin\phi)\sin(2m+1)\phi d\phi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n+1} I_{2n+1}(x) \int_0^{\pi} \sin(2n+1)\phi \sin(2m+1)\phi d\phi = I_{2m+1}(x).$$

Posons: $e^{i\phi} = t$, il resulte d'après (2) et (3), en substituant:

$$\sin\phi = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(t - \frac{1}{t}\right),$$

$$\cos 2n\phi = \frac{e^{2ni\phi} + e^{-2ni\phi}}{2} = \frac{1}{2}\left(t^{2n} + \frac{1}{t^{2n}}\right),$$

et

$$\sin(2n+1)\phi = \frac{e^{(2n+1)i\phi} - e^{-(2n+1)i\phi}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(t^{2n+1} - \frac{1}{t^{2n+1}}\right):$$

$$e^{\frac{x}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)} = \cos(x\sin\phi) + i\sin(x\sin\phi) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2}\left\{t^n + \frac{(-1)^n}{t^n}\right\} I_n(x),$$

ou

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = I_0(x) + tI_1(x) + t^2 I_2(x) + \ldots + t^n I_n(x) + \ldots -$$
$$- \frac{1}{t} I_1(x) + \frac{1}{t^2} I_2(x) - \ldots + \frac{(-1)^n}{t^n} I_n(x) - \ldots$$

par conséquent, en introduisant les résidus de CAUCHY:

$$7) \;.\; I_n(x) = \mathcal{E}_{t=0} \frac{e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}}{t_{n+1}} = (-1)^n \mathcal{E}_{t=0}\, e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} \,.\, t^{n-1}.$$

3. D'après le paragraphe précédent il est clair que des expressions comme (a) et (b) font la base de nos recherches.

Si nous partons de la suivante:

$$c) \ldots\ldots \left(\frac{z}{x}\right)^{2s} = \sum_{p=0}^{s} (1)^p \binom{s}{p} \left(1 - \frac{z^2}{x^2}\right)^p,$$

il résultera, en multipliant les deux membres par

$$\frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}}{s!\,\Gamma(s+\nu+1)}$$

et en prenant la somme de 0 à ∞:

$$d) \ldots\ldots \left(\frac{x}{z}\right)^{\nu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{z}{2}\right)^{2s+\nu}}{s!\,\Gamma(s+\nu+1)} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu}}{\Gamma(s+\nu+1)} \sum_{p=0}^{s} \frac{(-1)^p}{p!\,(s-p)!} \left(1 - \frac{z^2}{x^2}\right)^p,$$

ou d'après l'équation (1), appliquée dans le sens inverse:

$$8) \ldots\ldots \left(\frac{x}{z}\right)^{\nu} I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2 - z^2)^n}{2^n n!\, x^n} I_{n+\nu}(x),$$

ν, z et x étant des nombres arbitraires.

Un autre résultat connu donne (d), si nous introduisons:

$$\frac{1}{\Gamma(s+\nu+1)} = \frac{1}{\Gamma(p+\rho+1)\Gamma(s-p+\nu-\rho)} \int_0^1 \alpha^{p+\rho} (1-\alpha)^{s-p+\nu-\rho-1} d\alpha.$$

Après une légère réduction, on obtient, en appliquant de nouveau l'inverse du théorème, exprimé par (1):

$$\left(\frac{x}{z}\right)^{\nu} I_{\nu}(z) =$$

$$= \frac{x^{\nu-\rho}}{2\sqrt{z^2-x^2}^{\nu-\rho-1}} \int_0^1 I_{\nu}(x\sqrt{\alpha})\, I_{\nu-\rho-1}(\sqrt{z^2-x^2}\sqrt{1-\alpha})\, \alpha^{\frac{\rho}{2}}(1-\alpha)^{\frac{\nu-\rho}{2}-\frac{1}{2}} d\alpha,$$

ou, en posant

$$\nu = \mu + \rho + 1, \ \alpha = \sin^2\phi \ \text{ et } \ z^2 = x^2 + y^2:$$

9) . . . $$\frac{x^{\rho} y^{\mu}}{\sqrt{x^2+y^2}^{\mu+\rho+1}} I_{\mu+\rho+1}(\sqrt{x^2+y^2}) =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_{\rho}(x \sin\phi)\, I_{\mu}(y\cos\phi) \sin^{\rho+1}\phi \cos^{\mu+1}\phi\, d\phi,$$

μ et ρ étant des nombres arbitraires, dont la partie réelle est plus grande que -1, d'après l'introduction de l'intégrale d'Euler —, ce que nous écrirons dans les paragraphes suivants ainsi: $R(\mu) > -1$, $R(\rho) > -1$.

4 En posant dans l'équation (a): $\phi = \frac{\pi}{2}$, il vient:

e) . . . . . $$\frac{2^{2s}}{(2s)!} = \sum_{p=0}^{s} \frac{\varepsilon_{2p}}{(s-p)!\,(s+p)!}$$

Après la multiplication des deux membres par

$$(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}$$

et après la sommation de 0 à ∞, on en déduit, en appliquant l'inverse de (1):

f) . . . $$\cos x = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} \sum_{p=0}^{s} \frac{\varepsilon_{2p}}{(s-p)!\,(s+p)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_{2n} (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2n}}{m!\,\Gamma(m+2n+1)},$$

ou

$$\cos x - \sum_{n=0}^{p} \varepsilon^{2n} (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2n}}{m!\,\Gamma(m+2n+1)} =$$

$$= \sum_{n=p+1}^{\infty} \varepsilon_{2n} (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2n}}{m!\,\Gamma(m+2n+1)} =$$

$$= (-1)^{p+1} x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2p+1}}{m!\,\Gamma(m+2n+2p+3)},$$

or, en substituant successivement:

$$\frac{1}{\Gamma(m+2n+2p+3)} = \frac{1}{(2n)!\,\Gamma(m+2p+2)} \int_0^1 \alpha^{m+2p+1} (1-\alpha)^{2n} d\alpha$$

et

$$\frac{1}{\Gamma(m+2n+2p+3)} = \frac{1}{(2n+1)!\,\Gamma(m+2p+1)} \int_0^1 \alpha^{m+2p} (1-\alpha)^{2n+1} d\alpha,$$

et en introduisant la fonction de Bessel, on obtient:

$$10) \ldots \int_0^1 I_{2p+1}(x\sqrt{\alpha}) \cos \frac{x}{2}(1-\alpha) . \alpha^p \sqrt{\alpha}\, d\alpha = \int_0^1 I_{2p}(x\sqrt{\alpha}) \sin \frac{x}{2}(1-\alpha) . \alpha^p d\alpha =$$

$$= \frac{(-1)^p}{x} \left\{ \sum_{n=0}^{p} \varepsilon_{2n} (-1)^n I_{2n}(x) - \cos x \right\},$$

p étant un nombre entier positif quelconque d'après l'intégrale d' Euler.

De l'équation (γ) on peut aussi déduire successivement:

$$\cos x + I_0(x) = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(2n+m)!} =$$

$$= 2 \cos \frac{x}{2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(2n+m)!} =$$

$$= 2\cos\frac{x}{2} - x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+1}}{\Gamma(m+2)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{\Gamma(2n+m+2)},$$

et

$$\cos x + I_0(x) =$$

$$= 2\cos\frac{x}{2} - x\sin\frac{x}{2} + 2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m!}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(2n+m)!} =$$

$$= 2\cos\frac{x}{2} - x\sin\frac{x}{2} + x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2}}{\Gamma(m+3)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{\Gamma(2n+m+3)},$$

ou, en substituant:

$$\frac{1}{\Gamma(2n+m+2)} = \frac{1}{m!\,(2n)!}\int_0^1 \alpha^m(1-\alpha)^{2n}d\alpha$$

et

$$\frac{1}{\Gamma(2n+m+3)} = \frac{1}{m!\,(2n+1)!}\int_0^1 \alpha^m(1-\alpha)^{2n+1}d\alpha,$$

on aura respectivement:

$$11).\int_0^1 I_1(x\sqrt{\alpha})\cos\frac{x}{2}(1-\alpha)\cdot\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{x}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{x}I_0(x) - \frac{1}{x}\cos x.$$

$$12)\quad\ldots\int_0^1 I_2(x\sqrt{\alpha})\sin\frac{x}{2}(1-\alpha).\frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{x}\cos x + \sin\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\cos\frac{x}{2} + \frac{1}{x}I_0(x).$$

5. De l'équation (b) on déduit pour $\phi = \frac{\pi}{2}$:

$$\eta)\quad\ldots\quad\frac{2^{2s+1}}{(2s+1)!} = \sum_{p=0}^{s}\frac{\varepsilon_{2p+1}}{(s-p)!\,(s+p+1)!}\quad.$$

En multipliant ici les deux membres par

$$(-1)^p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+1}$$

et en continuant également comme dons le paragraphe précédent, on trouve aisément les formules suivantes:

$$13) \quad . \quad . \quad . \int_0^1 I_{2p+2}(x\sqrt{\alpha}) \cos\frac{x}{2}(1-\alpha) \,.\, \alpha^{p+1} d\alpha =$$

$$= \int_0^1 I_{2p+1}(x\sqrt{\alpha}) \sin\frac{x}{2}(1-\alpha) \,.\, \alpha^p \sqrt{\alpha} d\alpha =$$

$$= \frac{(-1)^p}{x} \left\{ \sum_{n=0}^{p} \varepsilon_{2n+1} (-1)^p I_{2n+1}(x) - \sin x \right\},$$

— p étant un nombre entier positif quelconque; dans la première intégrale aussi la valeur $p = -1$ est admissible, d'après l'intégrale d'Euler qu'on a introduite —

et:

$$14) \, . \, . \int_0^1 I_1(x\sqrt{\alpha}) \sin\frac{x}{2}(1-\alpha) \,.\, \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{x} \sin\frac{x}{2} - \frac{1}{x} \sin x.$$

Des intégrales (10) et (13) on déduit encore les intégrales suivantes:

$$15) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_0^1 I_{2p}(x\sqrt{\alpha}) \cos\frac{x\alpha}{2} \,.\, \alpha^p d\alpha =$$

$$= \frac{(-1)^p}{x} \left\{ \sin\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} \sum_{n=0}^{p} \varepsilon_{2n}(-1)^n I_{2n}(x) - \cos\frac{x}{2} \sum_{n=0}^{p-1} \varepsilon_{2n-1}(-1)^n I_{2n+1}(x) \right\},$$

$$16) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_0^1 I_{2p}(x\sqrt{\alpha}) \sin\frac{x\alpha}{2} \,.\, \alpha^p d\alpha =$$

$$= \frac{(-1)^p}{x} \left\{ \cos\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} \sum_{n=0}^{p} \varepsilon_{2n}(-1)^n I_{2n}(x) - \sin\frac{x}{2} \sum_{n=0}^{p-1} \varepsilon_{2n+1}(-1)^n I_{2n+1}(x) \right\},$$

$$17) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \int_0^1 I_{2p+1}(x\sqrt{\alpha}) \cos\frac{x\alpha}{2} \,.\, \alpha^p \sqrt{\alpha} d\alpha =$$

$$= \frac{(-1)^p}{x} \left\{ \cos\frac{x}{2} \sum_{n=0}^{p} \varepsilon_{2n}(-1)^n I_{2n}(x) + \sin\frac{x}{2} \sum_{n=0}^{p} \varepsilon_{2n+1}(-1)^n I_{2n+1}(x) - \cos\frac{x}{2} \right\},$$

18) . . . . . $\int_0^1 I_{2p+1}(x\sqrt{\alpha}) \sin \frac{x\alpha}{2} \cdot \alpha^p \sqrt{\alpha} d\alpha =$

$$= \frac{(-1)^p}{x} \left\{ \sin \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{p} \varepsilon_{2n} (-1)^n I_{2n}(x) - \cos \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{p} \varepsilon_{2n+1} (-1)^n I_{2n+1}(x) + \sin \frac{x}{2} \right\},$$

p étant un nombre entier positief quelconque.

Également on obtient d'après (11) et (14):

$$19) . \int_0^1 I_1(x\sqrt{\alpha}) \cos \frac{x\alpha}{2} \cdot \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{x}{2} \left\{ 1 + I_0(x) \right\},$$

$$20) . \int_0^1 I_1(x\sqrt{\alpha}) \sin \frac{x\alpha}{2} \cdot \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{x} \sin \frac{x}{2} \left\{ 1 - I_0(x) \right\}.$$

6. Aussi en partant des formules déjà connues dans la théorie des fonctions de BESSEL, on peut obtenir des expressions de la forme suivante:

h) . . . . . . $\sum_{p=0}^{s} \phi(s, p) = \psi(s),$

dont se déduisent de la manière indiquée de nouveaux résultats.

Par exemple, de la formule:

$$\int_0^\infty I_\nu(tx) e^{-ty} t^\nu dt = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(2x)^\nu}{(x^2 + y^2)^{\nu+\frac{1}{2}}} \text{ [1] } \left(\begin{array}{c} |x| < |y| \\ R(\nu) > -\frac{1}{2} \end{array} \right)$$

on déduit, en remplaçant x par ix et en posant $y = 1 + \frac{x^2}{4}$, la suivante:

$$\int_0^\infty I_\nu(itx) e^{-\left(1+\frac{x^2}{4}\right)t} t^\nu dt = \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(2ix)_\nu}{\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)^{2\nu+1}}$$

et en substituant:

$$I_\nu(itx) = i^\nu \sum_{n=0}^\infty \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} t^{2n+\nu},$$

[1]) NIELSEN, Handbuch der Cylinderfunktionen, 1904; p. 196, (11).

et

$$e^{-\frac{x^2}{4}t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m!} t^{2m}$$

l'intégrale s'écrit:

$$i^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m!} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{2n+m+2\nu} dt =$$

$$= i^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}}{m!} \Gamma(2n+m+2\nu+1)$$

ou d'après (1):

$$i^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu} \sum_{p=0}^{s} \frac{(-1)^p \Gamma(2s-p+2\nu+1)}{p!\,(s-p)!\,\Gamma(s-p+\nu+1)},$$

tandis que le second membre sera pour $\frac{x}{2} < 1$:

$$i^\nu 2^{2\nu} \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(s+2\nu+1)}{s!\,\Gamma(2\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu},$$

par conséquent, en égalant les coëfficients de $\frac{x}{2}$ au même degré:

$$k) \;..\sum_{p=0}^{s} \frac{(-1)^p \Gamma(2s-p+2\nu+1)}{p!\,(s-p)!\,\Gamma(s-p+\nu+1)} = \frac{2^{2\nu}\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\nu+1)\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma(s+2\nu+1)}{s!} =$$

$$= \frac{\Gamma(s+2\nu+1)}{\Gamma(\nu+1)\,s!}, \quad (R(\nu) > -\tfrac{1}{2})$$

d'après la propriété suivante des fonctions Γ:

$$l) \;.\;.\;.\;.\;.\; 2^{2z-1}\,\Gamma(z)\,\Gamma(z+\tfrac{1}{2}) = \Gamma(2z)\sqrt{\pi}.$$

En substituant:

$$\Gamma(2s-p+2\nu+1) = \frac{\Gamma(2s+2\nu+\rho+2)}{\Gamma(p+\rho+1)} \int_0^1 \alpha^{2s-p+2\nu}(1-\alpha)^{p+\rho} d\alpha,$$

et en multipliant les deux membres de l'idensité (k) par

$$\frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu+\rho}}{\Gamma(2s+2\nu+\rho+2)},$$

il résulte, après la sommation de 0 à ∞:

$$\int_0^1 \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu+\rho} \sum_{p=0}^{s} \frac{(-1)^p \alpha^{2s-p+2\nu}(2-\alpha)^{p+\rho}}{p!(s-p)!\,\Gamma(s-p+\nu+1)\Gamma(p+\rho+1)}\, d\alpha =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\Gamma(s+2\nu+1)}{s!\,\Gamma(2s+2\nu+\rho+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu+\rho},$$

et alors d'après l'inverse de (1) et en introduisant les fonctions de **Bessel**:

$$21) \;.\;. \int_0^1 I_\nu(x\alpha)\, I_\rho\left(ix\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\right) \alpha^{\nu-\frac{\rho}{2}} (1-\alpha)^{\frac{\rho}{2}}\, d\alpha =$$

$$= \frac{i^\rho}{\Gamma(\nu+1)} \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{\Gamma(s+2\nu+1)}{s!\,\Gamma(2s+2\nu+\rho+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu+\rho},\; \begin{pmatrix} R(\nu) > -\frac{1}{2} \\ R(\rho) > -1 \end{pmatrix}.$$

Cette formule donne plusieurs résultats pour des valeurs spéciales de ν et de ρ.

1°. En posant successivement $\rho = 2\nu$ et $\rho = 2\nu - 1$ l'expression

$$\frac{\Gamma(s+2\nu+1)}{\Gamma(2s+2\nu+\rho+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu+\rho}$$

se réduit d'après (l) respectivement à

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu+1}} \cdot \frac{\left(\frac{x}{4}\right)^{2s+3\nu}}{\Gamma(s+2\nu+\frac{3}{2})} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\nu-1}} \cdot \frac{\left(\frac{x}{4}\right)^{2s+3\nu-1}}{\Gamma(s+2\nu+\frac{1}{2})},$$

par conséquent on déduit de (21):

$$22) \;.\;. \int_0^1 I_\nu(x\alpha)\, I_{2\nu}\left(ix\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\right)(1-\alpha)^\nu\, d\alpha =$$

$$= \frac{i^{2\nu}\sqrt{\pi}\, x^{\nu-\frac{1}{2}}}{2^{3\nu}\,\Gamma(\nu+1)}\, I_{2\nu+\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right),\; (R(\nu) > -\tfrac{1}{2})$$

$$23) \ldots \int_0^1 I_\nu(x\alpha)\, I_{2\nu-1}\left(ix\sqrt{\alpha(1-\alpha)}\right)(1-\alpha)^{\nu-\frac{1}{2}}\sqrt{\alpha}\,.\,d\alpha =$$

$$= \frac{i^{2\nu-1}\sqrt{\pi}\,.\,x^{\nu-\frac{1}{2}}}{2^{3\nu}\,\Gamma(\nu+1)}\, I_{2\nu-\frac{1}{2}}\left(\frac{x}{2}\right), \quad (R(\nu)>0).$$

En posant dans (22) successivement $\nu = 0$ et $\nu = \frac{1}{2}$, et dans (23) $\nu = \frac{1}{2}$ et $\nu = 1$, on obtient, en appliquant les formules connues:

$$I_{\frac{1}{2}}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}}\sin y \quad \text{et} \quad I_{\frac{3}{2}}(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi y}}\left(\frac{\sin y}{y} - \cos y\right):$$

$$24) \ldots \int_0^1 I_0(xa)\, I_0\left(ix\sqrt{a(1-a)}\right) da = \frac{2}{x}\sin\frac{x}{2}$$

$$25) \ldots \int_0^1 I_1\left(ix\sqrt{a(1-a)}\right)\sin(xa)\sqrt{\frac{1-a}{a}}\,da = \cos\frac{x}{2} - \frac{2}{x}\sin\frac{x}{2}$$

$$26) \ldots \int_0^1 I_0\left(ix\sqrt{a(1-a)}\right)\sin(xa)\,da = \sin\frac{x}{2}$$

$$27) \ldots \int_0^1 I_1(xa)\, I_1\left(ix\sqrt{a(1-a)}\right)\sqrt{a(1-a)}\,da = \frac{i}{2x}\sin\frac{x}{2} - \frac{i}{4}\cos\frac{x}{2}.$$

2°. Si l'on pose $\nu = 0$ et successivement: $\rho = 2m$ et $\rho = 2m+1$, m étant un nombre entier positif quelconque, on déduit de (21):

$$28) \ldots \int_0^1 I_0(xa)\, I_{2m}\left(ix\sqrt{a(1-a)}\right)\left(\frac{1-a}{a}\right)^m da =$$

$$= (-1)^m \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+2m}}{\Gamma(2s+2m+2)} = \sum_{s=m}^{\infty} \frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{\Gamma(2s+1)} =$$

$$= \frac{2}{x}\sin\frac{x}{2} - \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{(2s+1)!}.$$

$$29) \ldots \int_0^1 I_0(xa)\, I_{2m+1}\left(ix\sqrt{a(1-a)}\right)\left(\frac{1-a}{a}\right)^{m+\frac{1}{2}} da =$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{i}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+2m+2}}{\Gamma(2s+2m+3)} = \frac{1}{i}\sum_{s=m+1}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-1}}{(2s)!} =$$

$$= \frac{2}{ix}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{i}\sum_{s=0}^{m}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s-1}}{(2s)!}.$$

7. De la formule

$$\int_0^\infty I_\nu(tx)\, e^{-ty}\, dt = \frac{(\sqrt{x^2+y^2}-y)^\nu}{x^\nu\sqrt{x^2+y^2}}\,[1], \quad \left(\begin{array}{c}|x|<|y|\\ R(\nu)>-1\end{array}\right)$$

on déduit, en remplaçant x par ix et en posant $y = 1 + \frac{x^2}{4}$ la suivante:

$$\int_0^\infty I_\nu(itx)\, e^{-\left(1+\frac{x^2}{4}\right)t} dt = \frac{i^\nu\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2},$$

et en continuant également comme dans le paragraphe précédent, on trouvera l'autre identité:

$$m) \ldots \sum_{p=0}^{s}\frac{(-1)^p\,\Gamma(2s-p+\nu+1)}{p!\,(s-p)!\,\Gamma(s-p+\nu+1)} = 1, \quad (R(\nu)>-1).$$

En substituant maintenant:

$$\Gamma(2s-p+\nu+1) = \frac{\Gamma(2s+\nu+\rho+2)}{\Gamma(p+\rho+1)}\int_0^1 a^{2s-p+\nu}(1-a)^{p+\rho} da,$$

et en multipliant les deux membres de (m) par

$$\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu+\rho}}{\Gamma(2s+\nu+\rho+2)}$$

[1]) Nielsen, loc. cit. p. 186, (13).

il résultera, après la sommation de 0 à ∞, et en appliquant (1) dans le sens inverse:

$$30) \quad \ldots \int_0^1 I_\nu(xa) I_\rho(ix\sqrt{a(1-a)}) \left(\frac{1-a}{a}\right)^{\frac{\rho}{2}} da =$$

$$= i^\rho \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu+\rho}}{\Gamma(2s+\nu+\rho+2)}, \quad \binom{R(\nu) > -1}{R(\rho) > -1}.$$

Posons successivement $\rho = 2m - \nu$ et $\rho = 2m - \nu - 1$, m étant un nombre entier positif quelconque, nous trouverons respectivement:

$$31) \quad \ldots \int_0^1 I_\nu(xa) I_{2m-\nu}(ix\sqrt{a(1-a)}) \left(\frac{1-a}{a}\right)^{m-\frac{\nu}{2}} da =$$

$$= \frac{(-1)^m}{i^\nu} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+2m}}{\Gamma(2s+2m+2)} = \frac{1}{i^\nu} \sum_{s=m}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{(2s+1)!} =$$

$$= \frac{1}{i^\nu} \left\{ \frac{2}{x} \sin \frac{x}{2} - \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s}}{(2s+1)!} \right\}, \quad (2m+1 > R(\nu) > -1).$$

$$32) \quad \ldots \int_0^1 I_\nu(xa) I_{2m-1}(ix\sqrt{a(1-a)}) \left(\frac{1-a}{a}\right)^{m-\frac{\nu+1}{2}} da =$$

$$= \frac{(-1)^m}{i^{\nu+1}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s+2m-1}}{\Gamma(2s+2m+1)} = \frac{1}{i^{\nu+1}} \sum_{s=m}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-1}}{(2s)!} =$$

$$= \frac{1}{i^{\nu+1}} \left\{ \frac{2}{x} \cos \frac{x}{2} - \sum_{s=0}^{m-1} \frac{(-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s-1}}{(2s)!} \right\}, \quad (2m > R(\nu) > -1).$$

8. L'identité:

$$\frac{1}{(1-x)^{\nu+\rho+1}} = \frac{1}{(1-x)^{\nu+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{(1-x)^{\rho+\frac{1}{2}}}$$

s'écrit, en développant les fonctions pour $x < 1$ en séries absolument convergentes:

$$\frac{1}{\Gamma(\nu+\rho+1)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(s+\nu+\rho+1)}{s!}x^s =$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\nu+\frac{1}{2})}{n!}x^n \times \frac{1}{\Gamma(\rho+\frac{1}{2})}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(m+\rho+\frac{1}{2})}{m!}x^m,$$

ou d'après (1):

$$\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,\Gamma(\rho+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+\rho+1)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(s+\nu+\rho+1)}{s!}x^s =$$

$$=\sum_{s=0}^{\infty}x^s\sum_{p=0}^{s}\frac{\Gamma(p+\nu+\frac{1}{2})\,\Gamma(s-p+\rho+\frac{1}{2})}{p!\,(s-p)!},$$

par conséquent, en égalant les coefficients de x au même degré:

$$n) \quad \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,\Gamma(\rho+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+\rho+1)}\cdot\frac{\Gamma(s+\nu+\rho+1)}{s!} =$$

$$=\sum_{p=0}^{s}\frac{\Gamma(p+\nu+\frac{1}{2})\,\Gamma(s-p+\rho+\frac{1}{2})}{p!\,(s-p)!}.$$

En substituant maintenant d'après (l):

$$\Gamma(z)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(2z)}{2^{2z-1}\,\Gamma(z+\frac{1}{2})}$$

on aura:

$$n') \quad \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,\Gamma(\rho+\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\nu+\rho+1)}\cdot\frac{\Gamma(2s+2\nu+2\rho+2)}{s!\,\Gamma(s+\nu+\rho+\frac{3}{2})} =$$

$$=\sum_{p=0}^{s}\frac{\Gamma(2p+2\nu+1)\,\Gamma(2s-2p+2\rho+1)}{p!\,(s-p)!\,\Gamma(p+\nu+1)\,\Gamma(s-p+\rho+1)}.$$

En multipliant les deux membres de cette équation par

$$\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu+\rho}}{\Gamma(2s+2\nu+2\rho+2)}$$

et en substituant:

$$\frac{\Gamma(2p+2\nu+1)\,\Gamma(2s-2p+\rho+1)}{\Gamma(2s+2\nu+2\rho+2)}=\int_0^1 \alpha^{2s-2p+2\rho}(1-\alpha)^{2p+2\nu}\,d\alpha,$$

il résultera, après la sommation de 0 à ∞, en appliquant (1) dans le sens inverse:

$$\frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,\Gamma(\rho+\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\nu+\rho+1)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu+\rho}}{s!\,\Gamma(s+\nu+\rho+\frac{3}{2})}=$$

$$=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}(1-\alpha)^{2n+\nu}}{n!\,\Gamma(n+\nu+1)}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\rho}\alpha^{2m+\rho}}{m!\,\Gamma(m+\rho+1)}\cdot\alpha^{\rho}(1-\alpha)^{\nu}d\alpha,$$

ou, en introduisant les fonctions de Bessel, et après une légère réduction:

$$33)\;..\;\frac{2^{\nu+\rho}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\,\Gamma(\rho+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\nu+\rho+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+\rho+\frac{1}{2}}I_{\nu+\rho+\frac{1}{2}}(x)=$$

$$=\int_0^1 I_\nu(x-\beta)\,I_\rho(\beta)(x-\beta)^\nu\beta^\rho\,d\beta\,,\quad\left(\begin{matrix}R(\nu)>-\frac{1}{2}\\R(\rho)>-\frac{1}{2}\end{matrix}\right).$$

Posons: $\rho=\frac{1}{2}$, alors nous obtiendrons:

$$34)\;.\frac{x^\nu}{2\nu+1}I_{\nu+1}(x)=\int_0^x I_\nu(x-\beta)(\sin\beta)(x-\beta)^\nu d\beta,\ (R(\nu)>-\tfrac{1}{2}).$$

9. Eu égard à la formule de transformation pour la série hypergéometrique de Kummer[1]):

$$p)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;F(a,\,\beta,\,2\beta,\,x)=$$

$$=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2a}\cdot F\left(a,\,a-\beta+\tfrac{1}{2},\,\beta+\tfrac{1}{2},\,\left(\frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}\right)^2\right),$$

qui dans le cas particulier $a=\beta-\frac{1}{2}$ s'écrit:

$$p')\;.\;.\;F(\beta-\tfrac{1}{2},\,\beta,\,2\beta,\,x)=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2\beta-1},$$

l'identité:

$$\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{\nu+\rho}=\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{\nu}\times\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{\rho}$$

---

[1]) Journal für Mathematik Bd. 15, p. 77; 1836.

nous donne la suivante:

$$F\left(\frac{\nu+\rho}{2}, \frac{\nu+\rho+1}{2}, \nu+\rho+1, x\right) =$$

$$=\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu+1}{2}, \nu+1, x\right)\times F\left(\frac{\rho}{2}, \frac{\rho+1}{2}, \rho+1, x\right).$$

En substituant l'expression connue:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1+\frac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\,.\,\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}x^2+\,.\,.\,.\,.\,.\,=$$

$$=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(s+\alpha)\Gamma(s+\beta)}{s\,!\,\Gamma(s+\gamma)}\,.\,.\,.\,.\,(x<1)$$

on obtient

$$\frac{\Gamma(\nu+\rho+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+1}{2}\right)}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(s+\frac{\nu+\rho}{2}\right)\Gamma\left(s+\frac{\nu+\rho+1}{2}\right)}{s\,!\,\Gamma(s+\nu+\rho+1)}x^s=$$

$$=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(n+\frac{\nu}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{\nu+1}{2}\right)}{n\,!\,\Gamma(n+\nu+1)}x^n\times$$

$$\times\frac{\Gamma(\rho+1)}{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(m+\frac{\rho}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{\rho+1}{2}\right)}{m\,!\,\Gamma(m+\rho+1)}x^m,$$

ou, d'après (l) et en appliquant (1):

$$(\nu+\rho)\sum_{s=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2s+\nu+\rho)}{s\,!\,\Gamma(s+\nu+\rho+1)},\ \frac{x^s}{2^{2s}}=$$

$$=\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+\nu)}{n!\Gamma(n+\nu+1)}\frac{x^n}{2^{2n}}\times\rho\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma(2m+\rho)}{m!\Gamma(m+\rho+1)}\frac{x^m}{2^{2m}}=$$

$$=\nu\rho\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^s}{2^{2s}}\sum_{p=0}^{s}\frac{\Gamma(2p+\nu)\,\Gamma(2s-2p+\rho)}{p!(s-p)\,!\,\Gamma(p+\nu+1)\,\Gamma(s-p+\rho+1)},$$

et, en égalemeut maintenant les coefficients de x au même degré, on en déduit:

$$q) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{\nu+\rho}{\nu\rho} \cdot \frac{\Gamma(2s+\nu+\rho)}{s!\,\Gamma(s+\nu+\rho+1)} =$$

$$= \sum_{p=0}^{s} \frac{\Gamma(2p+\nu)\,\Gamma(2s-2p+\rho)}{p!\,(s-p)!\,\Gamma(p+\nu+1)\,\Gamma(s-p+\rho+1)}.$$

En multipliant les deux membres par

$$\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu+\rho}}{\Gamma(2s+\nu+\rho)}$$

et en substituant:

$$\frac{\Gamma(2p+\nu)\,\Gamma(2s-2p+\rho)}{\Gamma(2s+\nu+\rho)} = \int_0^1 \alpha^{2s-2p+\rho-1}(1-\alpha)^{2p+\nu-1}\,d\alpha$$

il s'ensuivra, après la sommation de 0 à ∞, et en appliquant de nouveau (1) dans le sens inverse:

$$\frac{\nu+\rho}{\nu\rho}\,\mathrm{I}_{\nu+\rho}(x) = \int_0^1 \mathrm{I}_\nu(x-x\alpha)\,\mathrm{I}_\rho(x\alpha)\,\frac{d\alpha}{\alpha(1-\alpha)},$$

ou:

$$35) \ldots \frac{\nu+\rho}{\nu\rho x}\,\mathrm{I}_{\nu+\rho}(x) = \int_0^x \mathrm{I}_\nu(x-\beta)\,\mathrm{I}_\rho(\beta)\,\frac{d\beta}{\beta(x-\beta)},\ \begin{pmatrix}\mathrm{R}(\nu)>0\\ \mathrm{R}(\rho)>0\end{pmatrix}.$$

Posons $\rho=\frac{1}{2}$, il résultera:

$$36) \ldots \frac{2\nu+1}{\nu x}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\mathrm{I}_{\nu+\frac{1}{2}}(x) = \int_0^x \mathrm{I}_\nu(x-\beta)\,\frac{\sin\beta}{\beta(x-\beta)\sqrt{\beta}}\,d\beta,\ (\mathrm{R}(\nu)>0)$$

et en posant ici $\nu=\frac{1}{2}$:

$$37) \quad . \quad . \quad . \quad \frac{2\pi}{x}\,\mathrm{I}_1(x) = \int_0^x \frac{\sin\beta\,\sin(x-\beta)}{\{\beta(x-\beta)\}^{\frac{3}{2}}}\,d\beta.$$

10. En remarquant que

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta,\alpha,x) = \frac{1}{(1-x)^\beta},\ (x<1)$$

la formule de transformation de KUMMER (p) se réduit dans le cas particulier: $\alpha = \beta + \frac{1}{2}$ à

$$p'') \ldots \quad F(\beta + \tfrac{1}{2}, \beta, 2\beta, x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{2\beta-1}$$

et d'après (p') et (p'') l'identité:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{\nu+\rho+1} =$$

$$= \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{\rho+1} \times \frac{1}{\sqrt{1-x}} \left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^{\nu}$$

s'écrit:

$$F\left(\frac{\nu+\rho+3}{2}, \frac{\nu+\rho+2}{2}, \nu+\rho+2, x\right) =$$

$$= F\left(\frac{\rho+1}{2}, \frac{\rho+2}{2}, \rho+2, x\right) \times F\left(\frac{\nu+2}{2}, \frac{\nu+1}{2}, \nu+1, x\right)$$

ou:

$$\frac{\Gamma(\nu+\rho+2)}{\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+3}{2}\right)} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(s+\frac{\nu+\rho+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+\rho+3}{2}\right)}{s!\,\Gamma(s+\nu+\rho+2)} x^s =$$

$$= \frac{\Gamma(\rho+2)}{\Gamma\left(\frac{\rho+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\rho+2}{2}\right)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n+\frac{\rho+1}{2}\right)\Gamma\left(n+\frac{\rho+2}{2}\right)}{n!\,\Gamma(n+\rho+2)} x^n \times$$

$$\times \frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu+2}{2}\right)} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(m+\frac{\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{\nu+2}{2}\right)}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)} x^m.$$

En appliquant (l) et d'après (1), on obtient:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2s+\nu+\rho+2)}{s!\,\Gamma(s+\nu+\rho+2)} \frac{x^s}{2^{2s}} =$$

$$= (\rho+1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2n+\rho+1)}{n!\,\Gamma(n+\rho+2)} \frac{x^n}{2^{2n}} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2m+\nu+1)}{m!\,\Gamma(m+\nu+1)} \frac{x^m}{2^{2m}} =$$

$$= (\rho+1) \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{2^{2s}} \sum_{p=0}^{s} \frac{\Gamma(2p+\nu+1)\,\Gamma(2s-2p+\rho+1)}{p!\,(s-p)!\,\Gamma(p+\nu+1)\,\Gamma(s-p+\rho+2)}$$

or, les coefficients de x au même degré étant égaux dans cette équation, il résulte:

$$r)\ldots \frac{\Gamma(2s+\nu+\rho+2)}{s!\,\Gamma(s+\nu+\rho+2)}=(\rho+1)\sum_{p=0}^{s}\frac{\Gamma(2p+\nu+1)\,\Gamma(2s-2p+\rho+1)}{p!\,(s-p)!\,\Gamma(p+\nu+1)\,\Gamma(s-p+\rho+2)}.$$

Si nous multiplions ici les deux membres par

$$\frac{(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^{2s+\nu+\rho+1}}{(\rho+1)\,\Gamma(2s+\nu+\rho+2)}$$

et si nous substituons:

$$\frac{\Gamma(2p+\nu+1)\,\Gamma(2s-2p+\rho+1)}{\Gamma(2s+\nu+\rho+2)}=\int_0^1 \alpha^{2s-2p+\rho}\,(1-\alpha)^{2p+\nu}\,d\alpha,$$

on aura, après la sommation de 0 à ∞, et en appliquant (1) dans le sens inverse:

$$\frac{I_{\nu+\rho+1}(x)}{\rho+1}=\int_0^1 I_\nu(x-x\alpha)\,I_{\rho+1}(x\alpha)\,\frac{d\alpha}{\alpha}$$

ou

$$38).\ \frac{I_{\nu+\rho+1}(x)}{\rho+1}=\int_0^x I_\nu(x-\beta)\,I_{\rho+1}(\beta)\,\frac{d\beta}{\beta},\ \left(\begin{matrix}R(\nu)>-1\\ R(\rho)>-1\end{matrix}\right).$$

Changeons ν et $\rho+1$, et substituons dans l'integrale $\beta=x-\alpha$, alors nous trouvons:

$$38a).\ \frac{I_{\nu+\rho+1}(x)}{\nu}=\int_0^x I_\nu(x-\alpha)\,I_{\rho+1}(\alpha)\,\frac{d\alpha}{x-\alpha},\ \left(\begin{matrix}R(\nu)>0\\ R(\rho)>-2\end{matrix}\right).$$

De ces formules proviennent d'autres pour des valeurs spéciales de ν et de ρ.

Si l'on pose dans (38) successivement $\nu=-\frac{1}{2}$ et $\nu=\frac{1}{2}$, et dans (38a) $\nu=\frac{1}{2}$, on trouve respectivement:

$$39)\ldots\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{I_{\rho+\frac{1}{2}}(x)}{\rho+1}=\int_0^x I_{\rho+1}(\beta)\cos(x-\beta)\,\frac{d\beta}{\beta\sqrt{x-\beta}},\ (R(\rho)>-1)$$

$$40)\ldots\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{I_{\rho+\frac{3}{2}}(x)}{\rho+1}=\int_0^x I_{\rho+1}(\beta)\sin(x-\beta)\,\frac{d\beta}{\beta\sqrt{x-\beta}},\ (R(\rho)>-1)$$

$$41) \ldots \sqrt{2\pi} \,.\, I_{\rho+\frac{3}{2}}(x) = \int_0^x I_{\rho+1}(\alpha) \sin(x-\alpha) \frac{d\alpha}{(x-\alpha)^{\frac{1}{2}}}, \quad (R(\rho) > -2).$$

Des formules (39) et (40) on déduit encore aisément:

$$42) \quad \ldots \frac{1}{\rho+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \cos x \, I_{\rho+\frac{1}{2}}(x) + \sin x \, I_{\rho+\frac{3}{2}}(x) \right\} =$$

$$= \int_0^x I_{\rho+1}(\beta) \cos\beta \frac{d\beta}{\beta\sqrt{x-\beta}}, \quad (R(\rho) > -1)$$

$$43) \quad \ldots \frac{1}{\rho+1}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \sin x \, I_{\rho+\frac{1}{2}}(x) - \cos x \, I_{\rho+\frac{3}{2}}(x) \right\} =$$

$$= \int_0^x I_{\rho+1}(\beta) \sin\beta \frac{d\beta}{\beta\sqrt{x-\beta}}, \quad (R(\rho) > -1).$$

Et en posant dans (39), (40), (42) et (43): $\rho = -\frac{1}{2}$, on aura respectivement:

$$44) \quad \ldots \quad \pi I_0(x) = \int_0^x \frac{\sin\beta \cos(x-\beta)}{\beta\sqrt{\beta(x-\beta)}} d\beta,$$

$$45) \quad \ldots \quad \pi I_1(x) = \int_0^x \frac{\sin\beta \sin(x-\beta)}{\beta\sqrt{\beta(x-\beta)}} d\beta,$$

$$46) \quad \ldots 2\pi \left\{ \cos x \, I_0(x) + \sin x \, I_1(x) \right\} = \int_0^x \frac{\sin 2\beta}{\beta\sqrt{\beta(x-\beta)}} d\beta,$$

$$47) \quad \ldots \pi \left\{ \sin x \, I_0(x) - \cos x \, I_1(x) \right\} = \int_0^x \frac{\sin^2\beta}{\beta\sqrt{\beta(x-\beta)}} d\beta.$$

Q 2.

DAS ANALOGON DES BÜSCHELS VON STEPHANOS IM SIEBENDIMENSIONALEN RAUME,

von

J. A. BARRAU.

(Amsterdam).

Bekanntlich finden die Eigenschaften der desmischen Tetraeder ihren algebraischen Ausdruck in der Identität:

$$(a+b+c+d)(-a-b+c+d)(-a+b-c+d)(a-b-c+d)+$$
$$+(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d) \equiv 16\,abcd.$$

Insbesondere sieht man, dass die drei Tetraeder, aufgefasst als ausgeartete Flächen 4 Ordnung, einem Büschel angehören, dessen Grundkurve gebildet wird von den 16 Geraden, welche, zusammen mit den 12 Schnittpunkten der Tetraederkanten, eine Konfiguration $(16_3, 12_4)$ bilden.

Nun findet sich in einem früheren Aufsatz [1]) die Zerlegung des Masspolytopes in R_7 in 16, daselbst mit I—XVI bezeichnete, Simplexe. Diese Tabelle lässt sich sofort verwenden zur Aufstelling der, mit der obigen analogen, Identität für acht Variabeln.

Bezeichnet man nämlich mit I das Produkt:

$$(a+b+c+d+e+f+g+h)(-a-b-c-d+e+f+$$
$$+g+h)(-a-b+c+d-e-f+g+h)(-a+b-c+$$
$$+d-e+f-g+h)(-a+b+c-d+e-f-g+h)(a-b-$$
$$-c+d+c-f-g+h)(a-b+c-d-e+f-g+$$
$$+h)(a+b-c-d-e-f+g+h)$$

und ebenso mit II bis XVI die übrigen Produkte, worin

[1]) Nieuw Archief VII, p. 257.

jedesmal die Vorzeichen der in der Tabelle angegebenen Buchstaben negativ zu nehmen sind, dann gilt:

$$\mathrm{I} + \mathrm{IX} + \mathrm{X} + \mathrm{XI} + \mathrm{XII} + \mathrm{XIII} + \mathrm{XIV} + \mathrm{XV} - \mathrm{II} - \mathrm{III} - \mathrm{IV} - \\ - \mathrm{V} - \mathrm{VI} - \mathrm{VII} - \mathrm{VIII} - \mathrm{XVI} \equiv 6.2^{10}\, abcdefgh.$$ [1])

Denn das erste Glied der Gleichung ist eine homogene Form achten Grades, welche verschwindet wenn eine beliebige der Variabeln gleich Null gesetzt wird.

So ist für $h = 0$:	$\mathrm{I} \equiv \mathrm{XVI}$	$\mathrm{V} \equiv \mathrm{XII}$
	$\mathrm{II} \equiv \mathrm{XV}$	$\mathrm{VI} \equiv \mathrm{XI}$
	$\mathrm{III} \equiv \mathrm{XIV}$	$\mathrm{VII} \equiv \mathrm{X}$
	$\mathrm{IV} \equiv \mathrm{XIII}$	$\mathrm{VIII} \equiv \mathrm{IX}.$
Für $a = 0$ ist	$\mathrm{I} \equiv \mathrm{II}$	$\mathrm{VI} \equiv \mathrm{XII}$
	$\mathrm{III} \equiv \mathrm{IX}$	$\mathrm{VII} \equiv \mathrm{XIII}$
	$\mathrm{IV} \equiv \mathrm{X}$	$\mathrm{VIII} \equiv \mathrm{XIV}$
	$\mathrm{V} \equiv \mathrm{XI}$	$\mathrm{XV} \equiv \mathrm{XVI}$

und so weiter, was geometrisch eben die in § 14 des zitirten Aufsatzes erörterten Perspektivitäten bedingt. Die Form lässt sich also reduziren auf

$$x \,.\, abcdefgh\,;$$

den Faktor x aber bestimmt man, indem man den Variabeln beliebigen numerischen Wert beilegt, z. B.

$$a = b = c = d = e = f = g = h = 1.$$

Es folgt $$x = 6.2^{10} = 6144.$$

Wir haben also:

Das Fundamentalsimplex, aufgefasst als (ausgeartete) sechsdimensionale Raumvarietät achten Grades, gehört zu einem linearen Systeme fünfzehnter Stufe solcher Räume, bestimmt durch die 16 Zerlegungssimplexe.

Da aber die Zerlegung auf 30 Weisen erfolgen kann, gibt es 30 solche Systeme, deren Gesammtheit invariant ist

[1]) Positiv sind die Simplexe mit gerader, negativ mit ungerader Buchstabenzahl.

gegen die Operationen der selbstdeckenden Bewegungsgruppe des Masspolytopes. Jedes einzelne System erträgt nur diejenige dieser Operationen, welche die Simplexe der zugehörigen Zerlegungsweise [1]) in sich oder in einander überführen (vergl. § 11.) Es zeigt sich also wieder die Sonderrolle des Fundamentalsimplexes und infolge dessen die unvollkommne Analogie mit dem Verhalten in R_3, wo die Figur und die damit zusammenhangenden Betrachtungen die grösst mögliche Symmetrie aufweisen.

---

[1]) Die Zahl 30 dieser Zerlegungsweisen hat, wie mich Herr P. Mulder aufmerksam macht, nur Geltung, wenn man die Eckpunkte mit ungerader auf gleiche Weise wie die gegenüberliegenden mit gerader Buchstabenzahl einteilt, was eben für obige Betrachtung notwendig ist. Zerlegt man aber die beiden Hälften unabhängig, dann hat man schon 900 Weisen. Diese Bemerkung betrifft auch die für höhere Dimension berechnete Anzahlen. In der Tabelle der 30 A in § 11 ist zu lesen:

unter 7: *acdg* statt *acdf*
unter 26: *acdg* statt *acde*.

K 2 e, 6 e, 8 b.

IMAGINAIRE PUNTEN VAN DEN CIRKEL

DOOR

J. VAN DE GRIEND JR.
(Kampen).

De onderstaande beschouwingen, uitgaande van de bekende theorie der „Kreisverwandtschaft" van MÖBIUS, hebben ten doel de ligging na te gaan van wat men als snijpunten van cirkels onderling en van cirkels en rechten heeft te verstaan, ingeval die snijpunten niet reëel zijn; — alsmede, welke veralgemeening verschillende begrippen en stellingen kunnen ondergaan door het begrip „snijding" op deze wijze meetkundig uit te breiden.

1. De vergelijking

$$F(\lambda, Z) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

met standvastige complexe coëfficiënten, waarin λ alle reëele waarden doorloopt en dientengevolge Z een reeks complexe waarden aanneemt, stelt een kromme (F) voor, die doorloopen wordt door het punt Z. De punten der kromme, die daarbij ontstaan, noemen wij de *reëele punten* dezer kromme. *Imaginaire punten* der kromme zijn de punten, die ontstaan door λ in dezelfde verg. (1) complexe waarden te geven; d. w. z. door λ, in plaats van enkel langs de x as, in een geheel vlak (λ) beweeglijk te denken. Daarbij beweegt zich Z buiten de kromme (F) over het vlak (Z). Gelijk bekend, snijden de banen, die λ doorloopt, elkaar in het algemeen onder dezelfde hoeken als de banen, die het overeenkomstige punt Z doorloopt.

2. In het bijzonder stelt de vergelijking

$$A\lambda Z + B\lambda + CZ + D = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

of

$$Z = -\frac{B\lambda + D}{A\lambda + C} = -\frac{B}{A}\,\frac{\lambda - L}{\lambda - M} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

als $$L = -\frac{D}{B} \text{ en } M = -\frac{C}{A} \text{ is}, \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

voor standvastige complexe A, B, C, D en reëel veranderlijke λ een cirkel voor, zooals uit de theorie der „Kreisverwandtschaft" onmiddellijk volgt: den cirkel nl., die in het vlak (Z) correspondeert met de x-as in het vlak (λ). De imaginaire punten van dezen cirkel worden dan volgens 1 verkregen door λ beweeglijk te denken over het geheele vlak (λ). Daarbij komen de punten Z en λ enkelvoudig met elkaar overeen; uitgezonderd is de waarde $\lambda = M$, waarvoor mod. $Z = \infty$ met willekeurig argument, zoodat met deze enkele waarde van λ alle punten van de oneindig verre rechte van het platte vlak (Z) correspondeeren, en de waarde $Z = -\frac{B}{A} = P$, waarvoor mod. $\lambda = \infty$ met willekeurig argument, zoodat dit punt Z (dat tot de reëele punten van den cirkel behoort, omdat het willekeurige argument ook 0 kan zijn) als oneindig veelvoudig punt van het vlak (Z) beschouwd moet worden.

3. Opdat de cirkel, voorgesteld door (2), een rechte zal worden, is noodig en voldoende, dat aan die vergelijking voldaan worde door reëele λ en complexe X met oneindigen modulus, d. i. $M = -\frac{C}{A}$ moet reëel zijn. Stellen wij deze reëele waarde voor door q, dan wordt (2)

$$A(\lambda - q)Z + B\lambda + D = 0$$

of, bij vervanging van $\lambda - q$ door λ,

$$A\lambda Z + B\lambda + D = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

die men uit (2) vindt door $C = 0$ te stellen. De imaginaire punten dezer rechte ontstaan dan weer door voor λ complexe waarden te nemen.

4. Intusschen stelt de vergelijking (5) of de vergelijking (2), waaruit zij, voor $\frac{C}{A}$ = reëel, is afgeleid, tegelijk nog de oneindig verre rechte van het platte vlak voor; want voor $\lambda = -\frac{C}{A}$ in (1), of $\lambda = 0$ in (5), wordt mod. $Z = \infty$ en

arg. Z willekeurig (verg. 2). Terwijl λ alle andere reëele waarden doorloopt, wordt de in het eindige liggende rechte, punt voor punt, beschreven; voor de reëele waarde $\lambda = -\frac{C}{A}$ ontstaat opeens de oneindig verre rechte van het platte vlak.

Om deze oneindig verre rechte uit de vergelijking der rechte te verwijderen, moet het oneindig worden van een der veranderlijken Z of λ bij een eindige waarde van de andere opgeheven worden, d. i. de term met λZ moet uit de vergelijking verdwijnen; A moet $= 0$ zijn (het punt M verplaatst zich langs de x-as naar het oneindige). De aldus gereduceerde vergelijking der rechte lijn wordt

$$B\lambda + CZ + D = 0; \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (6)$$

hierin wordt Z wel oneindig (voor $\lambda = \infty$), maar met bepaald argument $\left(\text{arg.} - \frac{B}{C}\right)$ (oneindig ver punt der rechte).

Voor mod. $C = 0$ gaat deze enkelvoudige rechte over in de oneindig verre rechte van het platte vlak.

5. Uit de theorie der „Kreisverwandtschaft" is bekend, dat, wanneer λ een cirkel (c) beschrijft, ook Z in het algemeen een cirkel (C) beschrijft. Gaat (c) over in een rechte, dan bevat de cirkel (C) het punt $P = -\frac{B}{A}$ (2); bevat (c) het punt $M = -\frac{C}{A}$, dan gaat de cirkel (C) over in een rechte. Cirkels en rechten (c) snijden elkaar onder dezelfde hoeken als cirkels en rechten (C).

6. *a*) Laat men λ een rechte door O, den oorsprong, doorloopen, dan is arg. $\lambda =$ constant. Het punt Z beschrijft een cirkel, die door de reëele punten $Q = -\frac{D}{C}$ $(\lambda = 0)$ en $P = -\frac{B}{A}$ $(\lambda = \infty)$ van den oorspronkelijken cirkel gaat (5) en dezen cirkel snijdt onder een hoek, gelijk aan het argument van λ (1). Met den bundel rechten door O correspondeert dus een cirkelbundel door P en Q, die de ligging van de *imaginaire punten van den cirkel met gelijke argumenten* markeert.

b) Laat men λ een cirkel met O als middelpunt doorloopen, dan is mod. $\lambda =$ constant. Het punt Z beschrijft een cirkel,

die alle cirkels van den cirkelbundel door P en Q $\big(a)\big)$ rechthoekig snijdt, en wiens punten gelijke afstandverhoudingen tot de basispunten P en Q hebben. Al dergelijke cirkels vormen een cirkelschaar, die de ligging van de *imaginaire punten van den cirkel met gelijke modulen* markeert.

c) Laat men λ een rechte loodrecht op de x-as doorloopen, dan is de reëele term van λ constant. Het punt Z beschrijft een cirkel, die den reëelen cirkel rechthoekig snijdt in het punt, dat met het snijpunt van (λ) en de x-as overeenkomt, en die door het punt P gaat (5). Met den bundel rechten loodrecht op de x-as correspondeert dus een cirkelbundel door P met gemeenschappelijke raaklijn; deze bundel markeert de ligging van de *imaginaire punten van den cirkel met gelijke reëele termen.*

d) Laat men λ een rechte evenwijdig met de x-as doorloopen, dan is de imaginaire term van λ constant. Het punt Z beschrijft een cirkel door P, die alle cirkels der groep *c*) rechthoekig snijdt. Met den bundel rechten evenwijdig met de x-as correspondeert dus een bundel cirkels, die den reëelen cirkel in P raken; deze bundel markeert de ligging van de *imaginaire punten van den cirkel met gelijke imaginaire termen.*

e) Een willekeurige cirkel (Z) uit de groep *b*) snijdt een willekeurigen cirkel uit de groep *c*) in twee punten, waarvoor zoowel mod. λ als de reëele term van λ gelijk is; waarvoor dus λ twee toegevoegd complexe waarden heeft (de twee punten λ liggen symmetrisch ten opzichte van de x-as). Daar beide cirkels (Z) den reëelen cirkel rechthoekig snijden, zijn deze punten elkaars inversie ten opzichte van den reëelen cirkel; wij kunnen daarom inverse punten ten opzichte van dezen cirkel ook *toegevoegd complexe punten van den cirkel* noemen. Gaan in het bijzonder de rechte (λ) uit *c*) en de cirkel (λ) uit (*b*) door het punt M (5), dan ligt het eene punt Z willekeurig in het oneindige, terwijl het andere punt, omdat beide cirkels (Z) stralen geworden zijn, het middelpunt van den reëelen cirkel wordt; het middelpunt is dus het toegevoegd complexe punt van alle punten in het oneindige. Daar de punten in het oneindige gekarakteriseerd zijn door de waarde $\lambda = -\frac{C}{A}$, is

het middelpunt gekarakteriseerd door de waarde $\lambda = \left(-\frac{C}{A}\right)_t$, de toegevoegd complexe waarde van $-\frac{C}{A}$.

f) Wordt de oorspronkelijke cirkel een rechte, dan snijden de cirkels uit de groepen *b*) en *c*) deze rechte rechthoekig; hun snijpunten onderling liggen dus symmetrisch ten opzichte van de rechte. Daarom kunnen wij dergelijke symmetrische punten ook *toegevoegd complexe punten van de rechte noemen.*

g) Bij een enkelvoudige rechte in het oneindige (4) liggen alle toegevoegd complexe punten insgelijks in het oneindige. Alleen bij de complexe waarde $\lambda = -\frac{D}{B}$ wordt Z onbepaald eindig; d. w. z. de geheele verzameling punten in het eindige heeft tot toegevoegd complex punt het punt in het oneindige, waarvan de parameter λ de toegevoegd complexe waarde van $-\frac{D}{B}$ is.

Opmerking. Alleen de ligging van toegevoegd complexe punten van cirkel en rechte (*e*) en *f*)) is onafhankelijk van de ligging der reëele punten P en Q van den cirkel of de rechte, d. i. van de rangschikking der parameters λ langs dezen cirkel of deze rechte, — zooals uit de redeneering is gebleken.

7. Meetkundig blijkt (6), dat met twee toegevoegd complexe punten van een willekeurigen cirkel (een willekeurige rechte) uit het systeem (λ) correspondeeren twee toegevoegd complexe punten van den overeenkomstigen cirkel (de overeenkomstige rechte) uit het systeem (Z). Met het middelpunt van den cirkel in (λ) correspondeert het punt Z, dat toegevoegd complex is met het punt $P = -\frac{B}{A}$ ten opzichte van den cirkel in (Z); met het middelpunt van den cirkel in (Z) correspondeert het punt λ, dat toegevoegd complex is met het punt $M = -\frac{C}{A}$ ten opzichte van den cirkel in (λ) (6*e*)).

8. Wanneer de twee cirkels

$$A\lambda Z + B\lambda + CZ + D = 0, \quad A_1\lambda_1 Z + B_1\lambda_1 + C_1 Z + D_1 = 0 \quad (7)$$

elkaar in reëele punten snijden, verkrijgen wij de snijpunten door eliminatie van Z tusschen de beide vergelijkingen (7):

$$(AB_1 - A_1B)\lambda\lambda_1 + (CB_1 - A_1D)\lambda_1 + (AD_1 - BC_1)\lambda + CD_1 - C_1D = 0 \ . \quad (8)$$

Hierin zijn namelijk λ en λ_1 reëel; door de reëele en imaginaire gedeelten afzonderlijk $= 0$ te stellen, vindt men twee bilineaire vergelijkingen tusschen λ en λ_1, die twee reëele oplossingen en dus twee reëele punten Z geven.

Snijden de cirkels (7) elkaar niet in reëele punten, dan leveren de vergelijkingen, uit (8) afgeleid, ook geen twee reëele, maar twee toegevoegd complexe stellen wortels. Wij zullen in dat geval door de *snijpunten* dezer cirkels verstaan de twee punten Z, wier parameters λ of λ_1 deze twee toegevoegd complexe stellen wortels der vergelijkingen (8) zijn. Wij zijn tot deze definitie gerechtigd, omdat deze punten onafhankelijk zijn van de rangschikking der parameters λ en λ_1 langs ieder der cirkels (6 opm.); zij zijn inverse punten ten opzichte van ieder der cirkels (6*e*).

Als dus twee cirkels elkaar niet in reëele punten snijden, heeft men door hun toegevoegd complexe snijpunten te verstaan de twee punten, die ten opzichte van ieder der twee cirkels elkaars inversie zijn. Snijdt een rechte een cirkel niet in reëele punten, dan heeft men door hun snijpunten te verstaan de twee punten, die ten opzichte van den cirkel elkaars inversie en ten opzichte van de rechte symmetrisch gelegen zijn.

Van twee concentrische cirkels ligt het eene der twee toegevoegd complexe snijpunten in het gemeenschappelijk middelpunt, het andere ligt onbepaald op de rechte in het oneindige.

Van de twee snijpunten van twee cirkels, die beide overgaan in twee rechten van de vergelijking (5), ligt er een willekeurig op de rechte in het oneindige, die die beide rechten gemeen hebben (4); het is dus altijd reëel; daaruit volgt, dat het andere snijpunt, in het eindige, ook steeds reëel is.

9. Twee enkelvoudige rechten van de vergelijking (6) snijden elkaar in een enkel punt, omdat eliminatie van Z tusschen haar vergelijkingen een vergelijking van den eersten graad in λ en λ_1 geeft. Een cirkel wordt door een zoodanige rechte gesneden in twee reëele of toegevoegd complexe punten, waar-

van de ligging geen verschil vertoont met die in 8 genoemd ($A_1 = 0$ in de verg. (8)). — Ligt de enkelvoudige rechte $B_1\lambda_1 + C_1Z + D_1 = 0$ in het oneindige (mod. $C_1 = 0$) (verg. 4), dan is van de twee toegevoegd complexe punten, waarin zij een cirkel snijdt, het eene het middelpunt van den cirkel (het bepaalde punt correspondeerende met $\lambda = \left(-\frac{C}{A}\right)_t$ voor den cirkel, een der onbepaalde punten correspondeerende met $\lambda_1 = -\frac{D_1}{B_1}$ voor de rechte, zie 6*g*)), het andere een bepaald punt in het oneindige (een der onbepaalde punten van den cirkel correspondeerende met $\lambda = -\frac{C}{A}$, het bepaalde punt der rechte correspondeerende met $\lambda_1 = \left(-\frac{D_1}{B_1}\right)_t$).

TOEPASSINGEN.

a) Omtrekshoeken, machten.

10. Wanneer F, G en H drie standvastige punten van een cirkel (M) met de parameters f, g en h zijn, en Z_1 en Z_2 twee veranderlijke punten met de parameters z_1 en z_2, volgt uit de bilineaire betrekking (2), waaraan deze vijf stellen waarden van λ en Z moeten voldoen:

$$\frac{Z_1 - G}{Z_1 - H} : \frac{F - G}{F - H} = \frac{z_1 - g}{z_1 - h} : \frac{f - g}{f - h},$$

$$\frac{Z_2 - G}{Z_2 - H} : \frac{F - G}{F - H} = \frac{z_2 - g}{z_2 - h} : \frac{f - g}{f - h}.$$

Door vermenigvuldiging:

$$\frac{Z_1 - G}{Z_1 - H} \times \frac{Z_2 - G}{Z_2 - H} = \frac{z_1 - g}{z_1 - h} \cdot \frac{z_2 - g}{z_2 - h} \cdot \left(\frac{f - h}{f - g}\right)^2 \times \left(\frac{F - G}{F - H}\right)^2 . \quad (9).$$

a) Zijn, behalve F, dat altijd als reëel punt van den cirkel beschouwd wordt, ook G en H reëele punten van den cirkel, dan zijn de parameters f, g en h reëel. In dit geval is, voor toegevoegd complexe parameters z_1 en z_2, het argument van

$\frac{z_1-g}{z_1-h} \times \frac{z_2-g}{z_2-h}$ gelijk aan 0; het argument van $\frac{f-h}{f-g}$ 0 of π; dus

$$\angle HZ_1G + \angle HZ_2G = 2 \angle HFG = \text{constant}; \quad . \quad . \quad (10)$$

voor reëele parameters z_1 en z_2 is het argument van $\frac{z_1-g}{z_1-h} \times \frac{z_2-g}{z_2-h}$ 0 of π; dus

$$\angle HZ_1G + \angle HZ_2G = 2\angle HFG \text{ of} = 2\angle HFG + \pi = \text{constant}. \quad (11).$$

Dus: *de som der hoeken (met inachtneming van teeken), waaronder een standvastige boog H G van een cirkel uit twee veranderlijke toegevoegd complexe of reëele punten Z_1, Z_2 van dien cirkel gezien wordt, is constant.*

In het laatste geval (reëele punten Z_1 en Z_2) is afzonderlijk $\angle HZ_1G = \angle HFG\ (+\pi)$ en $\angle HZ_2G = \angle HFG\ (+\pi)$, de bekende gelijkheid van omtrekshoeken op een constanten boog. Wij kunnen dus de bovenstaande stelling als *uitbreiding van deze gelijkheid van omtrekshoeken* beschouwen, *wanneer de hoekpunten dezer omtrekshoeken toegevoegd complex worden.*

b) Zijn, bij F als reëel punt, de vaste punten G en H toegevoegd complexe punten van den cirkel, dan zijn de parameters f reëel, g en h toegevoegd complex. In dit geval is, zoowel voor toegevoegd complexe als voor reëele parameters z_1 en z_2, mod. $\frac{z_1-g}{z_1-h} \times \frac{z_2-g}{z_2-h} = 1$; eveneens mod. $\frac{f-h}{f-g} = 1$; dus

$$\frac{Z_1G}{Z_1H} \times \frac{Z_2G}{Z_2H} = \left(\frac{FG}{FH}\right)^2 = \text{constant}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Dus: *het produkt van de verhoudingen der afstanden van ieder van twee veranderlijke reëele of toegevoegd complexe punten Z_1, Z_2 van een cirkel tot twee standvastige toegevoegd complexe punten van dien cirkel* G, H *is constant.*

In het geval van reëele punten Z_1 en Z_2 is afzonderlijk $\frac{Z_1G}{Z_1H} = \frac{FG}{FH}$ en $\frac{Z_2G}{Z_2H} = \frac{FG}{FH}$, de bekende gelijkheid van verhoudingen van afstanden van twee standvastige punten tot de punten

van een cirkel, waarvan de standvastige punten toegevoegd complexe punten zijn. Wij kunnen dus de bovenstaande stelling als *uitbreiding van deze gelijkheid van verhoudingen* beschouwen, *wanneer de veranderlijke reëele punten van den cirkel zich splitsen in paren toegevoegd complexe punten.*

11. De resultaten, in 10 verkregen, kunnen nog op andere wijze geformuleerd worden.

a) Brengt men een standvastigen cirkel (N) aan, die twee toegevoegd complexe punten Z_1' en Z_2' van (M) (zie 10*a*)) tot reëele punten heeft (of die twee reëele punten Z_1' en Z_2' van (M) tot toegevoegd complexe punten heeft), dan wordt deze cirkel door alle cirkels, die de reëele punten G en H van (M) tot toegevoegd complexe punten hebben, gesneden in een paar punten Z_1 en Z_2, die, als zij reëele punten zijn van (N), toegevoegd complex zijn in (M) (omdat deze cirkels zoowel als (N) den cirkel (M) rechthoekig snijden), of, als zij toegevoegd complexe punten zijn van (N), reëele punten zijn van (M) (omdat (M) deze cirkels zoowel als (N) rechthoekig snijdt). Dus zijn, met weglating van cirkel (M), de punten Z_1 en Z_2 in 10*a*) genoemd te beschouwen als reëele of toegevoegd complexe snijpunten van cirkels uit de veranderlijke cirkelschaar met den standvastigen cirkel (N), en dus:

Zijn een cirkel (N) *en een paar standvastige punten* G, H *gegeven, en brengt men de cirkelschaar aan, die* G *en* H *tot toegevoegd complexe punten heeft, dan snijden de cirkels van deze schaar den standvastigen cirkel* (N) *in twee reëele of toegevoegd complexe snijpunten* Z_1, Z_2 *zoo, dat*

$$\angle HZ_1G + \angle HZ_2G = constant \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

is. Deze constante waarde noemen wij de „hoekmacht" van het puntenpaar G, H *ten opzichte van cirkel* (N).

Voor de toegevoegd complexe onder de reeks snijpuntenparen Z_1 en Z_2 is afzonderlijk $\angle HZ_1G = \angle HZ_2G =$ constant.

b) Brengt men in het geval *b*) van 10, eveneens een standvastigen cirkel (N) aan, die twee toegevoegd complexe punten Z_1' en Z_2' van (M) tot reëele punten heeft (of die twee reëele punten Z_1' en Z_2' van (M) tot toegevoegd complexe punten heeft), dan wordt deze cirkel door alle cirkels, die de toegevoegd complexe punten G en H van (M) tot reëele punten hebben, ge-

sneden in een paar punten Z_1 en Z_2, waarvan evenals boven blijkt dat zij reëele punten zijn van (N), als zij toegevoegd complex zijn in (M), en omgekeerd. Bij weglating van cirkel (M) volgt dus:

Zijn een cirkel (N) *en een paar standvastige punten* G, H *gegeven, en brengt men den cirkelbundel aan, die* G *en* H *tot reëele punten heeft, dan snijden de cirkels van dezen bundel den standvastigen cirkel* (N) *in twee reëele of toegevoegd complexe snijpunten* Z_1 *en* Z_2 *zoo, dat*

$$\frac{Z_1G}{Z_1H}\times\frac{Z_2G}{Z_2H}=constant \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

is. Deze constante waarde noemen wij de „vectormacht" van het puntenpaar G, H *ten opzichte van cirkel* (N).

Voor de toegevoegd complexe onder de reeks snijpuntenparen is afzonderlijk $\frac{Z_1G}{Z_1H}=\frac{Z_2G}{Z_2H}=$ constant.

Verplaatst zich het eene punt G in willekeurige richting naar het oneindige, dan gaat de cirkelbundel door G en H over in den stralenbundel door H.

Snijdt een tweede straal uit dezen bundel den cirkel (N) in Z_1' en Z_2', dan is in

$$\frac{Z_1G}{Z_1H}\times\frac{Z_2G}{Z_2H}:\frac{Z_1'G}{Z_1'H}\times\frac{Z_2'G}{Z_2'H}=1$$

$$\text{Lim.}\ \frac{Z_1G\times Z_2G}{Z_1'G\times Z_2'G}=1,$$

dus
$$Z_1H\times Z_2H=Z_1'H\times Z_2'H,$$

d. i.
$$Z_1H\times Z_2H=\text{constant};$$

de constante vectormacht van het puntenpaar G, H ten opzichte van cirkel (N) reduceert zich dus tot de *constante gewone macht van het punt* H *ten opzichte van cirkel* (N), echter *uitgebreid tot willekeurige richting van den straal uit* H, *ook al snijdt deze den cirkel* (N) *niet in reëele punten.*

In het laatste geval (toegevoegd complexe snijpunten) is weer afzonderlijk $Z_1H=Z_2H=$ constant.

Onder den cirkelbundel door G en H is de rechte GH, die den cirkel (N) in twee reëele of toegevoegd complexe punten

snijdt. Bepaalt men de vectormacht van het puntenpaar G, H bij deze gegevens, dan blijkt:

De vectormacht van een puntenpaar ten opzichte van een cirkel is gelijk aan het quotient van de macht van het eerste en die van het tweede punt ten opzichte van den cirkel.

:

b) Koordenvierhoek met reëele en imaginaire hoekpunten.

12. Wanneer wij imaginaire punten van den cirkel aannemen, dan moeten wij als consequentie daarvan ook koordenvierhoeken beschouwen, waarvan een of meer hoekpunten imaginaire punten van den cirkel zijn. Worden de hoekpunten van een vierhoek voorgesteld door Z, A, B, C, dan zal de vierhoek een gewone koordenvierhoek zijn, wanneer van de vlakke dubbelverhouding $\frac{Z-A}{Z-C}:\frac{B-A}{B-C}$ het argument *o* of π is, en een koordenvierhoek, waarvan de hoekpunten Z en B toegevoegd complexe punten zijn voor een bepaalden cirkel door A en C als reëele punten (of omgekeerd), wanneer de modulus van die dubbelverhouding 1 is (verg. 6). Daarom zullen wij den eersten vierhoek ZABC een „*koordenvierhoek met reëele hoekpunten*" en den tweeden een „*koordenvierhoek met twee toegevoegd complexe hoekpunten*" noemen. Elke andere vierhoek ZABC kan voorts beschouwd worden als koordenvierhoek, waarvan de waarde van arg. $\frac{(Z-A)(B-C)}{(Z-C)(B-A)}$ de „*hoekafwijking*" en die van mod. $\frac{(Z-A)(B-C)}{(Z-C)(B-A)}$ de „*vectorafwijking*" voorstelt. Bij denzelfden vierhoek zijn drie hoek- en drie vectorafwijkingen te onderscheiden, nl. argument en modulus der drie dubbelverhoudingen $\frac{(Z-A)(B-C)}{(Z-C)(B-A)}$, $\frac{(Z-B)(C-A)}{(Z-A)(C-B)}$, $\frac{(Z-C)(A-B)}{(Z-B)(A-C)}$ (cyclische verwisseling van A, B en C); de overige, aanvangende met A, B of C, zijn daarin begrepen. Het algemeene probleem van den koordenvierhoek is dan, bij een bekende betrekking tusschen de hoekafwijkingen een betrekking tusschen de vectorafwijkingen te vinden of omgekeerd. Het theorema van Ptolemaeus (verg. 14) geeft daarvan een voorbeeld.

13. De drie dubbelverhoudingen, genoemd in 12, zijn niet onafhankelijk van elkaar. Stelt men ze achtereenvolgens

$$\frac{(Z-A)(B-C)}{(Z-C)(B-A)}=P, \frac{(Z-B)(C-A)}{(Z-A)(C-B)}=Q, \frac{(Z-C)(A-B)}{(Z-B)(A-C)}=R, \quad (15)$$

dan zal men zonder moeite de identiteiten vinden:

$$PQR \equiv -1 \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

$$P+\frac{1}{R}\equiv 1, \quad Q+\frac{1}{P}\equiv 1, \quad R+\frac{1}{Q}\equiv 1 \quad . \quad (17)$$

De betrekkingen (17) stellen in staat, de drie complexe grootheden P, Q, R door punten in een vlak voor te stellen, zoodra een ervan, P, als punt gegeven is. De constructie der punten Q en R, wanneer P gegeven is, volgens de vergelijkingen (17), spreekt voor zich zelf.

14. Is de hoekafwijking arg. $P=\pi$, of

$$\angle CZA + \angle ABC = \pi, \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

dan is ZABC een koordenvierhoek met reëele hoekpunten. Volgens de vergelijkingen (17) zijn ook arg. Q en arg. R dan $=0$ of π; de punten P, Q, R liggen op de x-as; volgens vergelijking (16) twee op de positieve (Q en R), een op de negatieve (P). Dus is de correspondeerende betrekking der vectorafwijkingen

$$-\text{ mod. } P + \text{mod. } \frac{1}{R} = 1$$

of

$$ZB \,.\, AC = ZA \,.\, BC + ZC \,.\, AB \quad \ldots \quad (19)$$

het theorema van PTOLEMAEUS.

15. Is de vectorafwijking mod. $P=1$, of

$$\frac{ZA}{ZC}\times\frac{BC}{BA}=1, \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

dan is ZABC een koordenvierhoek met de toegevoegde complexe hoekpunten Z, B (of A, C). Het punt P ligt op den cirkel om O met den straal 1. Uit de constructie der punten Q en R volgens de vergelijkingen (17) volgt eenvoudig, dat P, Q en R hoekpunten zijn van een gelijkbeenigen driehoek, waarvan de

basis PQ evenwijdig is aan de x-as, en de verlengden der beenen RP en RQ respectievelijk gaan door de punten 1 en 0. Daaruit volgt als correspondeerende betrekking der hoekafwijkingen

$$\text{arg. } Q = \text{arg. } R$$

of

$$\angle AZB - \angle ACB = \angle BZC - \angle BAC. \quad . \quad . \quad (21)$$

Dus: *in een koordenvierhoek met twee toegevoegd complexe hoekpunten* ZABC *is het verschil van de hoeken, waaronder een bepaalde zijde* AB *uit de twee niet aanliggende hoekpunten* Z *en* C *gezien wordt, gelijk aan het verschil der hoeken, waaronder de volgende zijde* BC *uit de twee niet aanliggende hoekpunten* Z *en* A *gezien wordt.*

16. (Bijzonder geval van 15). Volgens de vergelijkingen (17), die bijzondere vormen van de cirkelcorrespondentie zijn, beschrijven de punten Q en R, terwijl P den cirkel om O met den straal 1 doorloopt (15), insgelijks cirkels. Men gaat gemakkelijk na, dat de cirkel van Q door 0 gaat en 1 tot middelpunt heeft, en dat de cirkel van R een rechte wordt loodrecht op de x-as in het punt $\frac{1}{2}$. Deze banen van P, Q, R snijden elkaar tweemaal in eenzelfde punt: nl. in de punten $\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}$ en $\cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3}$. Daaruit volgt, *dat er een koordenvierhoek mogelijk is met drie gelijke vector- en hoekafwijkingen*; nl. met de vectorafwijkingen

$$\text{mod. } P = \text{mod. } Q = \text{mod. } R = 1$$

en de hoekafwijkingen

$$\text{arg. } P = \text{arg. } Q = \text{arg. } R = \pm \frac{\pi}{3}.$$

Hij behoort tot de koordenvierhoeken met twee toegevoegd complexe hoekpunten uit 15. Deze vierhoeken zijn de eenig mogelijke met gelijke vector- en hoekafwijkingen, want uit de onderstelling $P = Q = R$ volgt volgens (16) $P = Q = R = \sqrt[3]{-1}$; de wortels -1 voldoen niet aan (17); de wortels $\cos\frac{\pi}{3} \pm i \sin\frac{\pi}{3}$ zijn de hier beschouwde.

Voor deze vierhoeken ZABC, die wij *normaalvierhoeken* willen noemen, is dus

$$\frac{ZA}{ZC} : \frac{BA}{BC} = \frac{ZB}{ZA} : \frac{CB}{CA} = \frac{ZC}{ZB} : \frac{AC}{AB} = 1 . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

$$\angle CZA - \angle CBA = \angle AZB - \angle ACB = \angle BZC - \angle BAC = \frac{\pi}{3} . (23)$$

Het zijn vierhoeken, waarvan de produkten der overstaande zijden gelijk en de som van een paar overstaande hoeken 60° is.

17. Een tweede bijzonder geval van 15 is dat, waarbij, behalve de vectorafwijking

$$\text{mod. } P = 1,$$

de hoekafwijking $\quad \text{arg. } P = \pi$

gegeven is. Het punt P ligt in -1; het is het bekende geval van den harmonischen koordenvierhoek, waarbij wij niet langer stilstaan.

18. Is de hoekafwijking

$$\text{arg. } P = \frac{\pi}{2}, \text{ dus}$$

$$\angle CZA - \angle CBA = \frac{\pi}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

dan is ZABC een vierhoek met twee overstaande complementaire hoeken. Brengt men door A, D en C als reëele punten een cirkel, en laat A en C respectievelijk met de parameters $\lambda = 0$ en $\lambda = \infty$ overeenstemmen (2), dan wordt $\frac{(Z-A)(B-C)}{(Z-C)(B-A)} = \frac{\lambda_s}{\lambda_b} = P =$ imaginair; de met Z overeenkomende waarde λ_s is dus imaginair; wij kunnen dus dezen vierhoek ook een *koordenvierhoek met één imaginair hoekpunt* noemen. — Het punt P valt op de *y*-as; uit de constructie der punten Q en R volgt eenvoudig, dat de stralen uit 0 naar R en $\frac{1}{Q}$ rechthoekig op elkaar staan en de verbindingslijn der punten R en

$\frac{1}{Q}$ de lengte 1 heeft. Zoo geeft de figuur als correspondeerende betrekking der vectorafwijkingen

$$(\text{mod. } R)^2 + \left(\text{mod.} \frac{1}{Q}\right)^2 = 1$$

of
$$ZC^2 . AB^2 + ZA^2 . BC^2 = ZB^2 . AC^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (25).$$

Dus: *in een koordenvierhoek met één imaginair hoekpunt is de som der kwadraten van de produkten der overstaande zijden gelijk aan het kwadraat van het produkt der diagonalen.*

Dit is ook meetkundig af te leiden.

E 5

DAS BESTIMMTE INTEGRAL $\int_0^{2\pi} \frac{\cos x\theta}{(1+k^2-2k\cos\theta)^s}\, d\theta$ ALS FUNCTION VON k, s, x,

VON

J. H. M. FALKENHAGEN.
(Gorinchem).

---

§ 1. In der Folge werden wir das in der Ueberschrift genannte Integral mit $\phi\,(k,\ s,\ x)$ bezeichnen.

Diese Function $\phi\,(k,\ s,\ x)$ lässt sich folgendermassen zu einem Linienintegrale im Gebiete eines complexen Variabeln zurückführen:

$$\phi\,(k,\ s,\ x) = \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}(e^{ix\theta} + e^{-ix\theta})}{(k-e^{i\theta})^s\,(k-e^{-i\theta})^s}\, d\theta =$$

$$= \tfrac{1}{2}(-k)^{-s}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(x+s)\theta} + e^{i(-x+s)\theta}}{(e^{i\theta}-k)^s\left(e^{i\theta}-\frac{1}{k}\right)^s}\, d\theta.$$

Indem wir jetzt $z = e^{i\theta}$ substituieren, erhalten wir:

$$1)\quad \ldots \quad \phi(k,\ s,\ x) = \frac{1}{2i}(-k)^{-s} \int\limits_{\substack{\text{Mod. } z = 1 \\ \text{arg. } z \text{ von } 0 \text{ bis } 2\pi}} \frac{z^{(s-1)+x} + z^{(s-1)-x}}{(z-k)^s\left(z-\frac{1}{k}\right)^s}\, dz$$

Aus dieser Gleichung schliessen wir, dass $\phi(k,\ s,\ x)$ im Gebiete, wo Mod. $k < 1$ ist, eine ganze analytische Function von k, s, x ist. Das Gleiche gilt vom Gebiete, wo Mod $k > 1$ ist.

Die Frage ist, ob $\phi\,(k,\ s,\ x)$ im Gebiete Mod $k > 1$ die analytische Fortsetzung bildet von $\phi\,(k,\ s,\ x)$ im Gebiete Mod $k < 1$. Die Beantwortung dieser Frage werden wir aber erst nachher geben. (§ 10, p. 436).

Ueber diesen Punkt bemerken wir jetzt nur, dass:

$$2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \phi\left(\frac{1}{k}, s, x\right) = k^{2s}\phi(k, s, x).$$

Den Fall Mod $k = 1$ schliessen wir von der Betrachtung aus.

§ 2. Das Linienintegral $\int\limits_{\substack{\text{Mod } z = 1 \\ \text{arg. } z \text{ von } 0 \text{ bis } 2\pi}} \frac{z^{(s-1)-x}}{(z-k)^s\left(z-\frac{1}{k}\right)} dz$ lässt sich vermittelst der Substitution $u = \frac{1}{z}$ zum Linienintegral $\int\limits_{\substack{\text{Mod } z = 1 \\ \text{arg } z \text{ von } 0 \text{ bis } 2\pi}} \frac{z^{(s-1)+x}}{(z-k)^s\left(z-\frac{1}{k}\right)^s} dz$ zurückführen. Wir erhalten sodann:

$$3) \quad . \quad . \quad . \int \frac{z^{(s-1)-x}}{(z-k)^s\left(z-\frac{1}{k}\right)^s} dz = e^{-2ix\pi} \int \frac{z^{(s-1)+x}}{(z-k^s\left(z-\frac{1}{k}\right)^s} dz$$

Mod $z = 1$, arg. z von 0 bis 2π.

Die Gleichung (1), p. 424, lässt sich also folgendermassen vereinfachen:

$$4). \left\{ \begin{aligned} \phi(k, s, x) &= \frac{1}{2i}(-k)^{-s}(1 + e^{-2ix\pi}) \int \frac{z^{(s-1)+x}}{(z-k)^s\left(z-\frac{1}{k}\right)^s} dz = \\ &= \frac{1}{2i}(-k)^{-s}(1 + e^{2ix\pi}) \int \frac{z^{(s-1)-x}}{(z-k)^s\left(z-\frac{1}{k}\right)^s} dz \end{aligned} \right.$$

(Mod $z = 1$, arg. z von 0 bis 2π)

§ 3. Die Gleichungen (3) und (4) ergeben eine einfache Beziehung zwischen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos x\theta}{(1 + k^2 - 2k\cos\theta)^s} d\theta \equiv \phi(k, s, x) \text{ und}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x\theta}{(1 + k^2 - 2k\cos\theta)^s} d\theta \equiv \psi(k, s, x).$$

Denn erstens lässt sich $\psi(k, s, x)$ ähnlicherweise wie $\phi(k, s, x)$ auf folgendes Integral reduzieren:

$$-\tfrac{1}{2}(-k)^{-s}\int\limits_{\substack{\text{Mod } z=1\\ \text{arg. von 0 bis } 2\pi}} \frac{z^{(s-1)+x} - z^{(s-1)-x}}{(z-k)^s\left(z-\frac{1}{k}\right)^s}\,dz$$

Also mit Rücksicht auf (3):

$$5)\ \ldots \begin{cases} \psi(k,s,x) = -\tfrac{1}{2}(-k)^{-s}(1-e^{-2ix\pi})\displaystyle\int \frac{z^{(s-1)+x}}{(z-k)^s\left(z-\frac{1}{k}\right)^s}\,dz = \\ \quad = -\tfrac{1}{2}(-k)^{-s}(e^{2ix\pi}-1)\displaystyle\int \frac{z^{(s-1)-x}}{(z-k)^s\left(z-\frac{1}{k}\right)^s}\,dz. \end{cases}$$

$$\text{Mod } z = 1,\ \arg z \text{ von 0 bis } 2\pi.$$

Indem wir jetzt die Gleichung (4) in Betracht ziehen, bekommen wir folgende einfache Beziehung zwischen $\psi(k, s, x)$ und $\phi(k, s, x)$:

$$6)\ \ldots\ \psi(k,s,x) = -i.\frac{e^{2ix\pi}-1}{e^{2ix\pi}+1}\times\phi(k,s,x) = \operatorname{tg} x\pi \times \phi(k,s,x).$$

A. Betrachtung der Fälle, worin s und x ganze Zahlen sind.

§ 5. Wenn s und x ganze Zahlen sind, so werden die Functionen unter dem Integralzeichen in (4) rationale Functionen von z. Man darf also den Kreis, welcher in (4) Integrationsweg ist, durch beliebig kleine Kreise ersetzen um die vom erstgenannten Kreise umschlossenen Pole der rationalen Function. Ist $z = \infty$ für die rationale Function eine Nullstelle der zweiten oder einer höheren Ordnung, das Integral der rationalen Function über einen unendlich grossen Kreis erstreckt also gleich Null, so darf man den Integrationskreis von Gleichung (4) auch erzetzen durch beliebig kleine Kreis um die ausserhalb dieses Kreises liegenden Pole. Diese Kreise müssen dann aber in entgegengesetztem Sinne als in (4) durchlaufen werden.

In dieser Weise erhalten wir folgende Formeln, indem wir die ganzen Zahlen s und x mit $\pm n$ und $\pm \nu$ bezeichnen:

Erstens: $s = + n$, $(n > 1)$, $x = \pm \nu (\nu > 0)$, $\operatorname{Mod} k < 1$.

7a).
$$\begin{cases} \phi(k, n, \nu) = \phi(k, n, -\nu) = \dfrac{2\pi k^{-n}}{(n-1)!}\left[\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\dfrac{z^{(n-1)+\nu}}{(\frac{1}{k} - z)^n}\right\}\right]_{z=k} = \\ \qquad = - \dfrac{2\pi k^{-n}}{(n-1)!}\left[\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\dfrac{z^{(n-1)-\nu}}{(k-z)^n}\right\}\right]_{z=\frac{1}{k}} \end{cases}$$

7b).
$$\begin{cases} \phi(k, n, \nu) = \phi(k, n, -\nu) = \dfrac{2\pi k^{-n}}{(n-1)!}\left[\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\dfrac{z^{(n-1)-\nu}}{(\frac{1}{k} - z)^n}\right\}\right]_{z=k} \\ \qquad (\text{wenn } \nu < n). \end{cases}$$

7c).
$$\begin{cases} \phi(k, n, \nu) = \phi(k, n, -\nu) = \dfrac{2\pi k^{-n}}{(n-1)!}\left[\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left\{\dfrac{z^{(n-1)-\nu}}{(\frac{1}{k} - z)^n}\right\}\right]_{z=k} + \\ \qquad + \dfrac{2\pi k^{-n}}{(\nu - n)!}\left[\dfrac{d^{\nu-n}}{dz^{\nu-n}}\left\{\dfrac{1}{(z-k)^n(\frac{1}{k} - z)^n}\right\}\right]_{z=0} \\ \qquad (\text{wenn } \nu \geqq n. \end{cases}$$

Vermöge einer linearen Substitution:

$$z = \alpha u + \beta$$

lassen sich obige Formeln so vereinfachen, dass die zwei singulären Punkte der rationalen Functionen, welche differenziiert werden sollen, nicht mehr von k abhängig sind. Denn die zwei Constanten α und β können so bestimmt werden, dass mit den zwei singulären Punkten der z-Ebene zwei beliebig zu wählende Punkte der u-Ebene übereinstimmen.

Will man zum Beispiel $z = 0$ und $z = \dfrac{1}{k}$ in $u = 0$ und $u = 1$ verlegen, so erreicht man dies mittelst der Substitution $z = \dfrac{1}{k} u$, und erhält dann folgende Formeln:

$$8a \;..\; \phi(k,n,\nu)=\phi(k,n,-\nu)=\frac{2\pi k^{-\nu}}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\left\{\frac{u^{(n-1)+\nu}}{(1-u)^n}\right\}\right]_{u=k^2}$$

$$8b)\;.\;\phi(k,n,\nu)=\phi(k,u,-\nu)=\frac{2\pi k^{-\nu-2n}}{(n-1)!}\left[\frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\left\{\frac{u^{(n-1)-\nu}}{(1-u)^n}\right\}\right]_{u=\frac{1}{k^2}}.$$

Zweitens: $s=+n$, $(n \geqq 1)$; $x=\pm\nu\,(\nu \geqq 0)$; **Mod** $k>1$.

In diesem Falle verwenden wir die Gleichung (2), nämlich:

$$\phi(k,\ s,\ x)=k^{-2s}\phi\left(\frac{1}{k},\ s,\ x\right).$$

welche Gleichung diesen Fall auf den vorhergehenden zurückführt.

Drittens: $s=0$, $x=\pm\nu$, $(\nu \geqq 0)$; **Mod** k **beliebig.**

Dann ist offenbar:

$$\phi(k,\ o,\ \nu)=\phi(k,\ o,\ -\nu)=0 \text{ (wenn } \nu>o).$$

$$\phi(k,\ o,\ o)=2\pi.$$

Viertens: $s=-n$; $(n \geqq 1)$; $x=\pm\nu(\nu \geqq o)$; **Mod** k **beliebig.**

Jetzt bekommen wir folgende Formeln:

$$9a)\;....\;\phi(k,\ -n\ \ \nu)=\phi(k,\ -n,\ -\nu)=0$$

$$\text{(wenn } \nu \geqq n+1).$$

$$9b)\begin{cases}\phi(k,-n,\nu)=\phi(k,-n,-\nu)=\dfrac{2\pi(-k)^n}{(n-\nu)!}\left[\dfrac{d^{n-\nu}}{dz^{n-\nu}}\left\{(z-k)^n\left(z-\dfrac{1}{k}\right)^n\right\}\right]_{z=0}\\[2ex] \qquad =\dfrac{2\pi(-k)}{(n+\nu)!}\left[\dfrac{d^{n+\nu}}{dz^{n+\nu}}\left\{(z-k)^n\left(z-\dfrac{1}{k}\right)^n\right\}\right]_{z=0}\end{cases}$$

$$\text{(wenn } \nu \leqq n).$$

Vermittelst der linearen Substitution $z=\alpha u+\beta$ **können nun wieder die singulären Punkte** $z=k$ **und** $z=\frac{1}{k}$ **in beliebige Punkte der** u-**Ebene verlegt werden, z. B. in** $u=1$ **und** $u=-1$.

Nach einiger Rechnung stellt sich heraus, dass mann dies erreicht vermöge der Substitution:

$$z = \frac{1}{2}\left(k - \frac{1}{k}\right) u + \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right).$$

Dann bekommen wir die folgenden Formeln:

$$9c) \ldots \phi(k, -n, \pm\nu) = \frac{2\pi(-k)^n}{(n-\nu)!}\left(\frac{k^2-1}{2k}\right)^{\nu+n}\left[\frac{d^{n-\nu}(u^2-1)^n}{du^{n-\nu}}\right]_{u=\frac{1+k^2}{1-k^2}} =$$

$$= \frac{2\pi(-k)^n}{(n+\nu)!}\left(\frac{k^2-1}{2k}\right)^{n-\nu}\left[\frac{d^{n+\nu}(u^2-1)^n}{du^{n+\nu}}\right]_{u=\frac{1+k^2}{1-k^2}}$$

(wenn $\nu \leqq n$).

Jetzt haben wir $\phi(k, -n, \nu) = \phi(k, -n, -\nu)$ in enge Beziehung mit den Kugelfunctionen der ersten Art gebracht. Denn, indem wir unter $P^n(u)$ die Kugelfunction verstehen vom n^{ten} Grade, so haben wir die wohlbekannte Gleichung:

$$P^n(u) = \frac{1}{2^n . n!} \frac{d^n(u^2-1)^n}{du^n}.$$

Also:

$$10a) \ldots \phi(k, -n, o) = 2\pi(-k)^n\left(\frac{k^2-1}{k}\right)^n P^n\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right) =$$

$$= 2\pi(1-k^2)^n P^n\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)$$

$$\phi(k, -n, \nu) = \phi(k, -n, -\nu) = \frac{2\pi \times n!}{(n+\nu)!}(1-k^2)^n\left(\frac{k^2-1}{2k}\right)^{-\nu} \times$$

$$\times \left[\frac{d^\nu P^n(u)}{du^\nu}\right]_{u=\frac{1+k^2}{1-k^2}}.$$

B. Betrachtung des Falles, worin s eine beliebige Zahl und x eine ganze Zahl, (oder Null), ist.

§ 6. In dem Falle, worin s zwar eine beliebige Zahl, aber x eine ganze Zahl $\pm \nu$ ist, (incl. Null), ist der Integrationsweg in (4), p. 425, immer noch ein geschlossener Weg auf der Riemannschen Fläche, welche zur Function unter dem Integralzeichen gehört.

Wir können also für den Integrations weg in (4) jeden andern substituieren, welche dieselben singulären Punkte ein- und ausschliesst, und in denselben Blättern herumläuft. Bevor wir dies aber tun, geben wir der Function unter dem Integralzeichen in (4), p. 425, vermöge der Substitution $z = \alpha u + \beta$, die hypergeometrische Normalform:

$$u^{\alpha}(1-u)^{\beta}(1-\xi u)^{\gamma},$$

Dabei muss $z = 0$ in $u = 0$ und $z = k$ in $u = 1$ verwandelt werden.

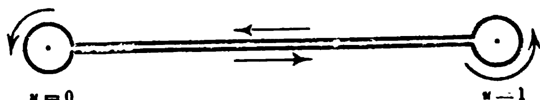
Die Substitution, welche dazu gefordert wird, ist offenbar:

$$z = ku.$$

Wir erhalten dann folgende Gleichung:

$$11).\left\{\begin{aligned} \phi(k,s,\nu)=\phi(k,s,-\nu) &= \frac{(-1)^s}{i} k^{\nu} \int\limits_{\text{Mod } u = \text{Mod } \frac{1}{k}} u^{(s-1)+\nu}(1-u)^{-s}(1-k^2u)^{-s}du = \\ &= \frac{(-1)^s}{i} k^{-\nu} \int\limits_{\text{Mod } u = \text{Mod } \frac{1}{k}} u^{(s-1)-\nu}(1-u)^{-s}(1-k^2u)^{-s}du. \end{aligned}\right.$$

Ist $\text{Mod}\, k < 1$, dann liegen die singulären Punkte $u = 0$ und $u = 1$ innerhalb des Kreises $\text{Mod}\, u = \frac{1}{k}$; weiter wissen wir schon, dass der Integrationskreis einen geschlossenen Weg auf der Riemannschen Fläche darstellt. Wir können also den Integrationskreis von 11) folgendermassen deformieren:



Zwei beliebig kleine Kreise um $u = 0$ und $u = 1$, und die gerade Linie zwischen $u = \delta$, $u = 1 - \varepsilon$, wenn δ und ε die Radien der beiden Kreise sind.

Setzen wir jetzt voraus, dass die reellen Teile von $s-1+\nu$ und von $-s$ grösser als -1 sind, so werden die Beiträge, welche die Integrationen längs der Kreise um $u=0$ und $u=1$ liefern, unendlich klein, wenn man diese Kreise unendlich klein werden lässt. So bekommen wir folgende Gleichung:

$$12). \left\{ \begin{aligned} &\phi(k, s, \nu) = \phi(k, s, -\nu) = \\ &= \frac{(-1)^\nu}{i} k^\nu (1-e^{-2\pi i s}) \int_0^1 u^{(s-1)+\nu} (1-u)^{-s} (1-k^2 u)^{-s} du = \\ &= \frac{(-1)^\nu}{i} k^\nu (1-e^{-2\pi i s}) \frac{\Pi(s-1+\nu)\Pi(-s)}{\Pi(\nu)} F(s, s+\nu, \nu+1, k^2), \end{aligned} \right.$$

worin $\Pi(x)$ die Π-function und $F(\alpha, \beta, \gamma, \xi)$ die hypergeometrische Reihe bedeuten.

Da nun weiter:

$$\Pi(x+1) = (x+1)\Pi(x), \quad \Pi(x)\Pi(-x) = \frac{\pi x}{\sin \pi x}$$

so ergibt sich schliesslich folgende Formel:

$$13) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \phi(k, s, \nu) = \phi(k, s, -\nu) =$$

$$= 1^s . k^\nu . \frac{s(s+1) \dots (s+\nu-1)}{1.2 \dots \nu} F(s, s+\nu, \nu+1, k^2) \times 2\pi.$$

Die analytische Function $\phi(k, s, \nu)$ von s ist also für gegebene Werte von k (Mod $k<1$) und ν, (ν eine ganze Zahl, incl. Null), identisch mit der analytischen Function von s, welche für gegebene Werte von k (Mod $k<1$) und ν (ν eine ganze Zahl, incl. Null), dargestellt wird durch:

$$1^s k^\nu \frac{s(s+1) \dots (s+\nu-1)}{1.2 \dots \nu} F(s, s+\nu, \nu+1, k^2) \times 2\pi.$$

Denn diese beiden analytischen Functionen sind ja identisch im Gebiete, wo die reellen Teile von $-s$ und $s-1+\nu$ grösser als -1 sind, also sind diese Functionen im ganzen Gebiete der Variabelen s identisch.

Die Gleichung (13) gilt also allgemein, solange Mod $k<1$, und ν eine positive ganze Zahl ist, incl. Null.

Ist Mod $k>1$, so benutzen wir die Gleichung:

$$\phi(k, s, \pm\nu) = k^{-2s}\phi\left(\frac{1}{k}, s, \pm\nu\right);$$

dann ergibt sich aus (13) folgende Formel:

13a) . . . . . $\phi(k, s, \nu) = \phi(k, s, -\nu) =$

$$1^s k^{-2s-\nu} \frac{s(s+1) \ldots\ldots (s+\nu-1)}{1 \, . \, 2 \ldots\ldots\ldots \nu} \left(s, s+\nu, \nu+1, \frac{1}{k^2}\right) \times 2\pi$$

§ 7. Aus obiger Gleichung (13) erhellt, dass die Function $\phi(k, s, \nu) = \phi(k, s, -\nu)$ als ein zu der singulären Stelle $k^2 = 0$ und zu dem Exponenten $\frac{1}{2}\nu$ gehörender Fundamentalzweig der Riemanschen P-Function:

$$\alpha) \ldots \quad \left| \begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{2}\nu & s + \frac{1}{2}\nu & 0 & k^2 \\ -\frac{1}{2}\nu & s - \frac{1}{2}\nu & 1 - 2s & \end{matrix} \right|$$

zu betrachten ist, so lange wenigstens Mod $k^2 < 1$ bleibt. Aus der Gleichung (13a) schliessen wir weiter, dass $\phi(k, s, \nu)$ oder $\phi(k, s, -\nu)$ im Gebiete Mod $k^2 > 1$ ein zu der singulären Stelle $k^2 = \infty$ und zu dem Exponenten $s + \frac{1}{2}\nu$ gehörender Fundamentalzweig *derselben* Riemannschen P-Function (α) ist.

Die Theorie der P-Functionen ergibt nun für $\phi(k, s, \pm \nu)$, Mod $k^2 < 1$, noch folgende Formeln:

14) . . . . $\phi(k, s, \pm \nu) =$

$$= 1^s . \frac{s(s+1) \ldots (s+\nu-1)}{1 \, . \, 2 \ldots\ldots \nu} k^\nu (1-k^2)^{1-2s} F(1-s, 1-s+\nu, \nu+1, k^2) \times 2\pi,$$

15) . . . . $\phi(k, s, \pm \nu) =$

$$= 1^s . \frac{s(s+1) \ldots (s+\nu-1)}{1 \, . \, 2 \ldots\ldots \nu} k^\nu (1-k^2)^{-s} F\left(s, 1-s, \nu+1, \frac{k^2}{k^2-1}\right) \times 2\pi,$$

16) . . . . $\phi(k, s, \pm \nu) =$

$$= 1^s . \frac{s(s+1) \ldots (s+\nu-1)}{1 \, . \, 2 \ldots\ldots \nu} k^\nu (1-k^2)^{-s-\nu} F\left(s+\nu, 1-s+\nu, \nu+1, \frac{k^2}{k^2-1}\right) \times 2\pi.$$

Die letzten zwei Formeln sind nur zu benutzen, wenn Mod $\frac{k^2}{k^2-1} < 1$ ist.

Für $\phi(k, s, \pm \nu)$, wenn Mod $k^2 > 1$ ist, bekommen wir folgende Formeln:

14a) . . . . $\phi(k, s, \pm\nu) =$

$$= 1^s . \frac{s(s+1)..(s+\nu-1)}{1.2....\nu} k^{2s-2-\nu}(k^2-1)^{1-2s} F\left(1-s, 1-s+\nu, \nu+1, \frac{1}{k^2}\right) \times 2\pi,$$

15a) . . . . $\phi(k, s, \pm\nu) =$

$$= 1^s . \frac{s(s+1)..(s+\nu-1)}{1.2....\nu} k^{-\nu}(k^2-1)^{-s} F\left(s, 1-s, \nu+1, \frac{1}{1-k^2}\right) \times 2\pi,$$

16a) . . . . $\phi(k, s, \pm\nu) =$

$$= 1^s . \frac{s(s+1)..(s+\nu-1)}{1.2....\nu} k^{\nu}(k^2-1)^{-s-\nu} F\left(s+\nu, 1-s+\nu, \nu+1, \frac{1}{1-k^2}\right) \times 2\pi.$$

Die letzten zwei Formeln sind nur zu benutzen, wenn Mod $\frac{1}{1-k^2} < 1$ ist.

Aus den Gleichungen 13) nnd 14) ergibt sich folgende Relation zwischen $\phi(k, s, \pm\nu)$ und $\phi(k, 1-s, \pm\nu)$:

$$17) .. \phi(k, s, \pm\nu) = \frac{s(s+1). (s+\nu-1)}{(1-s)(2-s)..(\nu-s)} (1-k^2)^{1-2s} \phi(k, 1-s, \pm\nu)$$

wenn Mod $k^2 < 1$ ist.

Aus 13a) und 14a) erhalten wir:

$$17a) .. \phi(k, s, \pm\nu) = \frac{s(s+1)..(s+\nu-1)}{(1-s)(2-s)..(\nu-s)} (k^2-1)^{1-2s} \phi(k, 1-s, \pm\nu)$$

wenn Mod $k^2 > 1$ ist

§ 8. Es lassen sich natürlich mit Hülfe der Theorie der P-Functionen noch weitere Formeln für $\phi(k, s, \pm\nu)$ aufstellen.

Wir wollen uns aber mit obigen Formeln begnügen, nur bemerken wir, dass die P-Function:

$$P\left|\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{2}\nu & s+\frac{1}{2}\nu & 0 & k^2 \\ -\frac{1}{2}\nu & s-\frac{1}{2}\nu & 1-2s & \end{matrix}\right|$$

nicht nur die projectiven Substitutionen $k^2, \frac{1}{k^2}, \frac{k^2}{k^2-1}, \frac{1}{1-k^2}, 1-k^2, \frac{k^2-1}{k^2}$ zulässt, welche Substitutionen man bei jeder

P-Funktion anwenden kann, sondern auch noch Andre, welche ihren Grund in den Werten der Exponenten der jetzt betrachteten P-Funktion haben, und in der von KUMMER dargelegten allgemeinen Theorie eingehend untersucht worden sind.

So lässt sich zeigen, dass obige P-Funktion zu den Kugelfunctionen zurückzuführen ist. Denn:

$$P\begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{2}\nu & s+\frac{1}{2}\nu & 0 & k^2 \\ -\frac{1}{2}\nu & s-\frac{1}{2}\nu & 1-2s & \end{vmatrix} = P\begin{vmatrix} -1 & \infty & +1 & \\ \frac{1}{2}\nu & 0 & s+\frac{1}{2}\nu & \frac{k^2+1}{k^2-1} \\ -\frac{1}{2}\nu & 1-2s & s-\frac{1}{2}\nu & \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{k^2+1}{k^2-1} - 1\right)^s P\begin{vmatrix} -1 & \infty & +1 & \\ \frac{1}{2}\nu & s & \frac{1}{2}\nu & \frac{k^2+1}{k^2-1} \\ -\frac{1}{2}\nu & 1-s & -\frac{1}{2}\nu & \end{vmatrix}$$

während wir wissen, dass die allgemeinen Kugelfunctionen sich folgendermassen durch das RIEMANNsche Symbol darstellen lassen:

$$P\begin{vmatrix} -1 & \infty & +1 & \\ \alpha & \beta & \alpha & x \\ \alpha' & \beta' & \alpha' & \end{vmatrix},$$

dass also die Kugelfunctionen solche RIEMANNschen P-Functionen sind, bei denen zwei Exponentenpaare identisch sind.

Nun gilt aber, wie sich leicht zeigen lässt, folgende Gleichung:

$$P\begin{vmatrix} -1 & \infty & +1 & \\ \alpha & \beta & \alpha & x \\ \alpha' & \beta' & \alpha' & \end{vmatrix} = P\begin{vmatrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \frac{1}{2}\beta & \alpha & x^2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\beta' & \alpha' & \end{vmatrix}.$$

Bei den Kugelfunctionen sind also nicht nur die gewöhnlichen 6 projectiven Substitutionen möglich, sondern sie gestatten auch die einfache rationale Substitution x^2.

Die von uns betrachtete Function $\phi(k, s, \nu)$ lässt sich also z. B. linear in zwei hypergeometrischen Reihen ausdrücken, deren Argument $\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2$ ist.

C. Betrachtung des Falles, worin s und x beliebige Zahlen sind.

§ 9. Wir wissen schon, dass: (Gleichung (4), p. 425)

$$\varphi(k,s,x)=\frac{1}{2i}(-k)^{-s}(1+e^{-2ix\pi})\int\limits_{\substack{\text{Mod } z=1\\ \text{arg. von 0 bis } 2\pi}} z^{(s-1)+x}(z-k)^{-s}\left(z-\frac{1}{k}\right)^{-s}dz=$$

$$=\frac{1}{2i}(-k)^{-s}(1+e^{2ix\pi})\int\limits_{\substack{\text{Mod } z=1\\ \text{arg. } z \text{ von 0 bis } 2\pi}} z^{(s-1)-x}(z-k)^{-s}\left(z-\frac{1}{k}\right)^{-s}dz$$

Weil jetzt x eine beliebige Zahl ist, so ist der Integrationsweg kein geschlossener Weg, sondern ein Weg zwischen zwei über einander liegenden Punkten der zu

$$z^{s-1\pm x}(z-k)^{-s}\left(z-\frac{1}{k}\right)^{-s}$$

gehörigen Riemannschen Fläche. Die in Teil B gefundenen Resultate werden also hinfällig, denn ihre Begründung liegt ja eben darin, dass der Integrationsweg ein Geschlossener ist, wenn x eine positive oder negative ganze Zahl ist.

Wir müssten also von Neuem untersuchen, welche Formeln im vorliegenden Falle herauskommen vermittelst Substitution und Deformation des Integrationsweges. Dies wollen wir aber unterlassen, da wir im im Stande sind auf ganz anderm Wege eine Formel für $\phi(k, s, x)$ zu erhalten. In dieser Formel wird mit Hülfe der uns jetzt vollkommen bekannten Functionen $\phi(k, s, 0)$, $\phi(k, s, 1)$, $\phi(k, s, 2)$, etc., die Abhängigkeit van $\phi(k, s, x)$ von x in ganz einfacher Weise wiedergegeben.

Um diese Formel zu erhalten bemerken wir, dass die Function $(1+k^2-2k\cos\theta)^{-s}$, so lange Mod $k \neq$ ist, folgendermassen in eine Fouriersche Reihe zu entwickeln ist:

$$(1+k^2-2k\cos\theta)^{-s} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (1+k^2-2k\cos\theta)^{-s}\,d\theta +$$

$$+\frac{2\cos\theta}{\pi}\int_0^\pi (1+k^2-2\,k\cos\theta)^{-s}\cos\theta d\theta +$$

$$+\frac{2\cos 2\theta}{\pi}\int_0^\pi (1+k^2-2k\cos\theta)^{-s}\cos 2\theta d\theta + \ldots =$$

$$=\frac{1}{2\pi}\phi(k,s,0)+\frac{\cos\theta}{\pi}\phi(k,s,1)+\frac{\cos 2\theta}{\pi}\phi(k,s,2)+\ldots\ldots$$

Also:

$$\phi(k,s,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos x\theta\,\{\tfrac{1}{2}\phi(k,s,0)+\cos\theta\phi(k,s,1)+$$
$$+\cos 2\theta\varphi(k,s,2)+\ldots\}\,d\theta.$$

Weil die Fouriersche Reihe im vorliegenden Falle gewiss equiconvergent ist, dürfen wir obige Gleichung in folgender Form ansetzen:

$$18).\left\{\begin{aligned}\phi(k,s,x) &= \frac{1}{\pi}\Big\{\tfrac{1}{2}\phi(k,s,0)\int_0^{2\pi}\cos x\theta d\theta+\phi(k,s,1)\int_0^{2\pi}\cos\theta\cos x\theta d\theta+\\ &+\phi(k,s,2)\int_0^{2\pi}\cos 2\theta\cos x\theta d\theta+\ldots\ldots\Big\} =\\ &=\Big\{\frac{1}{2x^2}\phi(k,s,0)+\frac{1}{x^2-1^2}\phi(k,s,1)+\frac{1}{x^2-2^2}\phi(k,s,2)+\\ &+\ldots\ldots\Big\}\times\frac{x\sin 2\pi x}{\pi}.\end{aligned}\right.$$

Dies ist also die Gleichung, welche met Hülfe der uns vollkommen bekannten Functionen $\phi(k, s, 0)$, $\phi(k, s, 1)$, ... die Abhängigkeit von $\phi(k, s, x)$ von x formuliert.

§ 10. Schliesslich wollen wir noch bemerken, dass im Allgemeinen $\phi(k, s, x)$ im Gebiete Mod $k > 1$ nicht die analytische Fortsetzung ist von $\phi(k, s, x)$ im Gebiete Mod $k < 1$.

Denn $\phi(k, s, \pm\nu)$, ν eine positive ganze Zahl oder Null, ist im Gebiete Mod $k^2 > 1$ ein zu der singulären Stelle $k^2 = \infty$

und zu dem Exponenten $s + \frac{1}{2}\nu$ gehörender Fundamentalzweig der Riemannschen P-Function:

$$\left| \begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ \frac{1}{2}\nu & s + \frac{1}{2}\nu & 0 & k^2 \\ -\frac{1}{2}\nu & s - \frac{1}{2}\nu & 1 - 2s & \end{matrix} \right|$$

während $\phi(k, s, \pm \nu)$ im Gebiete Mod $k^2 < 1$ ein zu der singulären Stelle $k^2 = 0$ und zu dem Exponenten $\frac{1}{2}\nu$ gehörender Fundamentalzweig *derselben* Riemannschen P-Function ist. (Cf. § 7, p. 432).

Diese beiden Fundamentalzweige sind im Allgemeinen verschiedene Zweige der P-Function, also nicht die analytische Fortsetzungen von einander. Dies ist nur dann der Fall, wenn s eine negative ganze Zahl ist, wie auch zu erwarten war.

HUGENIANA GEOMETRICA. II.

DOOR

P. VAN GEER

('s-Gravenhage.)

Wij komen nu tot het tweede en derde deel der briefwisseling, beginnende met het jaar 1657, waarin HUYGENS zijn 28sten verjaardag vierde; hij vertoefde toen als ambteloos burger in den Haag, en woonde in het huis zijns vaders op het Plein. Al zijn tijd en krachten kon hij besteden aan wetenschappelijke onderzoekingen, die zich zoowel op het gebied der sterren- en natuurkunde als op dat der wiskunde bewogen.

Van zijn correspondenten der voorgaande periode is MERSENNE afgevallen, want hij was in 1648 overleden. De overige reeds genoemde correspondenten bleven voortgaan, hieronder FRANS VAN SCHOOTEN tot zijn dood in 1660 (en niet in 1661, zooals eerst was vermeld).

Bij deze komen nieuwe correspondenten, omtrent welke een kort bericht zal worden gegeven. Onder hen noemen wij in de eerste plaats de Hollanders van naam, die hier in aanmerking komen.

JOHAN DE WITT de bekende raadpensionnaris, geboren te Dordrecht in 1625; hij studeerde te Leiden en was daar leerling van FR. VAN SCHOOTEN tot wiens beste leerlingen hij behoorde. Hij schreef een voortreffelijk werk over kromme lijnen, waarin de theorie van DESCARTES werd ontwikkeld en uitgebreid. Hierover correspondeerde hij met HUYGENS; aangezien echter in deze briefwisseling geen bepaalde meetkundige vraagstukken worden behandeld, kunnen wij haar hier laten rusten.

JOHANNES HUDDE, geboren te Amsterdam in 1628 en aldaar overleden in 1704; hij was 19 malen burgemeester der hoofdstad, maar wijdde een goed deel zijner krachten aan mathematische studiën; hij schreef verschillende verhandelingen op het gebied der kansrekening en der meetkunde, ook schreef hij vele en lange brieven hierover aan HUYGENS, waarvan verscheidene over meetkundige vraagstukken.

Hendrik van Heuraet, geboren te Haarlem in 1633, was mede student te Leiden aanvankelijk in de medicijnen. Doch zijn neiging voerde hem op mathematisch gebied, waartoe hij voortreffelijke bijdragen leverde. Hij heeft geen mathematische werken geschreven. Wat hij heeft gedaan blijkt slechts uit zijn brieven, waaronder ook die aan Huygens. Hij hield zich bezig met een onderwerp, destijds aan de orde van den dag: de rectificatie van krommen. Op lateren leeftijd verhuisde hij naar Saumur in Frankrijk, waar hij ook (men weet niet in welk jaar) is overleden.

Onder de buitenlanders komen voor:

René François de Sluse, genaamd Slusius, belgisch geestelijke, geboren in 1622 te Visé bij Luik, waar zijn vader notaris was. Hij studeerde te Rome in de theologie en werd domheer te Luik, waar hij in 1685 stierf. Zijn neiging voerde hem op mathematisch gebied, dat hij met verschillende scherpzinnige werken verrijkte. Door zijn vader werd Huygens met hem bekend; hun briefwisseling, in het latijn gevoerd, werd zeer uitgebreid; daaraan zullen verscheidene vraagstukken worden ontleend.

John Wallis, engelsch wiskundige en voorlooper van Newton. Geboren in 1616 was hij dertien jaren ouder dan Huygens, tot wien hij zich zeer aangetrokken gevoelde. Hij behoorde tot de eerste leden der in 1661 opgerichte *Royal Society*, waarvan Huygens het eerste buitenlandsche lid was; daar hebben zij elkander ook persoonlijk leeren kennen; de waardeering was wederzijdsch, zooals duidelijk blijkt uit de brieven.

Aangezien de vraagstukken in diepte toenemen en daardoor tot herhaalde correspondentie op verschillende tijden aanleiding gaven, zullen wij van de historische volgorde afwijken en elk vraagstuk in zijn ontwikkeling en oplossing volgen.

Reeds werd de cycloïde in deze briefwisseling behandeld; daar het echter mijn voornemen is de merkwaardige geschiedenis dezer kromme in een afzonderlijk opstel te behandelen, laat ik thans al, wat hierop betrekking heeft, rusten.

Even als in het vorige opstel zullen bij elk vraagstuk aangehaald worden de namen der correspondenten, jaar en nummer van de brieven, waarin het behandeld wordt. Waar mij dit wenschelijk voorkomt, zal aan het vraagstuk een korte ophelderving worden toegevoegd, en in de figuur of de verklaring eenige wijziging worden aangebracht.

1. Chr. H. aan Sl(usius) 1657, n°. 397.

Gegeven een hoek en een punt er binnen. Door dit punt een lijn te trekken:

1°. die van den hoek den kleinsten driehoek afsnijdt;

2°. die onder alle door het punt getrokken lijnen tusschen de beenen van den hoek de kleinste lengte heeft.

N°. 398. Oplossing van Sl.

1°. (fig 1) Zij BAC de gegeven hoek, P het gegeven punt. Trek PQ // BA en neem QR = AQ, dan zal RPU de gevraagde lijn zijn. (Raaklijn in P aan de hyperbool, bepaald door dit punt en de beenen van den hoek als asymptoten).

2°. (fig. 2). Zij $\angle A = 90°$. Beschrijf den rechthoek PEAF, waarvan D het middelpunt is. Trek BC zoodanig, dat zij door P gaat en DB = DC, dan is deze de gevraagde lijn.

(Hoe moet de constructie gewijzigd worden, als $\angle A$ niet recht is?)

2. Sl. aan Chr. H. 1658, n°. 401.

(fig. 3). Op een middellijn AB een kromme zoodanig te bepalen, dat:

$$\frac{CID}{EVF} = \frac{\overline{AI}^2 . IB}{\overline{AV}^2 . VB}.$$

(Deze kromme heeft den naam van *parel van Slusius* verkregen en is te beschouwen als een bijzonder geval eener klasse van krommen, door Slusius in een zijner werken behandeld. Zij gaf aanleiding tot uitvoerige briefwisseling, waaraan ook door F. van Schooten en van Heuraet werd deelgenomen.)

Chr. H. aan Sl., 403.

Constructie der raaklijn (fig. 4.)

Neem AC = ¼AB en plaats in C de loodlijn DE op AB, dan zijn D en E buigpunten, zoodat AD de bolle en DB de holle zijde naar de as keert.

Zij F het midden van AB; plaats in F de loodlijn KG op AB en neem op het verlengde daarvan het punt H, zoodanig dat FH = 2KG, dan zal HB raaklijn zijn in B.

Om de raaklijn in een willekeurig punt P der kromme te construeeren, ga men te werk als volgt: Zij PQ de loodlijn op de as en neem QN = ½ AQ. Zij verder QR : QB = BN : NQ, dan zal RP de gevraagde raaklijn zijn.

Quadratuur.

Verbind K en G met A en B door rechte lijnen, dan zal het oppervlak der kromme gelijk zijn aan anderhalf maal het oppervlak der ruit KAGB.

Zwaartepunt.

Het zwaartepunt Z van het oppervlak der krommo ligt op de as zoodanig dat $AZ = {}^{3}/_{5}\, AB$. Dit volgt uit den regel van GULDIN.

FR. VAN SCHOOTEN aan CHR. H., n°. 419 (fig. 5).

Zij $AG = GB = \frac{1}{2}AB$; $AC = CO = OB = \frac{1}{3}AB$ en trek de loodlijnen CR, CH en OQ de kromme snijdende in de punten D, K en N; dan is D het buigpunt en N het hoogste punt der kromme. Neem $KH = \frac{1}{3}KG$ of $NQ = \frac{1}{8}NO$, of $DR = 1\frac{1}{4}DC$, dan is rechthoek $AW =$ oppervlak ADKNVBSA.

Zij $NT \,//\, AB$, dan is rechthoek $AN =$ opp. ADKNOSA, derhalve:

$$\text{rechth. } TQ + \text{rechth. } OW = \text{opp. } NVBSN,$$
$$\text{rechth. } TH = \text{opp. } NVBXN$$
$$\text{en} \quad \text{opp. } AZD = \text{opp. } DKN.$$

H. VAN HEURAET aan FR. VAN SCH., n°. 435, (fig. 6).

De brief van v. HEURAET is bij uitzondering in het Nederlandsch gesteld.

Daaraan wordt het volgende ontleend:

Sij getogen in de kromme een recte lijn naer gevallen AB, en uyt A en B getrocken AC, BD perpendiculair op de ax. deel CD in 4 gelycke deelen in F, E, G, en trekt de linien FI, EH, GK parallel met AC, en 't samengevoeght AH, HB, ondersoeck de reden van de linie HL tot IM en KN t'samen, welcke ic bevinde als 2 tot 1, en dienvolgens den boogh AIHKBA tot sijn ingeschreven driehoec AHB als 4 tot 3.

Voorts bevinde ic deze linie te bestaan uyt twe contrarie bochten, en 't punct tusschen dese beyde wort gevonden nemende OQ gelyck $1/3$ OP, en treckende door Q de perpendiculair RS. Indien nu uyt R en S twe gelycke linien getogen werden als RT, SV, en de selve in ettelycke gelycke deelen werden gedeelt met linien parallel met TV, en de puncten in de cromme daer dese linien doorgaen met rechte linien t'samen getrocken, soo

zijn de booghjes die door dese linien werden afgesneden vervolgens tot malkander in dese proportie 1, 3, 5, 7, 9, 11 &c. hier uyt vinde ick het centrum gravitatis van de twe bogen door SV en RT afgesneden, in Y deelende de linie QX in 15 delen, en daer af 8 nemende voor QY.

SL. aan CHR. H., n°. 450 (fig. 7).

Nu eerst wordt de kromme goed geteekend als parabool van de derde orde met het buigpunt, tevens middelpunt, in D en den oneindig voortloopenden tak in B en G, terwijl de vergelijking op de in de figuur aangegeven coördinaten den vorm aanneemt:

$$a^2x = y^3 + ay^2.$$

CL. MYLON aan CHR. H., n°. 578 (fig. 4).

Het oppervlak der halve parel van SLUSIUS staat tot het oppervlak van den rechthoek, waarvan AB de basis en de ordinaat van haar midden FK de hoogte is, als 2 : 3.

Wordt de eigenschap vervangen door: (fig. 3)

$$\frac{\overline{CID}}{\overline{EVF}} = \frac{\overline{AI}^3 . IB}{\overline{AV}^3 . VB}$$

dan wordt de verhouding als 4 : 5.

Wordt de 3de macht algemeen door de n^{de} macht vervangen, dan is de verhouding $2^{n+1} : (n + 1)(n + 2)$.

3. Het vraagstuk der beide middenevenredigen tusschen twee gegeven lijnen. Verschillende constructiën staan in de briefwisseling verspreid; zij zullen hier samengevoegd worden.

De constructie van APOLLONIUS ligt in fig. 2 opgesloten. Daar toch zijn EB en FC de beide middenevenredigen tusschen EP en PF.

CHR. H. aan SL. 1657, n°. 414 (fig. 8).

Zijn AB en AC de beide gegeven lijnen, waarvan de kleinste is AB. Maak BD = $^1/_2$ BC en AE = 2AB. Beschrijf op DE als as een (halve) ellips DKE, waarvan de parameter is gelijk aan een derde van DE. Neem EF gelijk aan de helft van den parameter, FG gelijk AB en GH loodrecht op DE ook gelijk AB.

Beschrijf uit H als middelpunt een cirkel, die gaat door E en de ellips nogmaals snijdt in K. Zij KL loodrecht op de as, dàn zal AL de kleinste der beide gezochte middenevenredigen zijn.

Sl. aan Chr. H. 1658, n°. 489 (fig. 9).

Zijn AB en BC de gegeven lijnen, waarbij BC = 2AB. Zij O het midden van BC, OE ⊥ BC en = AB.

Beschrijf een halve ellips met E tot middelpunt en waarvan AE en EO verwante richtingen zijn.

Zij F het midden van OE en beschrijf een cirkel uit F als middelpunt, die door C en B gaat. Zij K het snijpunt van ellips en cirkel, KD ⊥ AC, dan is BD de kleinste der beide middenevenredigen (derhalve de ribbe van den cubus, dubbel zoo groot als de cubus waarvan AB de ribbe is).

Sl. aan Chr. H. 1658, n°. 495.

(fig. 10). Zij AF de grootste, FC de kleinste der beide gegeven lijnen, zoodanig samengesteld, dat elk van beide middendoor gedeeld in D en E, DE ⊥ FC, en maak het parallelogram AC; trek DQ // AB en door A een lijn HAG, die de verlengden van CB en CF snijdt in H en G, zoodanig dat, verbindende D met G, DG gelijk zij aan QH. Dan zal

$$AF : FG = FG : HB = HB : FC.$$

Anders (fig. 11).

Zijn AB en AQ de gegeven lijnen; beschrijf uit B als middelpunt een cirkelboog, die door A gaat en de loodlijn in Q snijdt in N. Trek AN en deel AB in F middendoor. Richt in F de loodlijn op en maak AC = AN; trek QC en daaraan evenwijdig AE en trek uit C de lijn CD zoodanig, dat CE = DA.

Dan is

$$BA : DE = DE : DA = DA : AQ.$$

Al deze constructiën van het vraagstuk zijn goed, hetgeen niet moeilijk valt te bewijzen. Thans zal hieraan toegevoegd worden een constructie, die niet goed is, maar, als afkomstig van een op ander gebied hoog staand geleerde, voor deugdelijk werd aangenomen, zoodat het heel wat moeite heeft gekost om de onjuistheid daarvan aan te toonen.

Zij is namelijk afkomstig van den wijsgeer Thomas Hobbes (1588—1679), die bij Koning Karel II, wien hij de constructie aanbood, in hooge gunst stond.

Zij komt neer op het volgende, (getrouwelijk uit het Engelsch overgebracht.)

TH. HOBBES aan Koning KAREL II, 1661, n°. 895 (fig. 12), *Te vinden twee middenevenredigen tusschen twee gegeven rechte lijnen.*

Laat AB de grootste lijn zijn, waarvan het vierkant is ABCD. Verleng de zijde CB tot P, zoodat BP = CB. Trek uit P, PL willekeurig snijdende AB in L. Trek LK ⊥ PL, snijdende BC in K. Trek KE ⊥ LK, snijdende het verlengde van AB in E. Zoo verkrijgen wij door constructie vier evenredige lijnen, waarvan de twee middelsten zijn BL en BK, BP = AB en BE de twee uiterste.

Tusschen AB de grootste en BE de kleinste construeer de middenevenredige BF, maak BG op de zijde AB daaraan gelijk, en trek de diagonaal BD, snijdende LK in H, en deelende ∠ KBL in twee gelijke deelen. Zooals nu LH zal staan tot HK, als LB de grootste tot BK de kleinste der middelste; zoo zal ook AB staan tot BL, en BK tot BE.

Uit het middelpunt H met den afstand HL beschrijf een cirkelboog, snijdende BC in N dan zullen BN, BL even groot zijn. En gelijk HN tot HK zal BN tot BK zijn, omdat HN en HL gelijk zijn.

Nu is BF (als middenevenredige tusschen de uiterste AB en BE) ook middenevenredig tusschen BN en BK de middelste. Neemt men dus in BA de lijn BO gelijk BK en trekkende NO zal NHO een rechte lijn zijn en ∠ NHK = ∠ LHO, en de lijn FG zal gaan door H.

En gelijk BN tot BK, zoo is ook NF tot FK [1]) (want de verschillen van evenredige grootheden zijn als deze evenredige grootheden zelve), zoo ook HN tot HK, derhalve verdeelt de lijn FG de hoeken NHK en LHO in twee gelijke deelen.

Nu BF als de kleinste der beide middenevenredigen bekend is, is ook FG bekend en de helft hiervan BH is bekend zoowel in grootte als in stand, zijnde gelegen in de diagonaal. Derhalve is het punt H bekend en ten slotte het punt E door constructie.

Trek de lijn EH en deel haar middendoor in I; en beschrijf een halven cirkel met IE = IH tot straal, deze halve cirkel

---

[1]) Hier ligt de fout in de redeneering van HOBBES.

zal gaan door K, omdat $\angle HKE = 90°$. Daardoor is de lijn BK als kleinste der middenevenredigen (en dus ook de grootste) bekend.

Constructie van het vraagstuk.

Laat AB de grootste en BE de kleinste der gegeven lijnen zijn, tusschen welke ik de beide middenevenredigen moet vinden. Ik beschrijf op AB het vierkant ABCD en trek de diagonaal BD; hierin neem ik BH gelijk aan de helft van de lijn, waarvan het vierkant het dubbel is van het vierkant op de middenevenredige tusschen de gegeven lijnen; verbindende H met E verdeel ik EH in I in twee gelijke deelen. Ten slotte beschrijf ik uit het middelpunt I met den straal HI een cirkelboog, die de zijde BC moet snijden in K. Aldus heb ik de kleinste der beide middenevenredigen gevonden, derhalve ook de grootste.

De tegenspraak liet zich niet wachten. Reeds in het volgende stuk wordt de fout aangewezen door lord W. BROUNCKER, een der eerste leden en voorzitter der Royal Society.

CHR. H. schrijft naar aanleiding hiervan (n°. 916):

„Dans le Dialogue de monsieur HOBBES (een latijnsch werk, waarin o.a. over de verdubbeling van den cubus wordt gehandeld) je ne trouve rien de solide, mais seulement de pures visions. Quand a ce qu'il adjouste de la duplication du cube, je ne l'ay pas voulu regarder par ce que je scai demonstrativement que la chose est impossible. Et d'ailleurs il y a longtemps qu'en matière de géometrie monsieur HOBBES a perdu tout credit au pres de moy."

Het was niet de eerste maal, dat een wijsgeer zich waagde op een gebied, waar hij niet thuis was, en hij zou hierin waarlijk ook niet de laatste zijn. Doch het waren niet uitsluitend wijsgeeren, die zich aldus bezondigden. De beroemde letterkundige, JOSEPH SCALIGER, wiens portret als hoogleeraar in de senaatzaal der leidsche hoogeschool prijkt, gaf in 1592 een werk uit onder den titel *Nova cyclometria*, waarin hij voorgaf het vraagstuk van de quadratuur des cirkels te hebben opgelost. Maar het valsche in zijn oplossing werd door verschillende wiskundigen, waaronder ook door CHR. H. aangetoond, en tevens aangewezen, hoe weinig SCALIGER bekend was met de door EUCLIDES en ARCHIMEDES gelegde mathematische grondslagen.

4. Sl. aan Chr. H., n°. 418.

1e. Gegeven zijn twee cirkels en een rechte lijn. Een cirkel te construeeren, die de gegeven cirkels aanraakt en de lijn zoodanig snijdt, dat het afgesneden segment een gegeven hoek bevat.

(Door de aanrakingsvraagstukken van Apollonius is de oplossing niet moeilijk te vinden).

2e. Gegeven vijf rechte lijnen, waarvan geen drie door één punt gaan. De kegelsnede te construeeren, welke deze lijnen aanraakt. De beide takken der hyperbool worden te zamen als één kegelsnede beschouwd. (Van dit vraagstuk wordt geen oplossing meegedeeld; ik vermoed dat H. haar niet kon vinden. Een zuiver meetkundige constructie is te vinden in Newton's *principia Liber* I, *prop.* XXVII. *problema* XIX. Hierin wordt het vraagstuk opgelost door het construeeren der raakpunten en dus teruggebracht tot de constructie eener kegelsnede uit vijf gegeven punten, die in *prop.* XXII. *probl.* XIV wordt meegedeeld).

5. Fr. van Schooten aan Chr. H. 1657, n°. 419.

Te onderzoeken de krommen voorgesteld door de vergelijkingen:

I. $a^2x = y^3 + 2ay^2 + a^2y$.

II. $y^6 - 3axy^4 - 2a^2xy^3 + 3a^2x^2y^2 - 6a^3x^2y + a^4x^2 - a^3x^3 = 0$.

III. $x + y = \sqrt[4]{ax^3}$.

Het onderzoek dezer krommen gaf aanleiding tot uitvoerige en langdurige correspondentie, waaraan ook door Slusius en J. Hudde werd deelgenomen. Daarin werd nu eens de eene, dan weer een andere der drie krommen behandeld. Ik zal hier achtereenvolgens meedeelen, wat omtrent elke van deze werd gevonden.

I. $a^2x = y^3 + 2ay^2 + a^2y$.

(fig 13). De raaklijn in een willekeurig punt F der kromme wordt als volgt gevonden.

Zij
$$AH = AG = a$$
$$HI = 2CA$$
$$IC : HC = AC : BC,$$

dan is BF de raaklijn in F.

Zij FD $= \frac{1}{3}$ AG dan is

$$\frac{\text{O parall. AF}}{\text{segm. AFD}} = \frac{64}{37}.$$

Andere constructie der raaklijn:

Zij $\quad AG : FD = FD : AL = AL : LE$

en $\quad AK = 2AE$

dan is $\quad$ KF raaklijn in F.

Het juiste inzicht in den vorm der kromme is bij H. eerst later opgekomen. Hierover schrijft hij (24 Jan. 1658, n°. 453) aan HUDDE (door en met wien de correspondentie steeds in het Hollandsch werd gevoerd).

„De constructie van de tangenten uyt een punt buyten de peripherie, om dat ick sie dat UE. daer op noch insisteert, beloof ick hier naer by gelegenheydt te sullen soecken en UE. bekent te maecken of ick die gevonden hebbe of niet. Het geene my doet gelooven dat ick daer wel sal toe geraecken is dat ick meermaels vele constructien uyt de vergelykingh van twee aequatien hebbe gemaeckt en daarenboven, dat ick nu gevonden hebbe dat de eerste kromme als mede die van de heer SLUDE (de parel) niet anders en is als een parabola cubica, hetwelck my wonder geeft ons soo lang onbekent is gebleven."

Zij wordt nu ook goed geteekend met het buigpunt en den oneindigen tak aan beide zijden (zie fig. 7). Door verschuiving der X-as gaat vergelijking I in die der parel van SLUSIUS over. Doch transformatie van coördinaten was destijds nog vrijwel onbekend; althans niet in gebruik.

III. $\quad x + y = \sqrt[4]{ax^3}.$

CHR. H. aan FR. VAN SCH. 1657, n°. 431 (fig. 14).

De raaklijn wordt aldus geconstrueerd. Zij F een willekeurig punt der kromme met de ordinaat FD. Zij HA (in het verlengde der as) en de ordinaat HK $= \frac{1}{3}$ AD, dan is KF de gezochte raaklijn.

Het oppervlak AFGf is gelijk aan een veertiende deel van het vierkant op de as AG $= a$. Het zwaartepunt E verdeelt AG zoodanig dat GE staat tot AE als 19 : 14.

Verder wordt over deze kromme niet gehandeld; blijkens de figuur, die door H. symmetrisch is geteekend bleef de ware vorm onbekend. Dat H. moeite had met de meetkundige beteekenis van het negatieve teeken, zal ook later blijken.

II. $y^6 - 3axy^4 - 2a^2xy^3 + 3a^2x^2y^2 - 6a^3x^2y + a^4x^2 - a^3x^3 = 0$

Deze vergelijking nemen wij het laatst, omdat zij de meeste moeite veroorzaakte.

In bovengenoemden brief (n°. 431) van H. aan v. SCH. verklaart hij dat de berekening te ingewikkeld wordt en de moeite niet zal loonen.

Doch HUDDE zag tegen de moeite niet op; in een brief aan FR. v. S. (n°. 436) deelt hij de volledige oplossing mede.

Hij herleidt de vergelijking der kromme tot de gedaante

$$y = \sqrt[3]{a^2x} - \sqrt[2]{ax}.$$

Zij is dus te beschouwen als het verschil van een cubische en van een gewone parabool.

Hij schrijft hier omtrent het volgende:

„dat nu weynich moeijte heeft te vinden, bekent gestelt sijnde, gelyck aen de Heeren bekendt was, de Quadratura van de parabolaas; gelyck ook het Centrum gravitatis van dezelve op de nagel van mijn duym kan gerekent worden.”

Aan het slot dezer missive geeft hij nog de volgende behartigenswaardige les:

„Maar nu versoeck ick, dat se my nooit diegelycke problemata weer komen voor te stellen, dewijl ick de tyd veel te kostlijck acht, als dat ick se in soodanige nutteloose questien zouw besteden; en mogen nemen sodanige Problemata *ubi inventio praecipua est*, *et calculus non difficilis*, *sed etiam utilis humano generi*, en dat ze alle andre standvastiglyck van der hand afwijzen, en ons also in plaats van vruchteloose questien, die niet een olykoeck waert zijn, mogen aan den dach brengen en solveren soodanigen daer het gemeen aen gelegen is, dewijl 'er van dien aart noch genoech te vinden zijn, maer dese afgedaen synde, dan zal ik 't niet qualik nemen dat se tot andere, die alleen in speculatie bestaen, overgaen. Immer ik ben geresolveert dit, zoot' in mijn macht is, op het naukeurigste te practiseren.”

6. SL. aan CHR. H. 1658, n°. 450.

Onderzoek der kromme, voorgesteld door de vergelijking:

$$a^2x^2 = ay^3 - y^4.$$

CHR. H. aan SL., n°. 451 en n°. 472 (fig. 15).

Wentelt de kromme ACB om haar as AB, dan staat de inhoud van het omwentelingslichaam tot den inhoud van den cylinder, ontstaande door de wenteling van rechthoek AN om AB als 64 : 135.

Voor het hoogste punt C is $AD = {}^3/_4\,AB$ en $DC = AB\sqrt{\frac{27}{256}}$.

Neemt men $AE = {}^1/_2\,AB$ dan is $EF = {}^1/_4\,AB = {}^1/_2\,AE$ (en F het buigpunt). De lijn AF raakt de kromme in F en snijdt ON in G.

Het trapezium AGNB is grooter dan het oppervlak ACBA. Dit trapezium zal tot rechthoek OB in kleiner reden zijn dan een cirkel tot het omgeschreven vierkant. Derhalve zal de verhouding van het oppervlak ACBA tot dien rechthoek nog kleiner zijn. Omdat AE het dubbel is van EF zal GO het dubbel zijn van AO, zoodat het vierkant AH gelijk is aan △ AGO, en rechthoek BH = trap. AGNB. Derhalve moet aangetoond worden, dat de verhouding van rechthoek HB tot rechthoek OB, dat is der lijnen HN en ON kleiner is dan de verhouding van het oppervlak van een cirkel tot dat van zijn omgeschreven vierkant. Ik heb gezegd, dat DC of OH staat tot AB of ON als $\sqrt{\frac{27}{256}}$ tot 1. Derhalve heeft OH : ON een verhouding grooter dan $\frac{5}{16}$ tot 1 dat is 5 : 16 en derhalve HN tot ON minder dan 11 : 16. Nu is de verhouding van een cirkel tot zijn omgeschreven vierkant grooter dan 11 : 15 of bijna 11 : 14, derhalve enz.

7. CHR. H. aan SL., 1657, n°. 439 en aan GR. A ST. VINCENTIO, 1659, n°. 678.

Over het oppervlak der omwentelingsparaboloïde (fig. 16).

De parabool ABC en de raaklijn AE wentelen om de as DE. Construeer een lijn F zoodanig, dat F staat tot AC als AC tot omtrek △ AEC. Dan staat het ronde oppervlak van kegel

AEC tot dat der paraboloïde als driemaal de zijde AE tot tweemaal die zijde vermeerderd met F.

Is AE meetbaar ten opzichte van AC, dan is het oppervlak der paraboloïde meetbaar ten opzichte van haar grondvlak.

Zoo is voor AE = AC:

$$\frac{\text{opp. paraboloïde}}{\text{opp. cirkel ADC}} = \frac{14}{9}$$

voor AE = $^3/_2$ AC is die verhouding $\frac{13}{6}$

$\left(\text{voor AE} = n\,.\,\text{AD wordt de verhouding} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^3 - 1}{n^2 - 1}\right)$.

8. Chr. H. aan Sl., 1658 en aan Gr. a St. Vinc. 1659, n°. 678.

Over het oppervlak der omwentelingsellipsoïde.

a. De ellips wentelt om haar groote as (fig. 17).

AB is de groote, CD de kleine as; E en F zijn de brandpunten. Beschrijf uit den top der kleine as C den cirkelboog EGF, dan bestaat de evenredigheid: het halve omwentelingsvlak staat tot het cirkelvlak, waarvan CD de middellijn is, als de cirkelsector CEGF vermeerderd met △ CEF tot △ CEF.

Is het vierkant der groote as dubbel zoo groot als het vierkant der kleine as, dan is de verhouding gelijk die van een cirkel, vermeerderd met het ingeschreven vierkant tot dat vierkant.

Zij BK // FC en beschrijf uit K als middelpunt den cirkelboog ANB. Zij verder de lijn L middenevenredig tusschen de halve kleine as CO en een lijn gelijk aan de som van CD en cirkelboog ANB. Dan is het oppervlak der ellipsoïde gelijk aan het oppervlak van een cirkel, waarvan L de straal is.

b. De ellips wentelt om haar kleine as (fig. 18).

Zij H het midden tusschen E en O. Beschrijf CHD als boog eener parabool waarvan H is de top, HB de as. Dan ontstaat de volgende evenredigheid: Het omwentelingsoppervlak staat tot het oppervlak van den cirkel, waarvan AB de middellijn is, als de lengte van den parabolischen boog CHD tot een vierde van de middellijn CD.

Zij de lijn G middenevenredig tusschen de groote as AB en de lengte van den parabolischen boog AHB, dan is het opper-

vlak der ellipsoïde gelijk aan het oppervlak van den cirkel, waarvan G de straal is.

9. CHR. H. aan FR. SCHOOTEN 1659, n°. 582 (fig. 19).

Zij ABC de boog van een parabool met B tot top, AD de raaklijn in A. Beschrijf een boog MGN van een (gelijkz.) hyperbool, waarvan E is het middelpunt, EG = AC de halve as, en EF = 2AD. Neem EL gelijk aan de lengte van den parabolischen boog ABC en beschrijf den rechthoek MHKN dan is:

Oppervl. hyperb. segment MGN = rechthoek MHKN,

zoodat hiermede de quadratuur der hyperbool is teruggebracht tot de rectificatie der parabool.

10. SL. aan CHR. H. 1659, n°. 628.

Vraagstuk van TORRICELLI (fig. 20).

Van een halven rechten cirkelvormigen cylinder zij het zwaartepunt van het bovenvlak gelegen in C. Het lichaam wordt door een vlak gebracht door A en FE verdeeld in twee deelen; de inhouden dezer deelen staan tot elkander als AC : BC.

Dezelfde eigenschap geldt voor de deelen van het cylindervlak, als C in het zwaartepunt van den halven cirkelomtrek ligt (SLUSIUS).

11. SL. aan CHR. H. 1659, n°. 646 (fig. 21).

Op de lijn AC als middellijn is een halve cirkel getrokken. Op die middellijn een punt E zoodanig te bepalen, dat, wanneer EF onder een gegeven hoek met de middellijn wordt getrokken:

$$\frac{AE \cdot EC}{\overline{EF}^2} = \frac{p}{q}$$

waarbij p en q gegeven lijnen zijn.

Constructie (van SL.).

Zij XO $= q$, NO $= p$, M het midden van XN. Trek MD, NG onder den gegeven hoek en ODG loodrecht er op.

Zij B het middelpunt van den halven cirkel, maak dan:

BS = DG onder den gegeven hoek met AC.

SI $\perp$ BS en gelijk MD,

$$\overline{SK}^2 = \overline{CB}^2 + \overline{BS}^2$$

Trek uit I als middelpunt met IK tot straal een cirkelboog, die den gegeven halven cirkel snijdt in F, dan is FE // KB de gevraagde lijn.

12. J. Buot (ingenieur du Roi) aan Chr. H. 1661, n°. 849 (fig. 22).

Gegeven zijn een driehoek BDE en twee rechte lijnen p en q. Op de zijde DB een punt A zoodanig te construeeren dat:

$$\frac{BA \,.\, BD}{ED \,.\, AE} = \frac{p}{q}.$$

Constructie.

Maak $$\frac{DB}{DZ} = \frac{p}{q} \text{ en } \frac{BC}{CE} = \frac{DE}{DZ},$$

Zij O het midden van BE en OP $\perp$ BE.

Bepaal op het verlengde van EB het punt V zoodanig, dat

$$CV : CE = CB : CO.$$

Beschrijf op VC een halven cirkel, die BD snijdt in A, dan is dit het gezochte punt.

13. In het tweede deel der briefwisseling wordt herhaaldelijk en uitvoerig gehandeld over de *cissoïde.* Daaraan wordt deelgenomen door Chr. H., Slusius en J. Wallis. De door hen daarbij behandelde of gevonden eigenschappen zullen hier worden samengevat.

De cissoïde van Diocles is uit de oudheid tot ons gekomen als de kromme, welke kan dienen om het vraagstuk der beide middenevenredigen op te lossen. Ze ontstaat als volgt (fig. 23):

Zij OBA een halve cirkel op OA als middellijn, C het middelpunt, CB $\perp$ OA. Plaatst men nu twee loodlijnen DE en D′E′ op OA op gelijken afstand ter wederzijde van CB, en trekt OD′ die DE snijdt in P, dan ontstaan de middenevenredigen aldus:

$$OE' : E'D' = E'D' : E'A = OE : EP.$$

Maar E′A = OE en E′D′ = ED zijnde, zijn derhalve OE en ED de beide middenevenredigen tusschen EP als kleinste en EA als grootste lijn.

Men kan ook OD trekken, tot zij het verlengde van E'D' snijdt in P', dan ontstaat de betrekking:

$$P'E' : OE' = DE : OE = AE : DE$$

of door omzetting en gelijkstelling:

$$AE' : E'D' = E'D' : OE' = OE' : E'P'$$

zoodat nu OE' en E'D' de beide middenevenredigen zijn tusschen E'P' als grootste en AE' als kleinste lijn.

De meetkundige plaats van P en P' vormt de kromme, die wegens haar eigenaardigen vorm *cissoïde* of klimoptrek werd genoemd. Zij ontstaat ook door op een uit O getrokken vector, die den cirkel snijdt in D', en BC in S, SP = SD' af te zetten. Daaruit blijkt, dat zij gaat door O en B.

Om langs dezen weg tusschen twee gegeven lijnen de beide middenevenredigen te construeeren, ga men te werk als volgt: Men neemt AN en NM (fig. 24) gelijk of evenredig aan de gegeven lijnen en trekt AM, die de kromme snijdt in P, dan zijn, volgens het voorgaande ED en OE de beide middenevenredigen tusschen AE en EP; verkleint men deze lijnen in reden van PE : MN, dan heeft men de beide middenevenredigen tusschen AN en NM, die zoo noodig nogmaals in de oorspronkelijke reden kunnen verkleind worden.

De verdubbeling van den cubus ontstaat op gelijke wijze door NM = 2NA te nemen, dan zal de kleinste der beide middenevenredigen de gezochte ribbe van den dubbelen cubus zijn. Is b.v. MN = 2NA en OC de ribbe van den gegeven cubus, dan zal CR (R snijpunt von CB en OP) de ribbe zijn van den cubus van dubbelen inhoud, zoodat:

$$RC = BC\sqrt[3]{2}.$$

Het was aan de correspondenten bekend, dat de vergelijking der cissoïde op cartesische coördinaten (andere waren destijds nog niet in gebruik) is van den derden graad, waaruit Huygens met recht afleidde, dat het vraagstuk der middenevenredigen of van de verdubbeling van den cubus niet kan geconstrueerd worden door snijding van cirkels onderling, of van rechte lijnen onderling en met cirkels, of van een kegelsnede met rechte lijnen. Wel had Descartes aangetoond, dat het vraagstuk, even als dat van de *trisectio anguli* door de snijding eener kegelsnede met een cirkel kon opgelost worden, doch dan

moesten twee krommen geconstrueerd worden, terwijl door de cissoïde en de conchoïde één kromme voor elk der vraagstukken voldoende is.

Voor het opsporen en bewijzen der volgende eigenschappen maakten Huygens en Wallis gebruik van de exhaustie-methode van Archimedes, waardoor de bewerking zeer omslachtig werd. Thans kan dit veel eenvoudiger geschieden door toepassing der differentiaal-rekening, die denzelfden grondslag heeft, maar veel spoediger tot het doel voert. Daarom zal ik mij bepalen tot het noemen der eigenschappen en het bewijs den aandachtigen lezer overlaten.

Gemakkelijk is in te zien dat de lijn $AK \perp OA$ asymptoot is der kromme.

Het vlak tusschen de kromme, de basis en haar asymptoot is eindig en gelijk aan drie maal het vlak van den halven cirkel OBA.

De inhoud van het lichaam, dat ontstaat door wenteling der kromme om haar asymptoot is gelijk aan het oppervlak van dien halven cirkel vermenigvuldigd met het dubbel van zijn omtrek.

Het zwaartepunt van het vlak tusschen de kromme en haar asymptoot ligt van de asymptoot op een afstand gelijk een zesde van de middellijn OA.

Snijdt de vector OP den cirkel in L en de asymptoot in K dan is:

$$\text{oppervlak OQBPKA} = 3 \text{ cirkelsegment LDA} + \triangle \text{ OLA}$$

en

$$\text{vlak OQBPA} = 3 \text{ cirkelsegment LDA.}$$

Zij OCBT het vierkant op den straal OC, dan is:

$$\text{vlak OQBT} = 3 \text{ vlak OLBT.}$$

Reeds in de nu behandelde periode was het *Problema* van Alhazen bij Huygens en zijn correspondenten in onderzoek. Aangezien echter de voornaamste oplossingen eerst later werden gevonden en bekend gemaakt, zal de beschouwing van dit vraagstuk worden uitgesteld tot de behandeling van de meetkundige vraagstukken, die in verband staan met de lichttheorie van Huygens, ontwikkeld in zijn „Traité de la Lumière."

ENKELE VRAAGSTUKKEN UIT DE WAARSCHIJNLIJKHEIDS-REKENING

DOOR

J. C. MULLER,

(Zeist).

I. De behandelde vraagstukken zijn alle uit BERTRAND, *Calcul des probabilités*, sommige met eenige uitbreiding.

N°. XXIII (uitgave van '89): Quelle est la probabilité pour que, sur cent essais successifs avec un seul dé on obtienne une fois au moins une succèssion de cinq as sans interruption?

Wij noemen de gevraagde kans p_{100} en in het algemeen de kans om met een dobbelsteen in n achtereenvolgende worpen ten minste eenmaal vijf keeren achtereen het punt één te werpen p_n. De kans nu om in 100 worpen de gestelde gebeurtenis te zien voorvallen, is de kans dat dit in 99 worpen gebeurt, vermeerderd met de kans, in de eerste 94 worpen de gebeurtenis niet te zien gebeuren, in den 95sten worp een punt verschillend van één, en daarna 5 malen achtereen het punt één te zien vallen.

Bijgevolg $$p_{100}=p_{99}+(1-p_{94})\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6^5},$$

evenzoo $$p_{99}=p_{98}+(1-p_{93})\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6^5},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{11}=p_{10}+(1-p_5)\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6^5},$$

$$p_{10}=p_9+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6^5},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_6=p_5+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6^5},$$

$$p_5=\frac{1}{6^5}.$$

Door optelling $$p_{100}=\frac{481}{6^6}-\frac{5}{6^6}(p_{94}+p_{93}+\ldots\ldots+p_5).$$

Op dezelfde wijze $p_{94} = \frac{451}{6^6} - \frac{5}{6^6} \sum_{n=5}^{n=88} p_n$,

$$p_{93} = \frac{446}{6^6} - \frac{5}{6^6} \sum_{n=5}^{n=87} p_n,$$

. . . .

$$p_{11} = \frac{36}{6^6} - \frac{5}{6^6} p_5,$$

$$p_{10} = \frac{31}{6^6},$$

. . . .

$$p_5 = \frac{6}{6^6}$$

Door optelling $\sum_{n=5}^{n=94} p_n = \left(\frac{451}{6^6} + \ldots . + \frac{6}{6^6}\right) -$

$$\frac{5}{6^6}(p_{88} + 2p_{87} + 3p_{86} + \ldots . + 84p_5).$$

Op dezelfde wijze verder ontwikkelende vindt men

$$p_{100} = \frac{481}{6^6} - \frac{5}{6^6}\left(\frac{451}{6^6} + \frac{446}{6^6} \ldots . + \frac{6}{6^6}\right) + \frac{25}{6^{12}}\left(\frac{421}{6^6} + \frac{2 \times 416}{6^6} + \right.$$

$$\left. + \frac{3 \times 411}{6^6} + \ldots + \frac{84 \times 6}{6^6}\right) - \frac{125}{6^{18}}(p_{82} + 3p_{81} + 6p_{80} + \ldots . + 3081p_5).$$

Nu is $p_{82} < \frac{391}{6^6}$ en daarom

$$\frac{125}{6^{18}}(p_{82} + 3p_{81} + 6p_{80} + \ldots . + 3081p_5) < \frac{125}{6^{18}} \times$$

$$\times \frac{391}{6^6}(1 + 3 + 6 + \ldots . + 3081) < \frac{1}{10^9},$$

zoodat de vierde term kleiner is dan 1 duizendmillioenste. De derde term blijkt kleiner dan 1 millioenste, zoodat de beide eerste termen p_{100} reeds tot op 1 millioenste nauwkeurig geven.

Men vindt

$$p_{100} = 0.010262 \ldots .$$

II. N°. XXV. Pierre entreprend d'obtenir le point 7 avec deux dés avant qu'aucun autre ne se soit produit deux fois. Quelle est la probabilité de gagner?

Het antwoord is volgens BERTRAND $\frac{7303}{13860} = 0.5268$.

In hoogstens 11 worpen is het spel beslist. Men kan van 2 tot 12 werpen, zijnde 11 gevallen. In den 11^den^ worp moet men, als dit niet reeds vroeger geschied is, òf 7 werpen, òf een aantal oogen, dat men reeds in een der tien voorafgaande worpen verkregen heeft. De kans om in den eersten worp te winnen is $\frac{1}{6}$, n.l. in 6 van de 36 gevallen. De kans, dat deze worp het spel nog niet ten gunste van Pierre beslist, is dus $\frac{5}{6}$, want ten nadeele van Pierre kan deze worp nog niet beslissen. Bij den n^{den} worp echter, aannemende dat in de eerste $n - 1$ worpen nòch zeven oogen geworpen werden, nòch het aantal oogen van één der worpen zich herhaalde, is er drieërlei mogelijkheid:

a. De worp geeft 7 oogen en beslist het spel ten gunste van Pierre;

b. de worp geeft een aantal oogen, even hoog als reeds in één der vroegere worpen viel, en beslist het spel dus ten nadeele van Pierre;

c. de worp geeft nòch 7 oogen, nòch een aantal, dat reeds vroeger voorkwam.

De kans, dat het onder *c* genoemde geval zich voordoet, O_n noemende, is Pierre's kans om door den $(n + 1)^{sten}$ worp te winnen $\frac{1}{6} \times O_n$.

De totale winstkans van Pierre wordt zoo:

$$\frac{1}{6}(1 + O_1 + O_2 + \ldots + O_{10}).$$

Deze getallen $O_1, O_2 \ldots, O_n$ kunnen nu worden bepaald volgens de methode van de Moivre als de coëfficent en van $x^1, x^2, x^3 \ldots x^n$ in de ontwikkeling van

$$(x+1)^2(2x+1)^2(3x+1)^2(4x+1)^2(5x+1)^2,$$

vermenigvuldigd respectievelijk met $\frac{1!}{36}, \frac{2!}{36^2}, \frac{3!}{36^3}$ enz. De ontwikkeling wordt:

$$1 + 30x + 395x^2 + 3000x^3 + 14523x^4 + 46710x^5 + 100805x^6 + \\ + 143700x^7 + 129076x^8 + 65760x^9 + 14400x^{10},$$

en de gevraagde winstkans dus

$$\frac{1}{6}\left(1 + \frac{30}{36} + \frac{395}{36^2}.2! + \frac{3000}{36^3}.3! + \frac{14523}{36^4}.4! + \frac{46710}{36^5}.5! + \right.$$

$$\left. + \frac{100805}{36^6}.6! + \frac{143700}{36^7}.7! + \frac{129076}{36^8}.8! + \frac{65760}{36^9}.9! + \frac{14400}{36^{10}}.10!\right).$$

Benaderd vond ik 0.5289 in zonderlinge overeenstemming met BERTRAND's opgave $\frac{7303}{13860} = 0.5269$, hoewel het duidelijk is dat beide antwoorden niet overeenstemmen en dus BERTRAND's antwoord onjuist is.

III. *La ruine des joueurs*: Op blz. 18 vindt men een oplossing van ANDRÉ van het volgende vraagstuk:

Pierre et Paul sont soumis à un scrutin de ballottage; l'urne contient m bulletins favorables à Pierre, n favorables à Paul; m est plus grand que n, Pierre sera élu. Quelle est la probabilité pour que, pendant le dépouillement du scrutin, les bulletins sortent dans un ordre tel que Pierre ne cesse pas un seul instant d'avoir l'avantage.

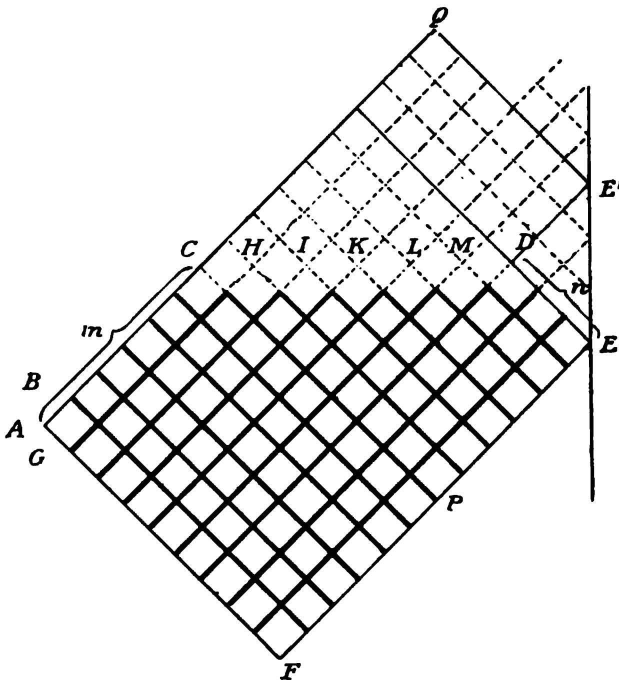
Met behulp van de gevonden kans $\frac{m-n}{m+n}$, wordt op blz. 123 opgelost het volgende vraagstuk:

Pierre joue à un jeu dans lequil il a à chaque partie la probabilité p pour gagner et pour perdre la probabilité q. L'enjeu est 1 frc. pour chacun des deux adversaires. Quelle est la probabilité pour que Pierre, qui possède m frcs, soit ruiné précisément après avoir fait u parties, de telle sorte que la $u^{\text{ième}}$ partie lui enlève son dernier franc? Het bezit van Paul is niet gelimiteerd.

De gezochte kans is

$$\frac{m}{u} p^{\frac{u-m}{2}} q^{\frac{u+m}{2}} \frac{u!}{\left(\frac{u-m}{2}\right)! \left(\frac{u+m}{2}\right)!}.$$

IV. Voor het vervolg onderstellen wij $p = q = \frac{1}{2}$ voor het gemak, ofschoon het geen bezwaar heeft ze alleen aan de vergelijking $p + q = 1$ te laton voldoen. Stellen wij het voorgaande vraagstuk algemeener en laat nu de kans gevraagd zijn, dat, als Pierre's bezit m, dat van Paul ongelimiteerd is, Pierre na u spelen n bezit. Hier zal $\frac{u - m + n}{2}$ een geheel getal moeten zijn, $u - m + n$ dus even; ware $u - m + n$ oneven, de gevraagde kans zou nul zijn. Ter verduidelijking maak ik hier het gebruik van een grafische voorstelling.



Een lijn als AB schuin rechts naar boven stelt voor Pierre een verliespartij, een lijn als AG schuin rechts naar beneden een winstpartij voor. Daarbij is AC $= m$, DE $= n$, en de reeksen van partijen, die wij te beschouwen hebben, eindigen alle in E, terwijl AF + FE $= u$ is. Komt men langs een der wegen van A naar E op de lijn CD terecht, dan is Pierre's verlies aldaar m en Pierre dus geruineerd. De rechte lijn, gevormd door de punten C, H, I, K, L, M, D mag dus nimmer bereikt worden bij het afleggen van den weg van A naar E en het aantal

der wegen van A naar E in dat deel der figuur, waar de lijnen niet gestippeld zijn, is dus te bepalen.

Pierre verliest $m - n$ (waarbij $m - n$ ook negatief kan zijn.) Hij wint dus $\frac{u - m + n}{2}$ en verliest $\frac{u + m - n}{2}$ malen, zoodat $u - m + n$ even moet zijn. Wanneer men de voorwaarde dat de wegen van A naar E niet door de punten C, H, ... D mogen gaan, buiten rekening laat, is het aantal mogelijke wegen $C_u^{\frac{u-m+n}{2}}$.

Rest ons dus het aantal wegen, dat door genoemde punten gaat, te bepalen en in mindering te brengen. Dit aantal is $C_u^{\frac{u-m-n}{2}}$, want de beschouwing der figuur doet terstond zien, dat de uitgesloten wegen een voor een overeenstemmen met de wegen om van A naar E′ te geraken, d. w. z. met het aantal mogelijke gevallen, waarin bij u spelen Pierre $m + n$ verliest, onderstellende dat zoowel Pierre's als Paul's bezit niet gelimiteerd is.

Om dit in te zien heeft men slechts het deel der figuur CDEP om te slaan tot CDE′Q.

Voor de gezochte kans heeft men dus:

$$\frac{1}{2^u}\left(C_u^{\frac{u-m+n}{2}} - C_u^{\frac{u-m-n}{2}}\right).$$

V. De gevonden formule gaat niet door voor $n = 0$.

Wat is daarvan de oorzaak?

Het vraagstuk is door het stellen van $n = 0$ van aard veranderd. Voor $n \gtrless 0$ mag men vóór het u^{de} spel wel op n komen, maar niet op 0, n en 0 worden in de redeneering dus verschillend ondersteld.

Maakt men nu $n = 0$ dan vervalt deze voorwaarde en daarmee de redeneering.

Intusschen is dit geval toch zeer eenvoudig uit de algemeene formule af te leiden. De formule gaat n.l. door voor $n = 1$. Zal Pierre's bezit aan het eind van het u^{de} spel $= 0$ zijn, dan moet het aan het eind van het $(u - 1)^{ste}$ spel $= 1$ geweest zijn. De kans om bij het eind van het $(u - 1)^{ste}$ spel 1 te bezitten is

$$\frac{1}{2^{u-1}}\left(C_{u-1}^{\frac{u-1-m+1}{2}} - C_{u-1}^{\frac{u-1-m-1}{2}}\right) = \frac{1}{2^{u-1}}\left(C_{u-1}^{\frac{u-m}{2}} - C_{u-1}^{\frac{u-m}{2}-1}\right)$$

De kans om aan het eind van het u^{de} spel geruineerd te zijn is de helft van deze kans dus

$$\frac{1}{2^u}\left(C_{u-1}^{\frac{u-m}{2}} - C_{u-1}^{\frac{u-m}{2}-1}\right).$$

Volgers een bekende eigenschap der binomiaal coëff. is de uitdrukking tusschen haakjes $= C_u^{\frac{u-m}{2}} - 2C_{u-1}^{\frac{u-m}{2}-1}$ en verder $= \frac{m}{u} C_u^{\frac{u-m}{2}}$, waardoor de uitkomst uit III teruggevonden en tevens voor het bewijs van ANDRÉ een ander geleverd is.

VI. Uitgaande van V kan de uitkomst van IV in een anderen vorm gevonden worden, waaruit een merkwaardige betrekking tusschen de binomiaalcoëfficienten volgt.

De gevallen, die wij in IV aftrokken, ten getale van $C_u^{\frac{u-m-n}{2}}$, zijn samengesteld uit de volgende:

1°. de mogelijke gevallen om van A naar C te komen en daarna van C naar E, 2°. idem om van A naar H te komen zonder C aan te doen en daarna van H naar E, 3°. idem om van A naar I te komem zonder C en H aan te doen en daarna van I naar E enz. en ten slotte om van A naar D te komen zonder C, H, I enz. aan te doen en daarna van D naar E. Deze ontleding der gevallen voert aanstonds tot de identiteit

$$C_m^0\, C_{u-m}^{\frac{u-m-n}{2}} + \frac{m}{m+2}\, C_{m+1}^1\, C_{u-m-2}^{\frac{u-m-n}{2}-2} + \frac{m}{m+4}\, C_{m+4}^2\, C_{u-m-4}^{\frac{u-m-n}{2}-2} + \dots$$

$$\dots + \frac{m}{u-n}\, C_{u-n}^{\frac{u-m-n}{2}}\, C_n^0 = C_u^{\frac{u-m-n}{2}}.$$

Stelt men $\frac{u-m-n}{2} = z$ dan komt er

$$C_{u-n-2z}^0\, C_{2z+n}^z + \frac{u-n-2z}{u-n-2(z-1)}\, C_{u-n-2(z-1)}^1\, C_{n+2(z-1)}^{z-1} + \dots$$

$$\dots + \frac{u-n-2z}{u-n}\, C_{u-n}^z\, C_n^0 = C_u^z,$$

Stelt men $n = 0$, dan komt er:

$$C_{u-2z}^0 . C_{2z}^z + \frac{u-2z}{u-2(z-1)} \cdot C_{u-2(z-1)}^1 . C_{2(z-1)}^{z-1} + \dots + \frac{u-2z}{u} \cdot C_u^z C_0^0 = C_u^z$$

of $C_0^0 = 1$ $C_{u-2z}^0 = 1$ nemende en door $u - 2z$ deelende

$$\frac{1}{u-2z} C_{2z}^z + \frac{1}{u-2(z-1)} C_{u-2(z-1)}^1 C_{2(z-1)}^{z-1} + \ldots$$

$$+ \frac{1}{u-2} C_{u-2}^{z-1} C_2^1 + \frac{1}{u} C_u^z = \frac{1}{u-2z} C_u^z,$$

waarin u en z aan geen andere voorwaarden behoeven te voldoen dan dat zij geheele getallen voorstellen.

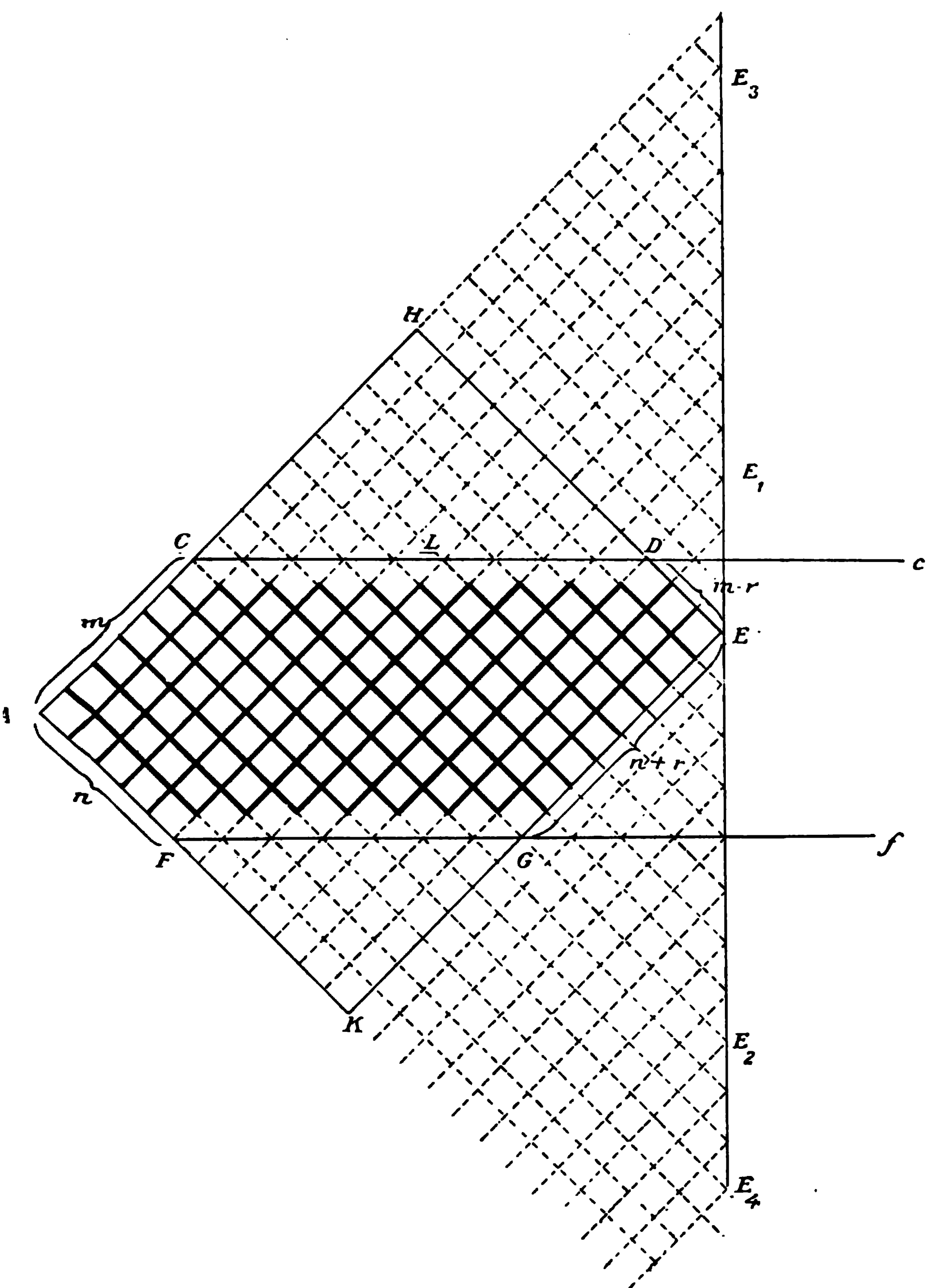
VII. Ten slotte behandelt BERTRAND het volgende vraagstuk, waarvan ROUCHÉ de oplossing gegeven heeft.

Pierre en Paul spelen tegen elkander met gelijke winstkansen. Zij bezitten elk n francs voor het spel. Bij elk spel is ieders inzet 1 franc en het spel eindigt niet voor één der spelers geruineerd is. Wat is de waarschijnlijkheid, dat een van beiden juist na het u^{de} spel geruineerd is?

Het is het algemeenste geval, dat BERTRAND behandelt. Het geval, dat Pierre's winstkans p, die van Paul q is, waarbij $p + q = 1$ laten wij buiten beschouwing: het levert geen nieuwe moeilijkheid op. In zoover echter breiden wij het vraagstuk uit, dat we Pierre m, Paul n frcs. toekennen en vragen naar de kans, dat na het u^{de} spel Pierre $m - r$, Paul $n + r$ frcs. bezit, waar r geheel is en tusschen $-n$ en $+m$ ligt; deze beide grenswaarden sluiten wij voorloopig uit.

Het aantal der wegen van A naar E in het zwart geteekende deel der figuur moet dan bepaald worden. Noemen wij de lijnen CD en FG nu resp. c en f en stellen wij door ϕ_{pq} voor het aantal der wegen, die van A naar E gaan en òf $c \ldots . p$-maal of meermalen en $f \ldots . q$-maal of meermalen aandoen òf $f \ldots . p$-maal of meermalen en $c \ldots . q$-maal of meermalen, waarin dan het aantal malen dat c of f *achtereenvolgens* overschreden of bereikt wordt, slechts voor één geteld wordt, zoodat b.v. een weg, die van A naar E gaat, zich voortdurend om CD slingerend en ook FG mogende passeeren tot de groep ϕ_{01} gerekend moet worden, waartoe echter geen der naar E voerende gebroken lijnen behoort, waarvan wij het aantal zoeken. Dan stelt ϕ_{00} het geheele aantal wegen van A naar E in de figuur AHEK voor, terwijl het door ons gezochte aantal

$= \phi_{00} - \phi_{10}$, terwijl $\phi_{00} = C_u^{\frac{u-r}{2}}$ is.



E3
H
E1
C
L
D
c
m
m-r
E
A
n
n+r
F
G
f
K
E2
E4

Ter bepaling van ϕ_{01} verdeelen wij deze wegen in twee groepen, waarvan de eerste de wegen omvat, die eerst c aandoen en daarna willekeurig loopen, de tweede de wegen die eerst f aandoen en daarna willekeurig loopen. Beschouwen wij nu een weg uit de eerste groep. Bereikt deze C in L dan is haar geen grens meergeschreven en kunnen wij haar in plaats van naar E naar E_1 doen loopen, waarbij E_1 symmetrisch ligt met E ten opzichte van C.

Laat men nu de voorwaarde weg, dat de gezochte wegen niet eerst f mogen aandoen, dan is haar aantal $C_n^{\frac{n+r}{2}-m}$. Beschouwt men nu de wegen die van A naar E_2 loopen waarbij E_2 symmetrisch ligt met E ten opzichte van f. Haar aantal is $C_n^{\frac{n-r}{2}-n}$. Merkt men nu op, dat een weg, die zoowel c als f aandoet, in beide groepen voorkomt, dan vindt men

$$C_n^{\frac{n+r}{2}-m} + C_n^{\frac{n-r}{2}-n} = \phi_{01} + \phi_{11}.$$

Zet men de redeneering voort met ϕ_{11}, dan heeft men ook dit aantal te splitsen in twee groepen, waarvan de eene groep de wegen omvat, die c aandoen, daarna f overschrijden en zoo E bereiken, en de tweede groep die wegen, welke eerst f aandoen, daarna c en verder volkomen willekeurig E bereiken. Neemt men nu een weg, die eerst c aandoet, laat hij C in L bereiken. Men kan dezen weg nu verder in plaats van naar E naar E_2 doen loopen. Het aantal wegen, dat naar E_2 loopt en CD eerst overschrijdt, is het aantal wegen van A naar E_3 zonder beperkingen. (E_3 is symmetrisch met E_2 ten opzichte van c). Dit aantal is $C_n^{\frac{n-r}{2}-(m+n)}$.

De wegen, die eerst f aandoen, vormen op gelijke wijze een deel van de groep der wegen van A naar E_4, waarbij E_4 symmetrisch ligt met E_1 ten opzichte van f.

Dit aantal is $C_n^{\frac{n+r}{2}-(m+n)}$; bovendien is

$$C_n^{\frac{n+r}{2}-(m+n)} + C_n^{\frac{n-r}{2}-(m+n)} = \phi_{11} + \phi_{12}.$$

Zoo voortredeneerende vindt men

$$C^{\frac{n+r}{2}-p(m+n)} + C_n^{\frac{n-r}{2}-p(m+n)} = \phi_{pp} + \phi_{p,p+1},$$

$$C_u^{\frac{u+r}{2}-\{(p+1)m+pn\}} + C_u^{\frac{u-r}{2}-\{(p+1)n+pm\}} = \phi_{p,\,p+1} + \phi_{p+1,\,p+1}.$$

Vervangt men de notatie $\phi_{p,\,p}$ door ϕ_{2p} en $\phi_{p,\,p+1}$ door ϕ_{2p+1} dan worden de formules

$$\phi_{2p} + \phi_{2p+1} = C_u^{\frac{u-r}{2}-p(m+n)} + C_u^{\frac{u+r}{2}-p(m+n)},$$

$$\phi_{2p+1} + \phi_{2p+2} = C_u^{\frac{u-r}{2}-\{(p+1)m+pn\}} + C_u^{\frac{u+r}{2}-\{(p+1)n+pm\}}.$$

Nu is $\phi_0 - \phi_1$ te bepalen en heeft men in ons geval identiek

$$\phi_0 - \phi_1 = \phi_0 - (\phi_1 + \phi_2) + (\phi_2 + \phi_3) - (\phi_3 + \phi_4) + (\phi_4 + \phi_5) - \text{enz.},$$

omdat er ten slotte een functie ϕ_n zal komen, die met alle volgende $= 0$ is, want het hoogste aantal malen, dat een weg van A naar E de strook tusschen c en f in de figuur geheel kan overslingeren, is gemakkelijk te bepalen

$$\text{en} = E\,\frac{u - 2n - r}{m + n} \text{ of 1 meer,}$$

$$\text{of} = E\,\frac{u - 2m + r}{m + n} \text{ of 1 meer,}$$

waar E aanduidt, dat men het aantal eenheden uit de aangegeven quotienten te nemen heeft. Het is dus hoogstens

$$E\,\frac{u - n + m - r}{m + n} \text{ of } E\,\frac{u - m + n + r}{m + n},$$

of

$$E\,\frac{u - (n - m + r)}{m + n} \text{ of } E\,\frac{u + (n - m + r)}{m + n}$$

Het hangt dus van de omstandigheid af, of $n - m + z$ positief of negatief is, welke grens genomen moet worden. Is deze grens p dan is zeker $\phi_{p+1=0}$ en verder alle volgende ϕ.

De eindformule wordt dus

$$\phi_0 - \phi_1 = C_u^{\frac{u-r}{2}} - \left(C_u^{\frac{u-r}{2}+m} + C_u^{\frac{u-r}{2}-n}\right) + \left(C_u^{\frac{u-r}{2}-(m+n)} + C_u^{\frac{u-r}{2}+(m+n)}\right) -$$

$$- \left(C_u^{\frac{u-r}{2}+(2m+n)} + C_u^{\frac{u-r}{2}-(2n+m)}\right) + \text{enz.},$$

afbrekende, waar de orde-getallen of < 0 of $> u$ worden.

Men neme hierbij in aanmerking dat $C_u^k = C_u^{u-k}$.

In anderen vorm:

$$\phi_0 - \phi_1 = C_u^{\frac{u-r}{2}} + \sum_{p=1}\left(C_u^{\frac{u-r}{2}+p(m+n)} + C_u^{\frac{u-r}{2}-p(m+n)}\right) -$$

$$-\sum_{p=0}\left(C_u^{\frac{u-r}{2}+\{(p+1)m+pn\}} + C_u^{\frac{u-r}{2}+\{(p+1)n+pm\}}\right),$$

waarin de sommaties als boven te eindigen zijn.

De gezochte kans is $\frac{1}{2^u}$ maal zoo groot.

VIII. Geldt de formule ook voor $r = m$ en $- n$? Om dezelfde reden als in V luidt het antwoord: neen. Even gemakkelijk als daar leidt men echter dit geval uit het algemeene af. De formule geldt n.l. voor $r = m - 1$ en $u - 1$ en de gezochte kans is de helft van deze.

Men vindt voor de kans van Pierre om door het u^{de} spel geruïneerd te worden

$$\frac{1}{2^u}\left\{C_{u-1}^{\frac{u-m}{2}} + \sum_{p=1}\left(C_{u-1}^{\frac{u-m}{2}+p(m-n)} + C_{u-1}^{\frac{u-m}{2}-p(m+n)}\right) -\right.$$

$$\left.-\sum_{p=0}\left(C_{u-1}^{\frac{u-m}{2}+\{(p+1)m+pn\}} + C_{u-1}^{\frac{u-m}{2}-\{(p+1)n+pm\}}\right)\right\}$$

Stelt men hierin $m = n$ dan heeft men het door Bertrand behandelde geval.

Men vindt

$$\frac{1}{2^u}\left\{C_{u-1}^{\frac{u-n}{2}} + \sum_{p=1}\left(C_{u-1}^{\frac{u-n}{2}+2pn} + C_{u-1}^{\frac{u-n}{2}-2pn}\right) -\right.$$

$$\left.-\sum_{p=0}\left(C_{u-1}^{\frac{u-n}{2}+(2p+1)n} + C_{u-1}^{\frac{u-n}{u}-(2p+1)n}\right)\right\}$$

Voor $n = 1$ heeft men hieruit ter verificatie de bekende betrekking

$$C_{2m}^1 + C_{2m}^3 + \dots + C_{2m}^{2m-1} =$$

$$C_{2m}^0 + C_{2m}^2 + \dots + C_{2m}^{2m}.$$

Vergelijkt men de door ROUCHÉ gevonden uitkomst

$$\frac{-1}{2^u}\begin{vmatrix} A_1 & 1 & 0\ldots.0 \\ A_2 & A_1 & 1\ldots.0 \\ A_3 & A_2 & A_1\ldots.0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{\frac{u-n}{2}} & A_{\frac{u-n}{2}-1} & A_{\frac{u-n}{2}-2}\ldots A_1 \end{vmatrix}$$

waarin A_i de coëfficiënt is van x^{n-2i} in

$$V_n(x) = x^n - n\,x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2}x^{n-4} + \ldots. +$$

$$(-1)^r \frac{n(n-r-1)\ldots(n-2r+1)}{r!}x^{n-2r},$$

(r is het grootste geheele getal begrepen in $\frac{1}{2}n$), met de onze, dan ziet men, dat hier de uitkomst ook al niet veel gemakkelijker berekenbaar is. Specialisatie der algemeene formule voor het geval $m = n$ geeft

$$\phi_0 - \phi_1 = C_u^{\frac{u-r}{2}} + \sum_{p=1}\left(C_u^{\frac{u-r}{2}+2pn} + C_u^{\frac{u-r}{2}-2pn}\right) -$$

$$-\sum_{p=0}\left(C_u^{\frac{u-r}{2}+(2p+1)n} + C_u^{\frac{u-r}{2}-(2p+1)n}\right),$$

Stelt men hierin $n = 1$, $r = 0$, dan komt er

$$0 = C_u^{\frac{u}{2}} + \sum_{p=1}\left(C_u^{\frac{u}{2}+2p} + C_u^{\frac{u}{2}-2p}\right) - \sum_{p=0}\left(C_u^{\frac{u}{2}+(2p+1)} + C_u^{\frac{u}{2}-(2p+1)}\right),$$

gevende weer ter verificatie de bekende betrekking

$$C_{2m}^1 + C_{2m}^3 + \ldots. = C_{2m}^0 + C_{2m}^2 + \ldots.$$

Verder moet de algemeene formule toegepast op het geval $r = m$ nul tot uitkomst geven, waaruit de betrekking

$$C_u^{\frac{u-m}{2}} + \sum_{p=1}\left(C_u^{\frac{u-m}{2}+p(m+n)} + C_u^{\frac{u-m}{2}-p(m+n)}\right) =$$

$$= \sum_{p=0}\left(C_u^{\frac{u-m}{2}+\{(p+1)m+pn\}} + C_u^{\frac{u-m}{2}-\{(p+1)n+pm\}}\right),$$

gevende voor $m = n$

$$C_u^{\frac{u-m}{2}} + \sum_{p=1} \left(C_u^{\frac{u-m}{2}+2pm} + C_u^{\frac{u-m}{2}-2pm} = \right)$$

$$= \sum_{p=0} \left(C_u^{\frac{u-m}{2}+(2p+1)m} + C_u^{\frac{u-m}{2}-(2p+1)m}\right).$$

IX. In aansluiting aan IV kan men nu ook nog het volgende vraagstuk oplossen:

De totale kans te bepalen dat Pierre uiterlijk aan het eind van het u^{de} spel geruïneerd is, wanneer Paul's bezit ongelimiteerd en dat van Pierre $= m$ is. Hier moet $\frac{u-m}{2}$ geheel zijn.

Men kan door de formule van IV het aantal gevallen bepalen, waarin Pierre na u spelen zou bezitten 2, 4, 6, ... $u + m$. In de overige der mogelijke gevallen zou hij geruïneerd zijn. De uitkomst wordt door toepassing van de eigenschappen der binomiaalcoëfficiënten vrij eenvoudig.

Als Pierre en Paul elk 3 bezitten, vindt BERTRAND voor de kans van elk om juist aan het eind van het $(2u+1)^{de}$ spel geruïneerd te zijn $\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{u-1} = \frac{3^{u-1}}{2^{2u+1}}$. De in VIII gegeven formule toepassende vindt men voor die kans

$$\frac{1}{2^{2u+1}} \left\{ C_{2u}^{u-1} + \sum_{p=1} \left(C_{2u}^{u-1+6p} + C_{2u}^{u-1-6p}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_{p=0} \left(C_{2u}^{u-1+(6p+3)} + C_{2u}^{u-1-(6p+3)}\right) \right\},$$

zoodat

$$C_{2u}^{u-1} + \sum_{p=1} \left(C_{2u}^{u+6p-1} + C_{2u}^{u-6p-1}\right) -$$

$$- \sum_{p=0} \left(C_{2u}^{u+6p+2} + C_{2u}^{u+6p-4}\right) = 3^{u-1}$$

moet zijn; voor $u = 15$ b.v. is inderdaad

$$(C_{14}^0 + C_{14}^6 + C_{14}^{12}) - (C_{14}^3 + C_{14}^9) = 3^6.$$

Voor $m = 2$ heeft men volgens BERTRAND voor elks kans om aan het eind van het $(2u)^{de}$ spel geruïneerd te zijn $\frac{1}{2^{u+1}} = \frac{2^{u-1}}{2^{2u}}$.

Hieruit en uit de formule in VIII heeft men nu

$$C_{2u+1}^{u-1} + \sum_{p=1} \left(C_{2u-1}^{u-1+4p} + C_{2u-1}^{u-1-4p}\right) - \sum_{p=0} \left(C_{2u-1}^{u+1+4p} + C_{2u-1}^{u-3-4p}\right) = 2^{u-1}.$$

P 6 f

UEBER EINEN CORRESPONDENZSATZ

VON

JAN DE VRIES

(Utrecht).

---

1. Zwei Punktreihen auf demselben Träger sollen sich in einer Correspondenz (n, n) befinden. Zwischen den Parametern x und y entsprechender Punkte gibt es alsdann eine Gleichung von der Form

1) $a_{nn}\, x^n y^n + a_{n,n-1}\, x^n y^{n-1} + a_{n-1,n}\, x^{n-1} y^n + \ldots + a_{00} = 0,$

oder, kurz,

$$\Sigma a_{pq}\, x^p y^q = 0,$$

wo $p, q = 0, 1, 2 \ldots . n$.

Wird ihr durch $x = x_1$, $y = y_1$ und ebenfalls durch $x = y_1$, $y = x_1$ genügt, so gibt es ein involutorisches Paar.

Nun erhält man aus den Relationen

$$\Sigma\, a_{kl}\, x_1^k y_1^l + \Sigma\, a_{lk}\, x_1^l\, y_1^k + \Sigma\, a_{pp}\, x_1^p y_1^p = 0,$$

$$\Sigma\, a_{kl}\, y_1^k x_1^l + \Sigma\, a_{lk}\, y_1^l x_1^k + \Sigma\, a_{pp} y_1^p x_1^p = 0$$

offenbar die Bedingung.

2) $$\Sigma\, (a_{kl} - a_{lk})\, x_1^l y_1^l\, \frac{x_1^{k-l} - y_1^{k-l}}{x_1 - y_1} = 0,$$

wo $k > l$ und $l = 0, 1, 2, \ldots . (n - 1)$ ist.

Die involutorischen Paare der (n, n) sind somit Paare einer gewissen involutorischen Correspondenz $(n - 1)$.

Werden die Correspondenzen (n, n) und $(n - 1)$ auf einen Kegelschnitt abgebildet, so umhüllen die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zwei Directionscurven, welche beziehungsweise die Klassenzahlen $2n$ und $(n - 1)$ besitzen. Da nun jedes involutorische Paar der (n, n) eine Doppeltangente der ersten Curve bestimmt, welche zugleich einfache Tangente der zweiten Curve ist, so erhellt dass die Directionscurve der (n, n) $n\,(n - 1)$ Doppeltangenten besitzt, welche eine gewisse Curve $(n - 1)^{\text{er}}$ Klasse berühren.

2. Die Gleichung (2) enthält

$$\tfrac{1}{2}\{(n+1)^2-(n+1)\}=\tfrac{1}{2}n(n+1)$$

Coefficienten

$$(a_{kl}-a_{lk}).$$

Gibt es, in der (n, n), ebenso viele involutorische Paare, welche nicht zugleich Paare einer involutorischen $(n-1)$ sind, so genügen jene Coefficienten einem System von $\frac{1}{2}n(n+1)$ homogenen, linearen Gleichungen deren Determinante nicht verschwindet; sämmtliche Coefficienten sind somit null, und man hat $a_{kl}=a_{lk}$. Es gilt also der Satz:

Wenn eine Correspondenz (n, n) *zwischen zwei collocalen Elementensystemen* $\frac{1}{2}n(n+1)$ *involutorische Paare besitzt, welche nicht einer involutorischen Correspondenz* $(n-1)$ *angehören, so ist jede Correspondenz ebenfalls involutorisch.*

Zu bemerken ist, dass die Zahl der unabhängigen involutorischen Paare, welche eine (n, n) zu einer involutorischen (n) macht, für $n>3$ kleiner ist als die Anzahl der involutorischen Paare, welche die allgemeine (n, n) besitzt. Für $n=3$ sind die beiden Zahlen gleich gross.

3. Betrachten wir noch den Fall $n=2$. Die (2, 2), welche zwei involutorische Paare enthält, wird zu einer (2), falls es drei involutorische Paare gibt, die nicht Paare einer quadratischen Involution sind.

Weil, einem bekannten Satz zufolge, die singulären Elemente zweier zwei-zweideutigen Systeme auf vier Weisen projectiv sind, indem den Verzweigungselementen und Doppelelementen des ersten Systems die analogen Elemente des zweiten entsprechen, so müssen zwei collocale Systeme (2, 2) welche die Verzweigungselemente gemein haben, auch dieselben Doppelelemente besitzen. Alsdann gibt es vier involutorische Paare, wonach die beiden Systeme zu einer involutorischen (2) vereinigt sind.

Hierdurch ist ein einfacher Beweis erbracht für den Satz auf den Emil Weyr seine schönen Untersuchungen über Punktgruppen auf Curven vom Geschlecht Eins gestützt hat. Den Satz selbst hat er in den *Sitz.ber. der Wiener Akad.*, Bd. LXXXVII, S. 595, veröffentlicht; der analytische Beweis, welcher sich dort findet, ist aber nicht einwandfrei.

BIBLIOGRAPHIE.

Tables d'intégrales indéfinies par G. Petit Bois, Ingénieur Civil des Mines. Paris, Gauthier—Villars, Liége, Ch. Béranger, 1906, 4°, 154 blz. Prijs frs. 10.

Stelselmatig gerangschikt vindt men in dit werk ongeveer 2500 onbepaalde integralen met de uitkomst der integratie. De integralen hebben betrekking op rationale breuken, wortelvormen en op elementaire transcendente functies. In een voorafgaand hoofdstuk worden de meest voorkomende vervormingen besproken, die de integralen en hare uitkomsten kunnen ondergaan. Het gebruik van deze tafel zal in menig geval eene tijdroovende berekening kunnen uitsparen, terwijl verder het boek ook te beschouwen is als eene rijke verzameling van vraagstukken over integraalrekening voor eerstbeginnenden. Kl.

Initiation mathématique, ouvrage étranger à tout programme dédié aux amis de l'enfance par C. A. Laisant. Genève, Georg & Cie, Paris, Hachette & Cie, 1906. Klein 8°, 161 blz.

Volgens den schrijver kunnen kinderen zich vóór hun elfde jaar al spelende onder doelmatige leiding de beginselen van het rekenen en van de meetkunde eigen maken. Het komt er slechts op aan, hoe men het kind die beginselen bijbrengt en het werkje, dat nimmer in de handen van het kind zelf mag komen, heeft ten doel den opvoeder en onderwijzer een richtsnoer te geven. Geschetst wordt een geregelde gang van, wat men zou noemen, fröbelonderwijs, geheel er op gericht, om het kind vertrouwd te maken met de getallen, met het tellen en met meetkundige figuren. Daarna komt, wanneer het kind lezen en schrijven heeft geleerd, de behandeling van allerlei vraagstukken, die gewoonlijk tot de rubriek: „Wiskundige verpoozingen" worden gebracht. Naar de meening van den schrijver kan men op deze wijze het wiskundig inzicht versterken en verscherpen, zonder van het kind noemenswaardige inspanning te vorderen, en vooral zonder het kind te vervelen.

Op den leeftijd van elf jaar gekomen, zal de leerling met

coördinaten kunnen omgaan en belangstellen in de eenvoudigste eigenschappen der kegelsneden.

Wij gelooven, dat de schrijver te zeer optimist is. Zeker kan men door den leergang van den schrijver te volgen het kind menig verdrietig uur besparen, maar zware eischen stelt het gebruik van dit boekje aan den opvoeder, en waarschijnlijk zullen alleen hoogst bekwame pedagogen er goede uitkomsten mede weten te verkrijgen. KL.

Annuaire pour l'an 1907, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier—Villars. 682 blz. (1 fr. 50 c.).

Evenals het jaarboek voor 1905 bevat het tegenwoordige een sterrenkundig gedeelte en een gedeelte gewijd aan aardrijkskunde en statistiek. In het sterrenkundig gedeelte is weinig veranderd; opnieuw is het overzicht der veranderlijke sterren aangevuld. Wat het aardrijkskundig gedeelte betreft zijn twee nieuwe tafels toegevoegd over de steden met meer dan 10000 inwoners in Frankrijk en over de gemiddelde bodemhoogte in de hoofdplaatsen der departementen en der arrondissementen. De tafels over het muntwezen zijn in een geheel nieuwen vorm gebracht. Ook de interesttafels hebben eenige wijziging ondergaan.

Aan het einde zijn geplaatst drie verhandelingen: Diamètre de Vénus, par M. Bouquet de la Grye. Note sur la XV[e] conférence de l'Association géodésique, par M. Bouquet de la Grye. Histoire des ideés et des recherches sur le Soleil. Révélation récente de l'atmosphère entière de l'astre, par M. H. Deslandres. KL.

Mélanges de Géométrie à quatre dimensions par E. JOUFFRET. Paris, Gauthier Villars, 1906.

In 1903 gaf Jouffret een eerste werk uit over de meetkunde met meer afmetingen (zie *Nieuw archief der Wiskunde*, VI, p. 195), thans ligt voor ons een tweede werk, tevens het laatste, want de schrijver is sedert dien overleden. We willen aan dezen arbeid eenige woorden wijden.

Allereerst merken we ten opzichte van den inhoud op, dat de hoofdstukken III, IV (L'hexagramme de Pascal; La surface du troisième degré) zich niet met de meetkunde van vier afmetingen bezighouden, terwijl ook in andere hoofdstukken de schrijver gedurig bij de meetkunde van twee of drie afmetingen blijft stilstaan. Gaat men de verdere hoofdstukken na:

I. Coup d'oeil sur les principes de la géométrie à quatre dimensions: II. Le système de coordonnées et les trois premiers polyédroïdes réguliers; V. L'hexagramme et l'hexastigme; VI. Les hypersurfaces du second degré; VII. Les quartiques; VIII. La question de l'existence réelle de l'hyperespace, dan ziet men, dat de schrijver geen stelselmatig in elkaar gezet handboek geeft en werkelijk de titel: „Mélanges" juist is gekozen. Een eenigszins nauwkeuriger onderzoek naar de methode leert ons dat, daar waar hij zich bepaaldelijk in de ruimte van vier afmetingen beweegt, zijn hulpmiddel bestaat in het toevoegen van eene veranderlijke in de coördinatenvergelijking der analytische meetkunde in de ruimte; terwijl hij aan den anderen kant toch ook het beginsel op den voorgrond stelt, dat men zich een punt moet denken, dat buiten onze ruimte is gelegen, en er gedurig naar streeft meetkundige beelden te geven. Vergelijkt men nu deze indeeling en behandeling met de streng wetenschappelijke behandeling en den vasten samenhang van Prof. Schoute's leerboek, dan komt men er allicht toe te meenen, dat hier alle eenheid ontbreekt en het boek een onsamenhangend mengsel ter aanschouwing geeft.

Toch is er meer eenheid in dan bij den eersten oogopslag schijnt. Neemt men Jouffret's eerste boek nogmaals ter hand, dan bemerkt men spoedig, dat een hoofddoel van den schrijver was een pleidooi te leveren ten gunste der meetkunde van meer afmetingen en dit pleidooi wordt in zijn tweede werk voortgezet. Dit is dan ook het standpunt, dat bij de beoordeeling moet worden gekozen; en dan blijkt het, dat de schrijver uit de door hem behandelde meetkunde eenige onderwerpen heeft gekozen, die hem het belangrijkst en tevens het meest aantrekkelijk voor den lezer schenen. Om ze goed in het licht te stellen, neemt hij verwante deelen der meetkunde van twee of drie afmetingen; zij moeten strekken om den lezer in hoogere beschouwingen in te wijden. De meetkundige beschouwingen worden met figuren toegelicht; wij merken er in het tweede hoofdstuk 18 op; terwijl later de configuratiën bij het hexagram van Pascal en vormen der cubische oppervlakten met de configuratie der 27 rechten worden afgebeeld. Het doel is duidelijk te maken, dat de ruimte van vier afmetingen door middel van projectie in beeld is te brengen, en de lezing der eerste vijf hoofdstukken levert het bewijs, dat de schrijver zijne onderwerpen met zorg heeft gekozen en bewerkt.

We gaan over tot de bespreking van het zesde en zevende

hoofdstuk. De schrijver was blijkbaar getroffen door het feit, dat de eigenschappen der binodale vlakke krommen van den vierden graad zeer goed in het licht komen, wanneer men deze als centrale of evenwijdige projectiën beschouwt van eene bikwadratische ruimtekromme; dit voert hem tot de beschouwing der kwadratische hyperoppervlakken en van hunne doorsnede, die, in de ruimte van drie afmetingen geprojecteerd, het vierdegraadsoppervlak met dubbelkegelsnede geeft. Men vindt nu eene inleiding tot die behandeling in den vorm van eene beschouwing over den algemeenen torus van de la Gournerie en de cycliden, waarbij ook de aandacht wordt gevestigd op de bijzondere krommen en punten. Nadat op die wijze de lezer is ingeleid, wordt de projectie van bovengenoemde doorsnede behandeld, en daarop volgt de afleiding van eenige eigenschappen van het oppervlak. De schrijver brengt de uitgebreide literatuur over dit onderwerp ter sprake, waaraan we den naam van C. Segre gaarne toegevoegd zouden zien.

Eindelijk draagt het laatste hoofdstuk een wijsgeerig karakter. Het houdt zich bezig met de werkelijkheid der vierde afmeting. Zooals men weet opent zich hier een veld van velerlei bespiegelingen; bespiegelingen, die zich van het terrein der wiskunde naar dat der speculatiën bewegen, en die dus voor wiskundigen des te minder van belang worden, naar mate de verwijdering grooter wordt. We bespeuren met genoegen, dat de schrijver de scheidingslijn aangeeft en voor zich zelven het standpunt van den wiskundige kiest. J. C.

H. Laurent, La géométrie analytique générale. Paris, A. Hermann, 1906, 8°, 147 blz.

De schrijver van dit werk is van meening dat, waar door verschillende personen de meest uiteenloopende denkbeelden worden ontwikkeld over de grondbeginselen der meetkunde, de oorzaak daarvan vooral te zoeken is in het feit, dat men met eene slecht gestelde vraag te doen heeft. Hij stelt zich daarom de vraag, welke de eenvoudigste onderstellingen zijn, die men moet maken om de stellingen der Euclidische meetkunde terug te vinden. Daartoe tracht hij eene abstracte en logische wetenschap op te bouwen, die met de meetkunde alleen gemeen heeft de namen der beschouwde dingen, terwijl die dingen slechts een even abstract bestaan hebben als de getallen, Zulk eene wetenschap kan worden opgebouwd, zonder gebruik te maken van andere hypothesen, dan die, waarop de zuivere

analyse berust: zij is een tak van de getallentheorie. Zonder er één woord in te veranderen levert zij alle stellingen van de klassieke meetkunde; alleen de woorden punt, lijn, cirkel, enz. hebben niet denzelfden zin als in de meetkunde.

In die wetenschap is eene definitie van het grootste belang, die van eene verplaatsing zonder vormverandering. Men heeft slecht deze definitie te wijzigen om van de meetkunde van Euclides over te gaan tot die van Riemann, van Lobatschewsky of tot andere, minder bekende.

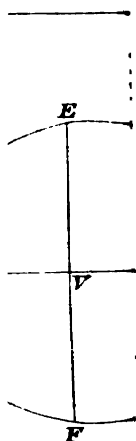
Op dit algemeene standpunt zich plaatsende, geeft nu de schrijver eene geheel algebraïsche behandeling van de meetkunde in eene ruimte van een willekeurig aantal afmetingen. Volledig is die behandeling niet; alleen eenige belangrijke onderdeelen worden meer uitvoerig besproken. Hij bepaalt zich daarbij bijna geheel tot de Euclidische meetkunde; aan de niet-Euclidische wordt slechts een achttal bladzijden gewijd.

Ofschoon daarin allerlei zeer belangrijke onderwerpen worden behandeld, valt het te betwijfelen, of iemand, die omtrent de grondbeginselen, waarop de meetkunde berust en de niet-Euclidische meetkunde nog geene heldere denkbeelden heeft, deze na de lezing van dit werkje zal hebben verkregen. Z.

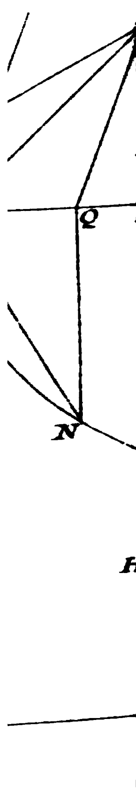
E. Vessiot, Leçons de géométrie supérieure, professées en 1905—1906, Publications du laboratoire de mathématiques de l'université de Lyon. Lyon, Delaroche et Schneider, 1906, 4°, 322 blz.

In deze voordrachten over hetgeen men gewoonlijk differentiaalmeetkunde noemt, wordt allereerst een overzicht gegeven van de voornaamste onderwerpen uit de theorie der ruimtekrommen en der ontwikkelbare oppervlakken. Daarna wordt overgegaan tot eene behandeling van de theorie der oppervlakken en der daarop gelegen krommen, als minimaalkrommen, asymptotische lijnen, kromtelijnen en geodetische lijnen; in 't bizonder wordt die theorie toegepast op de regelvlakken. Eene belangrijke plaats wordt ingeruimd aan de studie der lijnencomplexen en lijnencongruenties, aan de bepaling der ontwikkelbare oppervlakken en der focaaloppervlakken van eene congruentie, aan de krommen van eenen lineairen complex, enz., terwijl op verschillende plaatsen gewezen wordt op het groote belang, dat de studie der lijnen-menigvuldigheden voor die der oppervlakken heeft. Behalve lijnen congruenties worden ook bollencongruenties en cyclische stelsels, d.z. zulke stelsels van ∞^2 cirkels, die nor-

maal zijn op ∞^1 oppervlakken besproken. Met eene behandeling van enkele aanrakingstransformaties, o. a. de bekende transformatie van Lie, door welke de rechte lijnen der ruimte in bollen worden omgezet; de bepaling van die aanrakingstransformaties die de asymptotische lijnen van een oppervlak in de asymptotische lijnen van een ander oppervlak worden omgezet en van die, welke hetzelfde doen voor de kromtelijnen; een en ander over de bepaling van drievoudige stelsels van orthogonale oppervlakken eindigen deze voordrachten. Eene verzameling van vraagstukken, ter toepassing en uitbreiding van het behandelde, is aan het werk toegevoegd. De lezing van dit boek kan ieder, die zich met de studie der differentiaalrekening wil bezig houden, ten zeerste worden aanbevolen. Z.


E
V
F


A


Q
N
H

4.

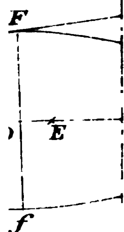
F

D E

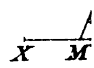
f

A

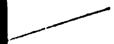
X


F
E
f


A


X
M

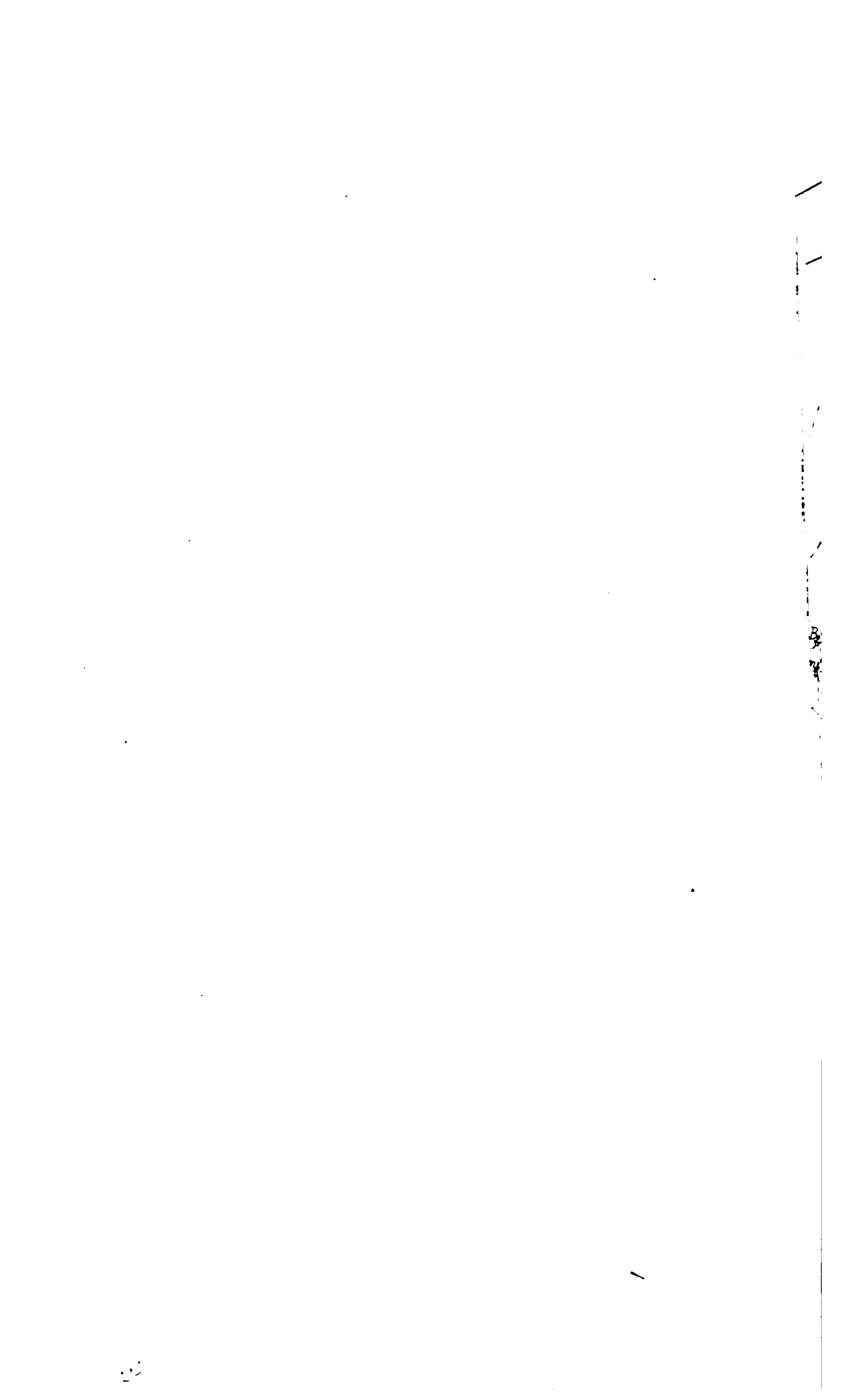


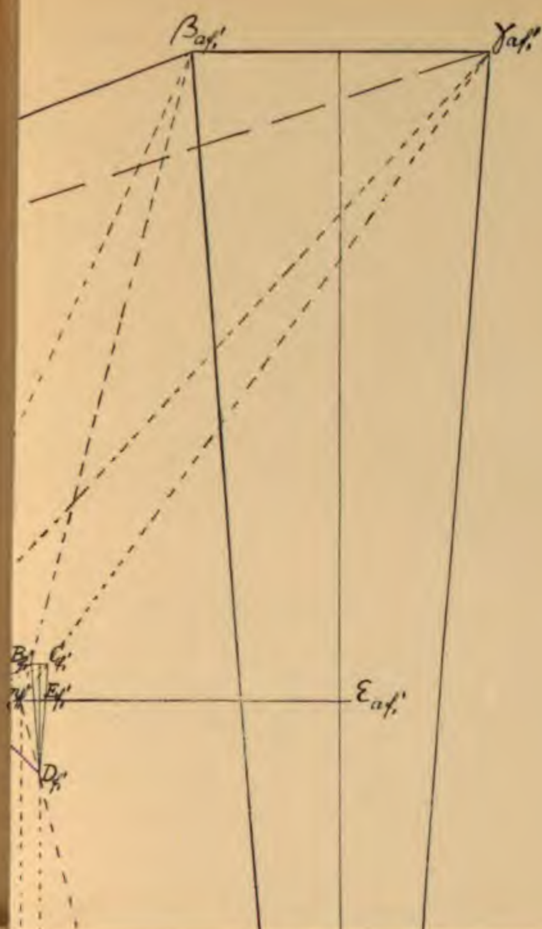




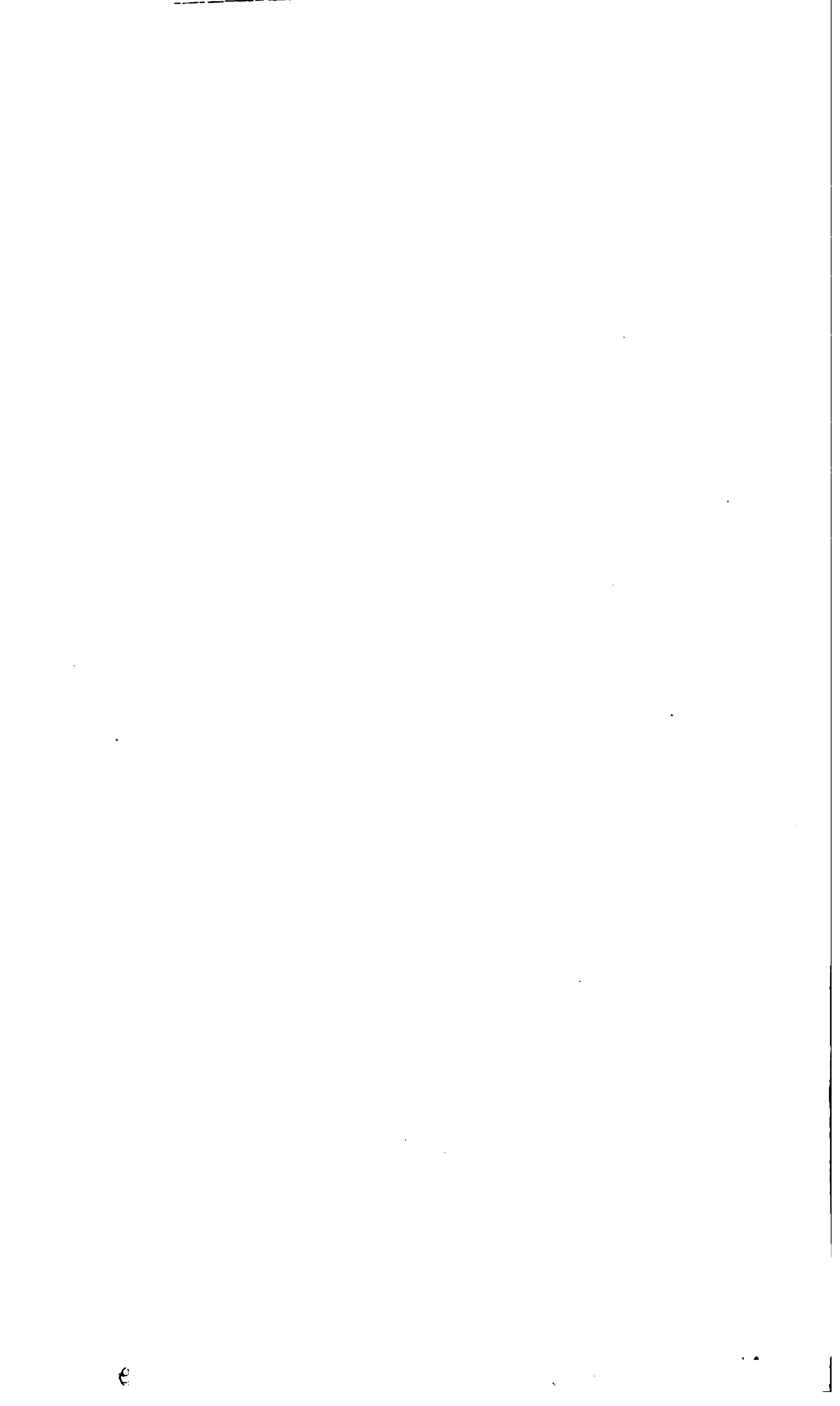

Z







β_{af_1}'
γ_{af_1}'
B_{f_1}'
C_{f_1}'
E_{f_1}'
ε_{af_1}'
D_{f_1}'



INHOUD.

Bibliographie.

PERIODICAL